Differential- und Integral-Rechnung.

Lehrbuch

der

Differential- und Integral-Rechnung.

Von

Dr. J. Worpitzky,

Professor an der Königl. Kriegs-Akademie und am Friedrichs-Werderschen Gymnasium
zu Berlin.

Mit 81 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Berlin,

Weidmannsche Buchhandlung.

1880.

Vorwort.

Das vorliegende Werk ist entstanden aus meinen Vorlesungen über den fraglichen Gegenstand an der Königl. Kriegs-Akademie und fasst zunächst den Zweck ins Auge, meinen Zuhörern eine im Sinn meiner Vorträge durchgeführte Bearbeitung des hauptsächlich zu behandelnden Materials darzureichen.

Wer eine möglichst vollständige Übersicht über den ganzen Umfang der Forschungsresultate auf dem angesprochenen Gebiete sucht, würde hier demnach fehlgreifen: es fehlt u. a. jede eingehendere Discussion anderer als der Elementarfunctionen (worunter ich diejenigen verstehe, welche durch die sieben gebräuchlichen Rechnungsarten direct definirt sind) und auch jede Anweisung über die Behandlung der Differentialgleichungen. Trotzdem dürfte das Inhaltsverzeichnis ergeben, dass ein Cursus von zwei Semestern auf den Universitäten wohl kaum irgendwo eine weitere Ausdehnung hat. Einzelne Abschnitte aus der sogenannten algebraischen Analysis und aus der analytischen Geometrie (im Anhang) sind in Folge theoretischer und praktischer Rücksichten ausführlicher erörtert, als es vielleicht Mancher dem Titel des Buches nach erwartet.

Wegen der Beigabe des geometrischen Anhangs glaube ich mich nicht erst entschuldigen zu müssen, da Beispiele zur Einübung der Sätze, auch zur Klärung des Inhalts derselben, durchaus unentbehrlich sind, und da die Verwendung der Differential- und Integralrechnung in der Geometrie ausserdem den Reiz und den Nutzen bietet, schon aus den elementarsten Lehren des neuen Calculs auf einem bereitliegenden Gebiete der Anschauung neue

Gesichtspunkte und Resultate zu gewinnen. Diese Anwendungen aber dem laufenden Texte selbst in grösserer Ausdehnung einzuverleiben, als es für nothwendig erachtet werden mag, um die Genesis des Begriffs der continuirlichen Folge der absoluten Zahlen durchleuchten zu lassen und um die Mittel zu einer fruchtbaren Veranschaulichung arithmetischer Formen an die Hand zu geben, habe ich mich, entgegen dem herrschenden Gebrauch, nicht entschliessen können, damit das System der Infinitesimalrechnung (Differential- und Integralrechnung) klarer hervortrete, als es bei dem umgekehrten Verfahren der Fall ist. Nach meiner Ansicht kommen Vorträge und Lehrbuch eben nur dann zur vollen Wirksamkeit, wenn sie sich in der Weise ergänzen, dass das letztere consequent den Faden der nothwendigen Zwischenglieder abwickelt, wo der Vortrag aus pädagogischen Gründen erläuternde Beispiele und Streifzüge auf verwandte Gebiete dazwischen schiebt. — Übrigens dürfte die Schwierigkeit, geeignete Beispiele aus dem Anhange überall herauszufinden, sich als gering erweisen, da der Inhalt eines jeden Paragraphen nicht nur im Inhaltsverzeichnis, sondern auch im Text vorgemerkt ist, und da man ausserdem eigentlich nur blind zuzugreifen braucht, um auf ein ausgeführtes Beispiel oder eine Anweisung zur Anwendung zu stossen.

Ferner erscheint mir die directe Einverleibung von zahlreichen Beispielen aus einem besonderen Gebiete der Anwendungen in einen Leitfaden eines Organons der Erkenntnislehre — und als ein solches muss die Infinitesimalrechnung doch wohl angesehen werden — desto bedenklicher, je grösser das Interesse ist, welches das Anwendungsgebiet aus seiner eigenen Natur heraus für sich in Anspruch nimmt. Denn es liegt die Gefahr sehr nahe, die nüchterne wissenschaftliche Aufmerksamkeit durch eine Würze abzulenken, welche einige Verwandtschaft mit derjenigen angenehmen Unterhaltung hat, durch welche das grosse Publicum heutzutage an die „populären wissenschaftlichen“ Vorträge herangezogen wird. Wie es bei diesen auf die Stichhaltigkeit der Argumentation in erster Linie durchaus nicht ankommt, sondern

auf eine Färbung, welche man geistreich nennt, eine Mischung von Wahrheit mit bevorzugter Dichtung — ähnlich hat man in den letzten Jahrzehnten vor dem Nachwuchs der Jünger der Wissenschaft die Grundlagen der letzteren recht häufig behandelt und sein Hauptaugenmerk nebenher auf die Abrichtung zu technischer Fertigkeit gerichtet. Man übersah, dass auf diese Weise die Ausbildung einer gewissen Specialität von Raritätensammlern vor derjenigen solcher Forscher bevorzugt wurde, welche die Raritäten einem wissenschaftlich und durchsichtig geordneten Museum einzuverleiben befähigt seien.

Damit will ich natürlich durchaus nicht die Mehrzahl der Sammler und Finder von Kostbarkeiten für blose Raritätensammler ausgeben. Ich will nur hervorheben, dass die Verehrung der Schaustücke als hervorstechende Liebhaberei zwar manche Anregung bringen kann, jedoch für den Hauptzweck jeder Wissenschaft, die geistige Entwickelung des Menschengeschlechts, einen sehr zweifelhaften Werth besitzt.

Zieht nicht der moderne Mysticismus seinen Lebenssaft grade aus dem Missverstand und dem Missbrauch der Mathematik?

Da ist einerseits der Quell, welcher aus der „Unbegreiflichkeit“ und „Unbestimmtheit“ des Unendlichkleinen und -grossen fliessend den Intellect angeblich in Zwiespalt mit sich selbst bringt, andrerseits der Born, welcher aus Formeln ohne Inhalt — wie sie deren Urheber gar nicht gefasst wissen wollen — Anschauungen ableitet und so Gott das Geheimnis der Schöpfung aus Nichts ablauscht, indem — das muss doch wohl die propositio minor sein? — Unendlichkleines den Mangel der Qualität im Quantum dadurch aufhebt — dass das Quantum annullirt wird.

Thut es einer Wissenschaft nicht noth, sich auf ihre Grundlagen zu besinnen, wenn sogar unter ihren angeregtesten Jüngern solche Unklarheiten platzgreifen, und wenn die Ungeheuerlichkeiten der dadurch entfesselten Phantasie — wahrlich nicht zum Besten des Gemeinwohls — ins grosse Publicum geschleudert werden können, welches sich nachgrade als dazu befähigt ansehn muss,

die Sicherheit der wissenschaftlichen Thatsachen durch Massenabstimmungen festzustellen?

Unter den Ursachen, welche zur Verschleierung des berührten Nothstandes und seiner Quellen mitwirken, spielt eine gewisse Rolle der freundschaftliche Austausch von Sprachbildern zwischen der Arithmetik und der Geometrie, bei welchem sich diese beiden hauptsächlich und zuerst bearbeiteten mathematischen Disciplinen erfahrungsgemäss so wohlbefinden, dass man ohne die nüchternste Aufmerksamkeit unvermerkt dahin gelangen kann, etwas, wie eine prästabilirte Harmonie, als in allen Stücken vorhanden und vielleicht nothwendig vorhanden anzunehmen. Die Geometrie mit ihren unendlich entfernten, ihren imaginären Graden u. s. w. — d. i. mit Redewendungen, durch welche sie durchaus nur ihre Hörigkeit gegen die Arithmetik bezeichnen will — lässt sich nicht von aller Verschuldung freisprechen: aber doch nur bei einem oberflächlichen, aus naiver Gewöhnung gewonnenen Anblick. Die Hauptschuld trägt die oberflächliche Behandlung der arithmetischen Disciplinen.

Und daher habe ich es unternommen, das Gebäude der letzteren mit besonderer Rücksicht auf die Infinitesimalrechnung hier darzustellen, wie ich es früher bereits für die ersten Elemente gethan habe.

Von allen Seiten Zustimmung zu finden, erwarte ich nicht, da ich sicher Gegner haben werde, welche ehrlich bei ihrer Auffassung der Angelegenheit das Princip nicht anerkennen, wahrscheinlich — wie ich es bei einer andern Gelegenheit schon erfuhr — aber auch solche, welche aus unlauteren Motiven wissentlich zur Unwahrheit und Entstellung greifen. Letztere berühren mich weiter nicht. Zur möglichen Verständigung mit Ersteren habe ich noch Einiges hinzuzufügen, um wenigstens einen Theil von demjenigen hinwegzuräumen, was sie vielleicht mit Unrecht als Pedanterie oder Wunderlichkeit zu bezeichnen geneigt wären. Ich gebe Diesen von vorne herein zu, dass es der Arbeit an eclatanten Spuren einer gleichzeitigen angestrengten Berufsthätigkeit nicht fehlen wird, stehe aber sonst für die Besonderheiten ein.

Die zunächst in die Augen springende Besonderheit ist die Untermischung der Differential- mit der Integralrechnung. Absolut neu ist diese Behandlungsweise ja nicht, aber selten beliebt: und zwar aus einer dem Gegenstand wissenschaftlich fremden Veranlassung. Wäre das Universitätssemester länger, so würde man die Trennung zwischen Differential- und Integralrechnung eben so wenig machen, wie Jemand auf dem Gymnasium ein Semester mit den beiden, die eigentliche Multiplication allein angehenden Sätzen $n(a+b) = na + nb$ und $m(na) = n(ma) = (mn)a$ auszufüllen geneigt sein wird, um im zweiten Semester Alles zu erledigen, was aus der Untermischung des Theilens und Messens mit der Multiplication entsteht. Jede arithmetische Operation hat eben die Eigenthümlichkeit, einerseits sich mit ihren Inversionen für die Zwecke der wissenschaftlichen Praxis zu combiniren und andererseits durch diese Combinationen Erweiterungen zu erfahren. Giebt man dies dem äusseren Anscheine nach nicht zu, so verdunkelt man nicht nur die Begriffe, sondern umgeht dieselben zugleich mit der Wirkung, dass die Verschleierung auch eine wesentliche Unbestimmtheit der Resultate zur Folge hat. An der „reinen" Differentialrechnung zeigt sich dies ausserordentlich deutlich, da schon der Satz $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ und nun gar der Taylorsche ohne Heranziehung der bestimmten Integrals unableitbar sind, wenn man sich nicht zu wissenschaftlicher Taschenspielerei bekennen oder wenigstens wesentliche Theile der Determination jener Sätze bei Seite schieben will.

Zudem reicht man, ohne das Gebiet der Integralrechnung zu berühren, auch bei der Darstellung der Derivirten nach einer Variabeln nicht über das Gebiet der algebraischen Functionen hinaus; denn: sämmtliche Hülfsmittel, welche man auch zur Definition von e und Differentiation von e^x heranziehen mag, sind nichts als eine mangelhafte Verhüllung dieser Thatsache für den Anfänger und ersparen weder Zeit noch geistige Arbeit, falls ihr klares Verständnis bezweckt wird. Wie leicht subsumirt sich beispielsweise nicht die ganze in der Differentialrechnung verwend-

bare Theorie der Reihenconvergenz unter die allgemeineren Lehren über die Bestimmtheit der Integralwerthe? — Freilich eine fast ganz vernachlässigte Frage! Und wie unnöthig ist eine durch solche Hülfsmittel verschobene Grundlage der Deduction, zumal da man sich durch sie den Vortheil eines bequem zu transformirenden Ausdrucks für den Rest entgehn lässt, ganz abgesehn davon, dass grade der Anfänger — in ganz gesundem Gefühl — sich noch misstrauisch gegen die Bestimmtheit von Grössen verhält, für die er kein klares Symbol sieht! Die Erfahrung, dass dieses Misstrauen aus Respect vor Auctorität und aus Freude über eine grosse Fülle von interessanten Resultaten meistens bald in den Hintergrund tritt, darf nicht — wie es häufig geschieht — mit einer Constatirung der später erlangten Einsicht verwechselt werden.

Meine Behandlung des binomischen Satzes — des einzigen, welcher in dem Bereich der uns vorliegenden Materie ohne Zirkelschluss und ohne Nöthigung zur Wiederholung bereits ausgeführter Betrachtungen vom Taylorschen Satze Gebrauch macht — wird meine obige Behauptung über den Nutzen eines transformationsfähigen Restausdrucks rechtfertigen. Ich habe ihn zum Theil grade zu diesem Zweck eingehender in Betracht gezogen, als es sonst geschehen ist, die Abelschen und Cauchyschen Untersuchungen nicht ausgenommen, zumal da es mir auch daran lag, diejenigen Anticipationen aus der Infinitesimalrechnung anzudeuten, von welchen schon die „elementare Analysis“ nothwendig Gebrauch macht, falls sie begrifflich verfährt.

Daher musste ich auch die complexen Zahlen — diese in gleicher Weise segensreiche Erfindung für die formale Allgemeinheit der Sätze des Radicirens, wie es die Vietasche Erfindung der positiven und negativen für die Subtraction und die Erfindung der gebrochenen und der irrationalen für die Division gewesen ist — in die richtige Beleuchtung bringen, trotzdem sie noch immer nicht ihr volles Bürgerrecht erlangt haben und nur widerwillig als „imaginaires“ und „leider unvermeidlich“ neben den positiven und negativen im Nothfall geduldet zu werden pflegen.

Es sind die complexen Zahlen aus diesem Grunde auch zur Differentiation und Integration herangezogen von da ab, wo mit der Genesis complexer Exponenten zugleich die Kreisfunctionen als die reellen Bestandtheile von e^{ix} definirt und dadurch, frei von jedem geometrischen Beigeschmack, in ihrer rein arithmetischen Natur erkannt werden, so wie ihre Eigenschaften durch die einfachsten Rechenmanipulationen ans Licht treten.

Nachdem hierdurch die begriffliche Indentität der Arcus und Logarithmen constatirt ist, und die Formeln für die Transformation der einen Form in die andere aufgestellt sind, fällt jede Berechtigung weg, die complexen Gebilde ängstlich zu vermeiden, zumal da sie häufig die bequemsten Handhaben des Calculs darreichen.

Freilich geht dies, wo die unabhängigen Variabeln complex sind, nicht an, ohne die bisherige Domäne der Functionentheorie flüchtig zu streifen; was ich übrigens nicht für einen Nachtheil ansehn kann, da ein Blick in die Hallen hinter dem betretenen Vorhofe einen reichen Gewinn an Anregung bietet. Ausserdem lässt sich die Benutzung von unabhängigen complexen Variabeln ohne grosse Umwege vermeiden, und ist von mir im allgemeinen auch vermieden worden.

Gegen die Gepflogenheit, Integrationsmittel und -resultate als für den grade vorliegenden Fall „ungültig" zu verwerfen, wenn sich wider die Erwartung das i in ihnen findet, möchte ich noch auf den nicht zu unterschätzenden Nachtheil aufmerksam machen, dass diese sogenannten Ausnahmefälle vom Anfänger leicht mit den wirklichen (begrifflich nicht aufgelösten) Ausnahmefällen, wie $\frac{1}{0}$, verwechselt werden. Deren volle Würdigung ist ihm dann ebenfalls erschwert, sobald die ersteren sich ihm aufzulösen anfangen, zumal da man sich meistens nicht die Mühe giebt, von vorne herein Substitutionswerth und Grenzwerth scharf zu unterscheiden und die Frage nach deren Existenz zu discutiren. Später, nachdem die Grundlage gelegt ist, kann man ja, ohne Besorgnis vor Missverständnissen, jede bequeme Sprechweise wählen, wie man

ja auch vor bereits geschulten Zuhörern oder Lesern durchaus nicht sämmtliche Determinationen und Ausnahmen an denjenigen Stellen anzudeuten oder gar zu erledigen braucht, an welche sie anknüpfen.

Endlich möchte ich noch zur Frage stellen, ob nicht die Scheu vor der Einführung der complexen Zahlen in die Elemente der Infinitesimalrechnung in ursächlichem Zusammenhange steht mit den noch immer nicht ganz und allgemein überwundenen Unklarheiten über die Natur des Positiven und des Negativen? — Ich glaube nicht zu irren, wenn ich die Signatur der auch jetzt noch verbreitetsten Auffassung so charakterisire:

Positive und absolute Zahlen sind ihrem Begriffe nach identisch. Negative Zahlen, an und für sich unsinnig, lassen sich in der Geometrie bei der Benutzung von Coordinatensystemen erfahrungsgemäss mit Vortheil und Sicherheit verwenden, wenn man die Vorzeichen als Richtungsindices ansieht unter gewissen Regeln von den Zeichenwechseln; daher muss der Begriff der Richtung in die Arithmetik einverleibt werden, zumal da er auch in ihr Nutzen bringt, wie wenig er im Grunde dahin passt. Nachdem die Geometrie der Arithmetik diesen Gefallen gethan hat, steigert sie sogar ihre Güte noch durch eine Erweiterung des Richtungsbegriffs in der Ebene mit der Darreichung der complexen Zahlen. Es ist recht schade, dass der dreidimensionale Raum sich spröder verhält, was — da die Arithmetik erfahrungsgemäss ihre wichtigsten Bereicherungen aus richtiger Erkenntnis geometrischer Beziehungen erhält — vielleicht daran liegt, dass wir über den Raum eine nicht ganz zutreffende Anschauung haben.

Wie man nur selten auf Irrwege zu gerathen pflegt, wenn man nicht beim Ausgange sich sicher zu fühlen berechtigt ist, so auch hier. Denn die Arithmetik bedarf der geometrischen Anschauung, oder benutzt sie wenigstens hauptsächlich und hat sie auch hauptsächlich in Absicht, wo sie vom Begriff der Zahl, als dem Schema eines bestimmt eingetheilten Ganzen von beliebiger und durchaus nicht nothwendig homogener Qualität, zu derjenigen Zubereitung des Zahlenbegriffs übergeht, vermöge welcher er zum

Schema für alle beliebig eintheilbaren Quanten von beliebiger homogener Qualität besondert werden soll. Zu andern Zwecken bedarf sie der Vermittelung der geometrischen Anschauung nicht, namentlich bedarf sie keiner Sätze über geometrische Figuren. Vielleicht gäbe es gar keine Arithmetik in unserm Sinne, wenn die Raumanschauung uns nicht die ihr eigenthümliche Mannichfaltigkeit von Quantitäten darböte, da dann das Bedürfnis der jetzt durchgeführten Abstraction von der Qualität fehlte.

Der Begriff der stetigen Zahlenfolge in der Arithmetik — ein aus der Eintheilung allein unmöglich ableitbarer Begriff — würde sich, wenn man die Raumanschauungen bei Seite lässt, wenigstens aus der Zeitanschauung wohl kaum entwickelt haben und nur wenig fruchtbar gewesen sein, zumal da sogar eins der ersten Postulate unserer Arithmetik (nämlich: $a + b = b + a$) aus ihr schwerlich begründet werden mag. Der Begriff der stetigen Zahlenfolge also kann sich seiner Beziehung auf die Zwecke der geometrischen Verwendung beim Messen schwer entschlagen (vielleicht unmöglich — was ich hier nicht ausmachen will). Er schliesst in sich das Urtheil ein, dass alle in geometrischer Continuität stehenden Grössen beim Übergang von einem Quantum zu einem andern jeden dazwischenliegenden Werth annehmen müssen, dass also u. a. eine Function $= 0$ werden muss, welche geometrisch veränderliche Quanta messend ihr Vorzeichen wechselt. Gegen diesen Annullirungsschluss ist man neuerdings misstrauisch geworden durch die Verwechselung der Frage mit einer absolut anderen, ob eine durch eine synthetische Gleichung gegebene Function beim Übergang von negativen zu positiven Werthen in Folge der geometrisch stetigen Veränderung der unabhängigen Variabeln annullirt werden müsse, nachdem man eingesehen hat, dass solche Functionen Sprünge machen können. Man geht aber in dem Misstrauen zu weit, wenn man es auf Functionen $y = f(x)$ ausdehnt, welche nicht bloss für jeden Werth von x in einem gewissen Intervall einen bestimmten Werth von y ergeben, sondern auch umgekehrt für jedes y des

von ihm hierbei beschrittenen Intervalls ein bestimmtes x seines berührten Intervalls — das letztere etwa dadurch bewiesen, dass $x = \varphi(y)$ durch eine convergente Reihe mit unendlich kleinem Δx für unendlich kleine Δy dargestellt werden kann. Und von solcher Beschaffenheit sind mindestens alle algebraischen Functionen $\psi(x, y) = 0$ und alle Elementarfunctionen. Aus diesem Grunde habe ich keinen Anstand genommen, von dem Annullirungssatze Gebrauch zu machen. Da es zudem bei der Behandlung von Thematen geschehen ist, welche Mancher, obwohl gegen meine Ansicht, als nicht mehr zu den Elementen der Infinitesimalrechnung gehörig ansieht, so hoffe ich, auf keinen zu gewichtigen Widerspruch zu stossen.

Was im Übrigen die mir eigenthümliche Betrachtungsweise betrifft, so kann ich, abgesehen von den jedem kundigen Leser erkennbaren Thatsachen — dem allgemeinen Satz über die partielle Integration (§. 21), der unausgesetzten Restcontrole u. dgl. — nicht umhin, darauf aufmerksam zu machen, dass die Herren Briot und Bouquet in der zweiten und durchaus neufundamentirten Auflage ihrer *Théorie des fonctions doublement périodiques* (*Théorie des fonctions elliptiques.* Paris 1873) vielleicht verbunden gewesen sein würden, anzugeben, was sie dabei meiner Abhandlung vom Jahre 1867 und meinem Briefe vom 30. Jan. 1807 entnommen haben.

Berlin, im Juni 1880.

Der Verfasser.

Druckfehler.

Seite 25, Zeile 2 von unten. Für $\frac{\partial f u, v + \Delta v}{\partial u}$ lies $\frac{\partial f(u, v + \Delta v)}{\partial u}$.

Seite 31, Zeile 3 von oben. Für $v \cdot \frac{du}{du}$ lies $v \cdot \frac{du}{dx}$.

Seite 97, Zeile 7 von unten. Für $\frac{\sin(x\,y)}{x}$ lies $\frac{\sin(x, y)}{x}$.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Anhang

über die wichtigsten geometrischen Anwendungen.

Capitel I.

Einleitung.

§ 1.

Die Grundbegriffe der Functionalbetrachtung.

I. Eine als völlig bestimmt gedachte Zahl[1]) — d. i. eine solche, über deren Werth bereits endgültig verfügt ist — heisst **constant** oder **unveränderlich.** Dagegen wird eine Zahl, an deren Stelle es freistehen soll Zahlen von anderem Werthe zu setzen, **variabel** oder **veränderlich** genannt.

Die Constanten bezeichnet man in der Regel durch die ersten Buchstaben des Alphabets (a, b, c, . . .), die Variabeln durch die letzten (. . . , u, v, w, x, y, z).

II. **Unendlich** $\left\{\begin{matrix}\textbf{gross}\\ \textbf{klein}\end{matrix}\right\}$ heisst eine Variable x, für

---

[1]) Ueber den Begriff der Zahl in der Arithmetik vergleiche man mein Lehrbuch „Elemente der Mathematik". — Die reellen Zahlen, mit denen wir es hier zunächst allein zu thun haben, lassen sich nach denjenigen Erweiterungen des Zahlbegriffs, welche die ersten vier Rechnungsarten zum Zweck der Allgemeingültigkeit ihrer Formeln erfordern, u. a. ansehn als die Gesammtheit aller Quotienten zwischen einer veränderlichen und einer constanten Grösse von gleicher Qualität. Man kann also, wenn z eine Zahl, x eine veränderliche und a eine constante Strecke ist, jede Veränderung von x durch die Veränderung von z in der Gleichung $x = za$ vollständig beschreiben.

welche man übereingekommen ist eine solche $\left\{\begin{matrix}\text{zunehmende}\\ \text{abnehmende}\end{matrix}\right\}$ Reihe von Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots$$

zu setzen, dass deren absoluter Betrag schliesslich $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ wird und bleibt als jede nach Belieben ausgewählte Constante.

Man sagt also dadurch, dass man eine Zahl unendlich gross oder klein nennt, durchaus nichts über ihren augenblicklichen Werth aus, sondern kennzeichnet nur die Art der Veränderung ihres Werthes; oder genauer: man kennzeichnet dadurch nur den Verlauf einer Reihe von Zahlen, die nach und nach an ihrer Stelle substituirt werden sollen. — Z. B. ist es ganz correct, zu sagen: „Die Entfernung der Erde von der Sonne ist unendlich klein.“ anstatt: „Die Erde nähert sich im Verlauf der Jahrtausende der Sonne immer mehr und bis zu jeder beliebig kleinen Entfernung.“ — Um nicht in Irrthümer zu verfallen, muss man die Begriffe „unendlich klein“, „null“, „sehr klein“, „beliebig klein“ u. s. w. von vorne herein scharf unterscheiden; desgleichen „unendlich gross“ u. s. w. [1])

III. Man nennt eine **Constante** a den **Grenzwerth** (limes) **einer Variabeln** x, wenn die Veränderung der letzteren so vor sich geht, dass der absolute Werth der Differenz (a — x) unendlich klein ist. — Man schreibt dies:

$$\lim \cdot x = a, \text{ oder: } \lim \cdot (a - x) = 0, \text{ oder: } \lim \cdot (x - a) = 0.$$

IV. Das Zeichen dafür, dass eine **Variable x unendlich wächst**, ist:

$$\lim \cdot x = \infty.$$ [2])

[1]) Wir machen hierauf deshalb so dringend aufmerksam, weil die meisten Lehrbücher — auch die besseren — diesen Unterschied nicht hinreichend betonen oder wohl gar zur Verwechselung der kaum verwandten Begriffe anleiten, so dass Diejenigen, welche in die Wissenschaft erst eintreten, meistens dazu verurtheilt sind, sich mit künstlich geschaffenen, in Wahrheit gar nicht vorhandenen Schwierigkeiten der Auffassung des Gegenstandes auf eigene Hand abzufinden; was ihnen erfahrungsgemäss nicht immer gelingt.

[2]) Hiermit soll natürlich nicht gesagt sein, dass es eine Constante ∞ gäbe.

V. Will man anzeigen, dass die Variable y eine Werthreihe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$$

zu durchlaufen gezwungen ist, weil eine andere Variable x eine Werthreihe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$$

durchläuft, so nennt man y eine **Function** von x. — Symbole dafür sind:

$$y = f(x),\ y = \varphi(x),\ y = \psi(x),\ \text{u. s. w.}$$

Bei dieser Beziehung der Variabeln y und x zu einander nennt man y die **abhängige**, x die **unabhängige** Variable oder das **Argument** der Function.

Fasst man, ohne das Abhängigkeitsgesetz der beiden Variabeln von einander zu ändern, umgekehrt x als Function von y auf, so heisst $x = F(y)$ die **inverse Function** von $y = f(x)$.

Es genügt vorläufig, die Gleichung $y = f(x)$ so aufzufassen, dass f das Zeichen für einen arithmetischen Ausdruck ist, welchen man nach Belieben aus der Variabeln x und aus Constanten zusammengesetzt hat, dessen Form dann aber nicht geändert werden darf, so lange man dasselbe Functionszeichen f beibehält. Z. B. könnte man $f(x) = \frac{x-2}{3x+4}$ machen und diesen Ausdruck durch y bezeichnen; dann nimmt die abhängige Variable y für die Werthe

$$x_1 = -3,\ x_2 = -2,\ x_3 = -1,\ x_4 = \pm 0,\ x_5 = +1,\ x_6 = +2,\ x_7 = +3, \ldots$$

der unabhängigen Variabeln x folgende Werthe an:

$$y_1 = f(-3) = +1,\quad y_2 = f(-2) = +2,\quad y_3 = f(-1) = -3,$$
$$y_4 = f(\pm 0) = -\frac{1}{2},\ y_5 = f(+1) = -\frac{1}{7},\ y_6 = f(+2) = \pm 0,$$
$$y_7 = f(+3) = +\frac{1}{13}, \ldots$$

Als inverse Function von $y = f(x) = \frac{x-2}{3x+4}$ erhält man

$$x = F(y) = \frac{2+4y}{1-3y}.$$

Um verschieden zusammengesetzte Functionen zu bezeichnen, benutzt man die verschiedenen Functionszeichen $f, \varphi, \psi, \ldots$

Schliesslich wollen wir noch darauf aufmerksam machen, dass die Werthreihe $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$, welche y bei der Veränderung von x zu durchlaufen hat, auch aus lauter gleichen Zahlen bestehen kann, dass es also durchaus nicht in der Absicht liegt, die Bezeichnung $y = f(x)$ auf solche Fälle zu beschränken, in denen y sich gleichzeitig mit x ändert, zumal da es bei einer verwickelteren Zusammensetzung von $f(x)$ nicht immer so einfach ist, die Veränderlichkeit der Function $y = f(x)$ zu constatiren. Eine constante Function von x ist z. B. $x = (5 + x) - x = 5$; und auch

$$y = \frac{(x-2)^3 - (x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}})^2 + 8}{x}$$

besitzt einen constanten Werth 3 für jedes x ausser für $x = 0$, wo der Werth von y nach Willkür angenommen werden kann.

VI. Eine Function $f(x)$ heisst **stetig an der Stelle** $x = a$, falls erstens die Substitution von $x = a$ einen bestimmten Werth $f(a)$ — den **„Substitutionswerth“** — ergiebt, und zweitens dieser Substitutionswerth $f(a)$ auch der **Grenzwerth** von $f(x)$ bei der Annäherung von x an a ist, ohne Rücksicht auf das Gesetz der Annäherung.

Dass $\lim \cdot f(x) = f(a)$ für $\lim \cdot x = a$ sei, schreibt man:

$$\lim_{x=a} \cdot f(x) = f(a).$$

Unstetig an der Stelle $x = a$ heisst die Function $f(x)$ in jedem andern Falle.

Beispielsweise ist die Function $f(x) = x^2$ stetig an jeder Stelle $x = a$, weil die Differenz

$$f(x) - f(a) = f(a+h) - f(a) = (a+h)^2 - a^2 = h(2a+h)$$

gleichzeitig mit h unendlich klein ist, mag h einen positiven oder negativen Werth haben.

Die Functionen $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x^2}$ sind an der Stelle $x = 0$ unstetig, weil sie für $x = 0$ keinen Substitutionswerth haben; denn die Bruchform $\frac{1}{0}$ enthält einen logischen Widerspruch wider den Be-

griff der Division. Ausserdem entbehrt jede von diesen Functionen eines Grenzwerthes an der Stelle $x = 0$, weil sie bei der Annäherung von x an 0 unendlich wachsen.

Die Function

$$y = f(x) = \frac{1}{3 + 10^{\frac{1}{1-x}}}$$

besitzt an der Stelle $x = 1$ keinen Substitutionswerth und ist deshalb unstetig. Sie besitzt aber Grenzwerthe an der Stelle der Unstetigkeit, und zwar zwei von einander verschiedene. Nähert man sich nämlich dem Werthe $x = 1$ von unten her vermittelst der Reihe

$$x_1 = 1 - \frac{1}{1},\ x_2 = 1 - \frac{1}{2},\ x_3 = 1 - \frac{1}{3},\ x_4 = 1 - \frac{1}{4},\ x_5 = 1 - \frac{1}{5},\ \ldots,\ x_n = 1 - \frac{1}{n},\ \ldots,$$

so durchläuft y die Reihe

$$y_1 = \frac{1}{13},\ y_2 = \frac{1}{103},\ y_3 = \frac{1}{1003},\ y_4 = \frac{1}{10003},\ y_5 = \frac{1}{100003},\ \ldots,\ y_n = \frac{1}{3 + 10^n},\ \ldots$$

und nähert sich dem Grenzwerth

$$\lim_{x=1} . y = 0,\ (x < 1).$$

Nähert man sich aber dem Grenzwerthe $x = 1$ von oben her vermittelst der Reihe

$$x_1 = 1 + \frac{1}{1},\ x_2 = 1 + \frac{1}{2},\ x_3 = 1 + \frac{1}{3},\ x_4 = 1 + \frac{1}{4},\ x_5 = 1 + \frac{1}{5},\ \ldots,\ x_n = 1 + \frac{1}{n},\ \ldots,$$

so durchläuft y die Reihe

$$y_1 = \frac{1}{3,1},\ y_2 = \frac{1}{3,01},\ y_3 = \frac{1}{3,001},\ y_4 = \frac{1}{3,0001},\ y_5 = \frac{1}{3,00001},\ \ldots,\ y_n = \frac{1}{3 + \frac{1}{10^n}},\ \ldots$$

und nähert sich dem Grenzwerth

$$\lim_{x=1} \cdot y = +\frac{1}{3}, \ (x > 1).$$

Auch die Function

$$y = \frac{x(x-2)}{x-2}$$

ist an der Stelle $x = 2$ unstetig, weil sie für $x = 2$ keinen bestimmten Substitutionswerth besitzt, sondern in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, für welche jede beliebige Zahl gesetzt werden darf. Die beiden (in aufsteigender und in absteigender Richtung gesuchten) Grenzwerthe sind bei ihr gleich, nämlich:

$$\lim_{x=2} \cdot y = +2.$$

— Den Ausdruck für y durch $(x-2)$ zu heben, ist nur gestattet, so lange der Werth von $(x-2)$ nicht $= 0$ ist.

VII. **Eindeutig** heisst eine Function y von x, falls jedem einzelnen Werthe von x nur ein Werth von y entspricht; **eindeutig verlaufend** (oder **variirend**), falls y bei stetiger Veränderung der unabhängigen Variabeln x von einem bestimmten Anfangswerthe y aus nur auf eine Weise stetig fortschreitet.

Z. B. ist die Function

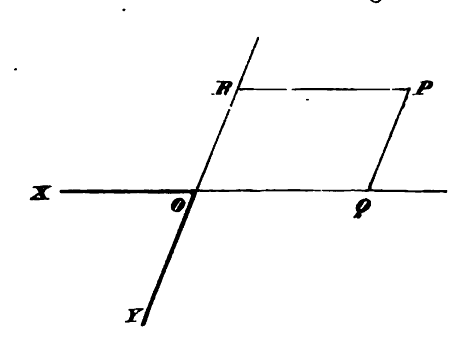
$$y = \sqrt{x^2}$$

generell zweideutig, denn sie besitzt für jedes von Null verschiedene x zwei Werthe — einen positiven und einen negativen: $+x$ und $-x$. Aber sie verläuft eindeutig, wenn man von einem bestimmten Anfangswerthe, z. B. von $y = -3$ für $x = +3$, ausgeht und, x stetig ändernd, die Stelle $x = 0$ vermeidet; hierbei bleibt stets $y = -x$. Geht aber x durch Null hindurch, so setzt sich y sowohl mit dem Werthe $(-x)$ als auch mit dem Werthe $(+x)$ stetig fort, hört also an der Stelle $x = 0$ auf, eindeutig zu verlaufen.

§ 2.

Geometrische Veranschaulichung des Verlaufs der Functionen.

Zieht man durch den Punkt P in der Ebene des Winkels XOY die Parallelen zu den Schenkeln des letzteren, bezeichnet mit Q den Punkt, in welchem die Grade XO, mit R denjenigen, in welchem die Grade YO getroffen wird, so ist die Lage der Punkte Q und R durch die Lage des Punktes P bestimmt. Und umgekehrt ist auch die Lage des Punktes P als des vierten Eckpunktes des Parallelogramms QORP völlig bestimmt, wenn man die Lage der Punkte Q und R kennt.



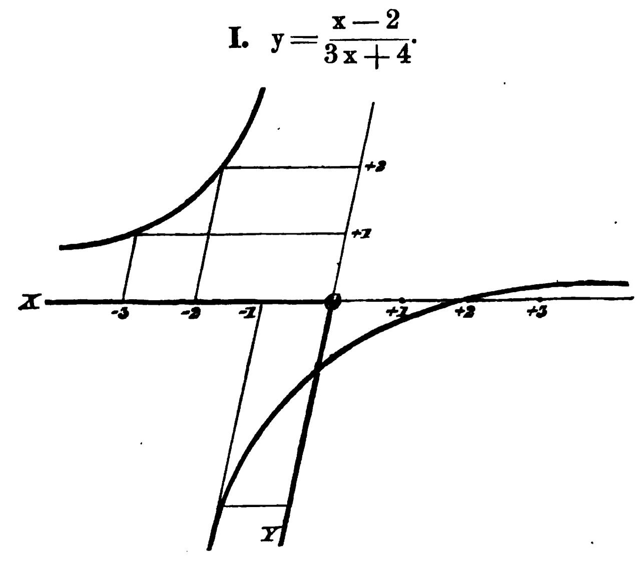
Um die sichere Auffindung der letzteren zu vermitteln, bezeichnet man durch x und y die mit den geeigneten Vorzeichen versehenen Maasszahlen der Strecken OQ und OR, damit man durch die Addition von (±OQ) zur Halbgraden XO den Punkt Q und durch Addition von (±OR) zur Halbgraden YO den Punkt R treffe.

Dies vorausgesetzt, nennt man x die Abscisse, y die Ordinate des Punktes P, XO die Abscissenaxe, YO die Ordinatenaxe und den Winkel XOY den Coordinatenwinkel. Der Collectivname für Abscisse und Ordinate ist: die Coordinaten von P.

Ist y als eindeutige Function $f(x)$ von x gegeben, so bestimmt jeder Werth von x vermöge der Gleichung $y = f(x)$ einen einzigen Punkt P der Ebene. Die verschiedenen Werthe, welche x annehmen kann, bestimmen verschieden gelegene Punkte P. Der geometrische Ort der letzteren ist eine Linie, deren Gestalt und Lage allein von der Beschaffenheit der Gleichung $y = f(x)$ abhängt und — weil man den zu jedem x gehörenden Werth von y leicht ersieht — sehr wohl geeignet ist, den Verlauf der Function y zur Anschauung zu bringen.

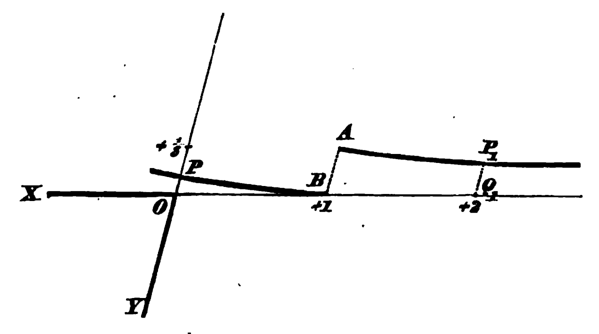
Wir wollen die Zeichnung für einige von den Functionen entwerfen, welche im vorigen § zur Erläuterung der Begriffe benutzt sind.

$$\text{I.}\quad y = \frac{x-2}{3x+4}.$$



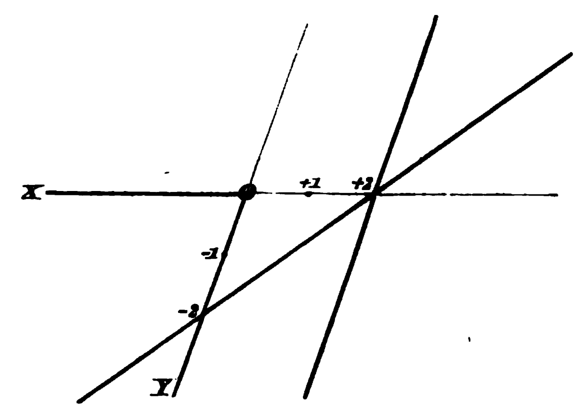
Die Curve ist an der Stelle $x = -1\frac{1}{3}$ unzusammenhängend; sie hat dort keine Endpunkte, sondern ist nach oben und nach unten hin unbegrenzt.

$$\text{II.}\quad y = \frac{1}{3 + 10^{\frac{1}{1-x}}}.$$



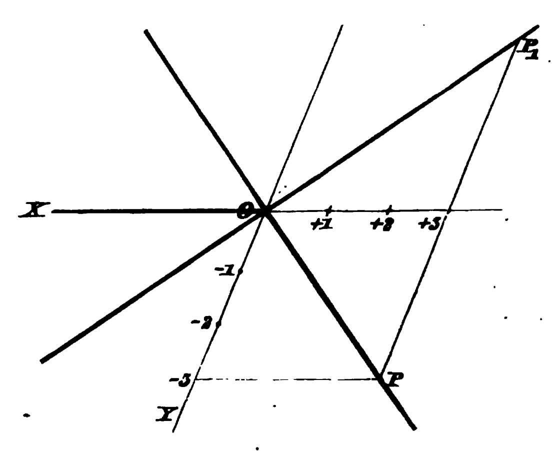
Die Curve ist an der Stelle $x = 1$ unzusammenhängend; ihre beiden Enden A und B stehen hier um $\frac{1}{3}$ von einander ab.

III. $y = \frac{x(x-2)}{x-2}$.



Zwei Grade durch den Punkt ($x = 2$, $y = 0$), von denen die eine der Ordinatenaxe, die andere der Halbirungslinie des Coordinatenwinkels parallel ist.

IV. $y = \sqrt{x^2}$



Zwei Grade, welche den Coordinatenwinkel und dessen Nebenwinkel halbiren. Geht man vom Werthe $y = -3$ für $x = +3$ aus, so bleibt der darstellende Punkt bei stetiger Veränderung von y in der Graden OP, wenn man ihn nicht nach O gelangen lässt. Durch O hindurch kann er jedoch eben so gut stetig nach P_1, wie nach P zurückgehn, wenn x dann wieder von 0 bis $+3$ wächst.

Capitel II.

Die Derivirte einer Function.

§ 3.

Begriff der Derivirten und Bedeutung ihres Vorzeichens.

Definition:

Unter der **Derivirten**[1]) **einer Function** $f(x)$ **an der Stelle** $x=a$ **nach der Richtung des Intervalls** (a, b) versteht man den Grenzwerth des Bruchs

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

für solche Werthe von x, welche sich dem Werthe a von b aus stetig nähern, und bezeichnet:

$$\lim_{x=a} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a), \text{ [Richtung (a, b)]}.$$

Man bezeichnet ferner:

$$x-a=\Delta x,\ f(x)-f(a)=\Delta f(x),\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\ ^{2)}$$

und fasst die folgenden Symbole als synonym auf:

$$(1)\quad f'(a)=\lim_{x=a}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x=0}\cdot\left[\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right]_{x=a}=\left[\frac{d f(x)}{dx}\right]_{x=a}.$$

Das hier zuletzt für $f'(a)$ aufgeführte Symbol will die ausführliche Schreibweise $\lim\limits_{\Delta x=0}\cdot$ [...] durch den Gebrauch des Buchstabens d zur Bezeichnung von unendlich abnehmenden Differenzen ersetzen.

---

[1]) Ein anderer gebräuchlicher Name ist „Differentialquotient", auch „Ableitung", endlich „Steigung", von denen der letztere — obgleich seltnere — besonders charakteristisch für den Begriff sein dürfte.

[2]) Das Symbol Δu ist zu lesen: „Zuwachs von u"; d. i. „Differenz (Δ) der Werthe von u."

Wo es nicht auf die Fixirung eines besondern Werthes a von x ankommt, schreibt man auch bloss

$$f'(x) \text{ oder } \frac{d f(x)}{dx}$$

für $f'(a)$.

Eine Function differentiiren heisst, ihre Derivirte bilden.[1])

Zusatz.

Erhält man durch die Differentiation nach der Richtung (a, b) einen völlig bestimmten Werth der Derivirten $f'(a)$, so nähert sich die Grösse φ in der Gleichung

$$(2) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \varphi$$

dem Grenzwerthe Null, sobald sich x im Intervall (a, b) dem Grenzwerthe a nähert.

Lehrsatz I.

Ist die nach einer bestimmten (aufsteigenden oder absteigenden) Differentiationsrichtung abgeleitete Derivirte $f'(x)$ an der Stelle $x = a$ eine stetige Function von x, so ist ihr Werth unabhängig von der Differentiationsrichtung; d. h. m. a. W.: so erlangt man durch Differentiation nach der entgegengesetzten Richtung denselben Werth.

Beweis. Es sei die Derivirte $f'(x)$ durch die Differentiation der Function $f(x)$ nach der Richtung der wachsenden x gewonnen; und h bedeute eine positive Zahl, welche so klein ist, dass $f'(x)$ von $x = a - h$ bis $x = a$ stetig bleibt. Dann kann man dieser Stetigkeit wegen von der Grösse ε in der Gleichung

$$f'(a - h) = f'(a) + \varepsilon$$

aussagen, dass sie zugleich mit h unendlich abnimmt; und ferner hat nach (2) die Grösse φ in der Gleichung

---

[1]) Dass es differentiirbare Functionen giebt, lässt sich a priori nicht beweisen, obgleich die nicht differentiirbaren Functionen zu den Ausnahmen gehören. — Beispielsweise ist die Function $f(x) = x^2$ an jeder Stelle a differentiirbar, denn es ergiebt sich:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a,$$

$$f'(a) = 2a.$$

$$\frac{f(a)-f(a-h)}{a-(a-h)}=f'(a-h)+\varphi$$

dieselbe Eigenschaft. Addirt man diese beiden Gleichungen zu einander, indem man gleichzeitig den Bruch auf der linken Seite der letzteren mit (— 1) erweitert, so erhält man:

$$\frac{f(a-h)-f(a)}{(a-h)-a}=f'(a)+\varepsilon+\varphi;$$

und hieraus folgt:

$$\lim_{h=0}\cdot\frac{f(a-h)-f(a)}{(a-h)-a}=f'(a).$$

Die linke Seite der letzten Relation ist aber die Derivirte von $f(x)$ an der Stelle $x=a$ nach der Richtung der abnehmenden x. Daher trifft unser Satz zu.

Zusatz.

In dem Bereiche, in welchem $f'(x)$ stetig ist, braucht man die Differentiationsrichtung nicht anzugeben.

Lehrsatz II.

Von einer Stelle $x=a$ aus, an welcher die Derivirte $f'(x)$ **positiv** ist, nimmt die Function $f(x)$ gleichzeitig mit x ab und zu; dagegen ändert sich $f(x)$ im entgegengesetzten Sinne, wie x, sobald $f'(x)$ einen **negativen** Werth hat.

Beweis. Multiplicirt man die Gl. (2) mit (x—a), so erhält man:

$$f(x)-f(a)=(x-a)\cdot[f'(a)+\varphi],$$

wo φ eine Grösse bedeutet, welche desto genauer $=0$ wird, je kleiner man die Differenz $(x-a)$ annimmt; und $f'(a)$ ist der Voraussetzung nach von Null verschieden. Bei einem hinreichend kleinen Werthe von $(x-a)$ hat daher die rechte Seite dieser Gleichung dasselbe Vorzeichen, wie das Product

$$(x-a)\cdot f'(a).$$

Hieraus folgt aber, was behauptet wird, nämlich: dass

für $f'(a)>0$ die Differenzen $(x-a)$ und $[f(x)-f(a)]$ gleiche Vorzeichen,

für $f'(a)<0$ die Differenzen $(x-a)$ und $[f(x)-f(a)]$ ungleiche Vorzeichen haben.

Zusatz.

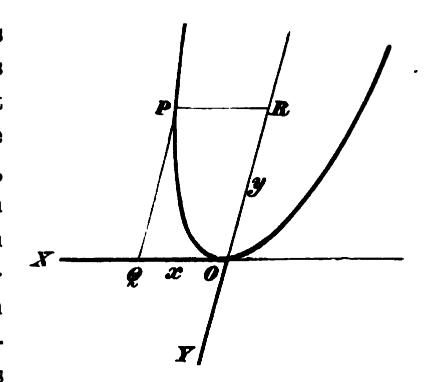
Geht die Derivirte $f'(x)$ an der Stelle $x = a$ bei wachsendem x von positiven zu negativen Werthen über, so wächst die Function $f(x)$ bis zum Werthe $f(a)$ und nimmt dann ab — „die Function $f(x)$ besitzt einen **Maximalwerth** $f(a)$." Geht die Derivirte aber von negativen zu positiven Werthen über, so nimmt die Function $f(x)$ bis zum Werthe $f(a)$ ab und dann zu — „sie besitzt einen **Minimalwerth** $f(a)$." [1])

Beispiel I. Ist $y = f(x) = x^2$, so hat man:

$$f(x) - f(a) = x^2 - a^2, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = x + a,$$

$$f'(a) = \lim_{x = a} \cdot (x + a) = 2a.$$

Da demnach $f'(a)$ für jedes negative a negativ und für jedes positive a positiv ist, so nimmt die Function $f(x)$ für wachsende x ab, so lange das x negativ ist, nachher aber zu. — Die Function besitzt an der Stelle $x = 0$ einen Minimalwerth. — Diese Veränderung der Function tritt auch anschaulich in der nebenstehenden Figur hervor, wo x als Abscisse und $f(x) = y$ als Ordinate eines Punktes P gewählt sind, welcher bei der Veränderung von x die verzeichnete Curve (eine Parabel) beschreibt.



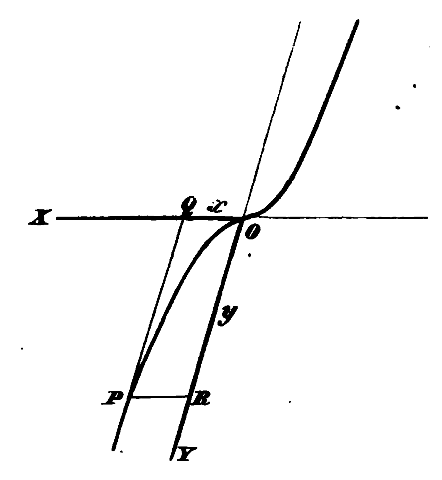
Beispiel II. Ist $y = f(x) = x^3$, so hat man:

$$f(x) - f(a) = x^3 - a^3, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = x^2 + ax + a^2$$

$$f'(a) = \lim_{x = a} \cdot (x^2 + ax + a^2) = 3a^2.$$

---

[1]) In Cap. XVII werden die Maxima und Minima einer eingehenderen Betrachtung unterzogen werden, theils um dem Kriterium, dass $f'(x)$ sein Vorzeichen ändern müsse, eine in manchen Fällen handlichere Gestalt zu geben, theils um weitere Folgerungen aus den Maximis und Minimis zu ziehen.



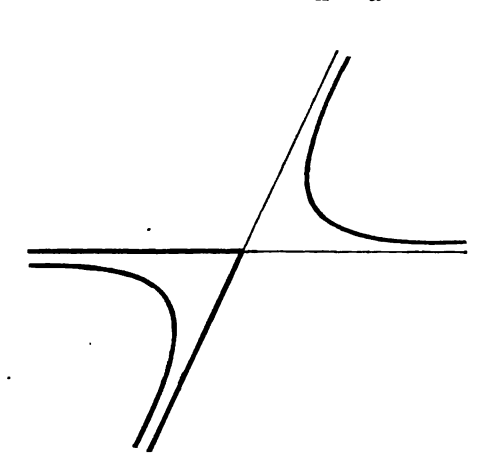
Da hier $f'(a)$ für jeden positiven oder negativen Werth von a positiv ist, so wächst $f(x)$ überall, wo x wächst. Die nebenstehende Figur veranschaulicht geometrisch den Verlauf der Function

$$y = f(x) = x^3.$$

Beispiel III. Ist $y = f(x) = \frac{1}{x}$, so hat man:

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{a - x}{a x}, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{1}{a x};$$

$$f'(a) = \lim_{x = a} \cdot \left(-\frac{1}{a x}\right) = -\frac{1}{a^2}.$$



Da hier $f'(a)$ für jedes positive oder negative a negativ ist, so nimmt $f'(x)$ bei wachsendem x überall ab. Für $x = 0$ hat weder $f(x)$ noch $f'(x)$ einen Sinn, da ihre Ausdrücke die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, welche im Widerspruch zum Divisionsbegriffe steht. In der Nachbarschaft von $x = 0$ zeigt $f(x)$ das eigenthümliche Verhalten, für ein unendlich kleines positives oder negatives x positiv oder negativ unendlich gross zu sein. Im Gegensatz dazu

ist dieselbe Function $f(x)$ für ein unendlich grosses positives oder negatives x unendlich klein mit dem entsprechenden Vorzeichen. $f'(x)$ ist zugleich mit $f(x)$ unendlich gross und unendlich klein, aber — wie schon gesagt — stets negativ.

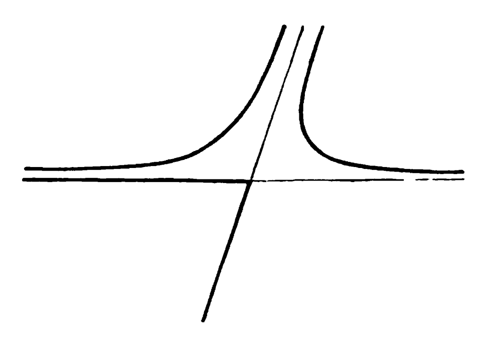
Die das Verhalten von $f(x)$ veranschaulichende Curve — eine Hyperbel — zerfällt in zwei völlig von einander getrennte Äste, welche im Coordinatenwinkel und in seinem Scheitelwinkel liegen und sich desto enger an die Axen anschmiegen, je grösser die Entfernung vom Nullpunkte der Coordinaten wird: die Coordinatenaxen sind „Asymptoten" der Hyperbel.

Beispiel IV. Ist $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$, so hat man:

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 x^2}, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{a + x}{a^2 x^2},$$

$$f'(a) = \lim_{x=a} \cdot \left\{-\frac{a + x}{a^2 x^2}\right\} = -\frac{2}{a^3}.$$

Daher nimmt $f(x)$ bei wachsendem x zu oder ab, je nachdem x negativ oder positiv ist. Die Stetigkeit von $f(x)$ und von $f'(x)$ wird unterbrochen an der Stelle $x = 0$, wo beide Functionen keinen Sinn haben. Das geometrische Bild der Function ist eine aus zwei völlig von einander getrennten Zweigen bestehende Curve. Die Zweige liegen beide auf der positiven Seite der Abscissenaxe und haben die Coordinatenaxe zu Asymptoten.



§ 4.

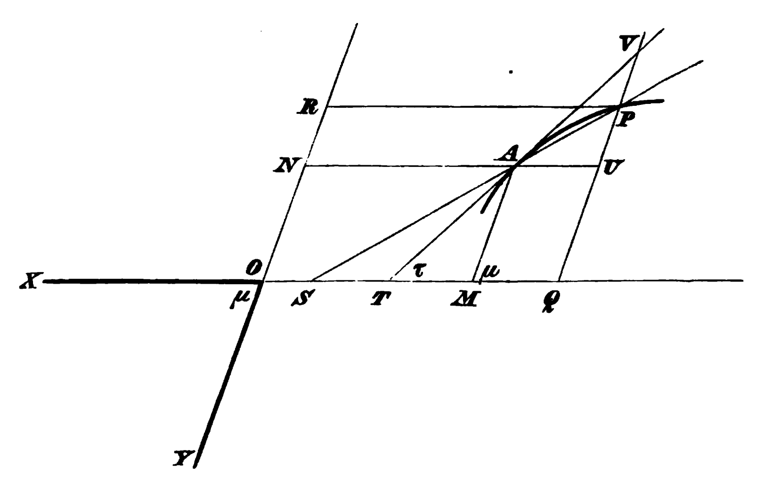
Geometrische Veranschaulichung der Derivirten.

Bekanntlich nennt man eine Grade, welche zwei Punkte mit einer Curve gemein hat, eine Secante der letzteren. Nimmt man ferner den einen dieser Punkte als festen Drehungspunkt der Secante an und dreht die Secante so, dass der zweite Schnitt-

punkt sich dem ersten unendlich nähert, so nähert die Secante sich hierbei häufig ebenfalls einer Grenzlage, welche dann die Berührende oder Tangente der Curve in dem fraglichen Punkt heisst.

Diesem Vorgange wollen wir analytisch folgen.

Zu dem Zweck sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve, d. h. die Curve sei der geometrische Ort aller Punkte, welche man erhalten kann, wenn man einen willkürlichen Werth von x als Abscisse und dazu als Ordinate den aus der Gleichung $y = f(x)$ berechneten Werth von y nimmt.



Wählt man nun auf der Curve einen Punkt P, der die Abscisse $OQ = x$ und die Ordinate $OR = y$ hat, und einen Punkt A, welcher die Abscisse $OM = a$ und die Ordinate $ON = b$ hat, so ist:

$$y = f(x), \quad b = f(a),$$

mithin:

$$y - b = f(x) - f(a)$$

oder in erkennbarer Weise an der Figur:

$$UP = f(x) - f(a)$$

Dividirt man diese Gleichung durch die folgende

$$AU = x - a,$$

so ergiebt sich:

$$\frac{UP}{AU} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

oder, weil $\triangle AUP \sim \triangle SMA$ ist:

$$\frac{MA}{SM} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Wenn nun die Secante PAS sich einer Grenzlage AT nähert, indem ihr einer Schnittpunkt A fest gehalten und der zweite P dem ersteren unendlich genähert wird, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\frac{MA}{TM} = f'(a).$$

Auch folgt umgekehrt, dass der Punkt S sich einem festen Punkt T, also die bewegliche Grade AS sich einer festen Lage AT als ihrer Grenzlage nähern muss, wenn es eine bestimmte Derivirte

$$\lim_{x = a} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

giebt.

Nimmt man noch hinzu, dass $\triangle TMA \sim \triangle AUV$, und dass deshalb

$$\frac{MA}{TM} = \frac{UV}{AU}$$

ist, so lässt sich das Resultat dieser Betrachtung zusammenfassen, wie folgt:

Lehrsatz.

Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve, so hat die Curve an der Stelle (im Punkte) $x = a$ eine Tangente, wenn $f'(a)$ einen bestimmten Werth besitzt, und umgekehrt. Die Anzahl der Tangenten in dem Punkte $x = a$ ist der Anzahl der Werthe von $f'(a)$ gleich. Und es misst $f'(a)$ das Verhältniss, in welchem der Zuwachs der Ordinate eines auf der Tangente gleitenden Punktes zum Zuwachs seiner Abscisse steht.

§ 5.

Mechanische Veranschaulichung der Derivirten.

Versteht man unter x die Zeitabscisse eines beweglichen Punktes, d. h. die positive oder negative Anzahl von Zeiteinheiten, welche man zu der bis zum Anfang der Zeitrechnung verflossenen

Zeit addiren muss, um zu dem Zeitmomente zu gelangen, den wir bei der Bewegung des Punktes betrachten, unter y aber die Wegabscisse, welche seinen Ort für jenen Zeitmoment bestimmt; so wird durch die Gleichung $y = f(x)$ die Bewegung des Punktes vollständig beschrieben, vorausgesetzt, dass man die Gestalt der Bahn des Punktes kennt.

Geht die Bewegung des Punktes gleichförmig vor sich, d. h. durchläuft er in gleichen Zeiten gleich lange Wege, so betrachtet man bekanntlich als das Maass seiner Geschwindigkeit die Weglänge, welche er in der Zeiteinheit zurücklegt, also die Strecke

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Geht aber die Bewegung ungleichförmig von statten, so drückt dieser Bruch nur die sogenannte „mittlere" Geschwindigkeit aus, d. h. diejenige, welche ein gleichförmig bewegter Punkt besitzen müsste, um während des Beobachtungsintervalls von $(x - a)$ Zeiteinheiten ebenfalls $[f(x) - f(a)]$ Längeneinheiten zu durchlaufen. Sein Werth wird bei verschieden grosser Annahme des Beobachtungsintervalls $(x - a)$ im Allgemeinen verschieden ausfallen und ist aus diesem Grunde nicht ohne Weiteres zum Maass einer in jedem Moment wechselnden Geschwindigkeit geeignet.

Da jedoch nach unsern mechanischen Anschauungen die Geschwindigkeiten sich nicht sprungweise ändern können, so müssen — falls eine Bewegung nach der Formel $y = f(x)$ überhaupt möglich ist — die nach der obigen Formel berechneten mittleren Geschwindigkeiten sich einem Grenzwerthe nähern, wenn die Länge des Beobachtungsintervalls $(x - a)$ unendlich abnimmt; und dieser Grenzwerth $f'(a)$ charakterisirt die „zur Zeit $x = a$ erlangte Geschwindigkeit" auf sichere Weise. — Resumiren wir!

Bewegt sich ein Punkt nach der Formel $y = f(x)$, in welcher die Zeitabscisse durch x, die Wegabscisse durch y ausgedrückt wird, so ist

$$v = f'(a) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

das Maass der **„zur Zeit $x = a$ erlangten" Geschwindigkeit** des Punktes. Und umgekehrt kann man in allen Intervallen, in denen $f'(x)$ stetig ist, die Veränderungen der

Function $y = f(x)$ durch die Bewegung eines Punktes dadurch veranschaulichen, dass man x als das Maass der Zeitabscisse, y als das Maass der Wegabscisse und $f'(x)$ als das Maass der grade erlangten Geschwindigkeit auffasst.

Beispiel. Ist $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$, so hat man:

$$f(x) - f(a) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a} = \frac{x - a}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}},$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}}; \quad v = f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}.$$

Da hier $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ generell stetig ist, so kann man sich die Veränderungen der Function $f(x)$ durch die Bewegung eines Punktes in einer Linie veranschaulichen, in welcher seine Wegabscisse etwa von links nach rechts wachsen möge. Dann befindet er sich nach der für y gegebenen Formel ($y = \sqrt[3]{x}$) zu einer hinreichend grossen Zeit vor dem Anfang der Zeitrechnung beliebig weit nach links von dem Nullpunkte 0 der Wegabscissenaxe, rückt dem Punkte 0 im Verlauf der Zeit immer näher und entfernt sich nach Anfang der Zeitrechnung immer weiter nach rechts von 0, und zwar ebenfalls beliebig weit. Nach der Formel für v findet fortwährend eine positive Zunahme der Wegabscisse statt, also ununterbrochen eine Bewegung von links nach rechts (was sich schon aus der Formel für y klar ergab); wir ersehen aber ferner aus der Formel für v, dass die absolute Geschwindigkeit des Punktes desto geringer ist, je mehr der zeitliche Abstand vom Anfange der Zeitrechnung beträgt, und dass die Geschwindigkeit jedes in der Anschauung fixirbare Maass übersteigt, wenn man es versucht, die Bewegung durch den Anfangsmoment der Zeitrechnung hindurch zu verfolgen. In diesem Zeitmoment selbst ist es widersinnig, von einer Geschwindigkeit reden zu wollen, da der Ausdruck $v = \frac{1}{0}$ eben keinen Sinn hat.

Daher ist die Veranschaulichung der Veränderungen der Function $f(x) = \sqrt[3]{x}$ durch die Bewegung eines Punktes nur in

bedingter Weise möglich, nämlich mit der unumgänglichen Einschränkung, dass das positive und das negative Gebiet der x einzeln für sich betrachtet werden.

Die im vorigen § besprochene rein geometrische Veranschaulichung leistet in diesem Falle mehr.

§ 6.

Aufgabe und Methode der Differentialrechnung.

Unter **Differentialrechnung** versteht man den Inbegriff aller Lehren über die Derivirten der Functionen.

Ihr Gebiet ist demnach wegen der unbeschränkten Mannichfaltigkeit der möglichen Functionen ein unbegrenztes. Die Auswahl der zu betretenden Theile desselben richtet sich zweckmässiger Weise nach der Erfahrung über ihre Fruchtbarkeit.

Uebrigens sind die nächsten Schritte durch den Begriff der Derivirten und durch die Staffel der Rechnungsarten vorgezeichnet, nämlich:

> Man muss es sich angelegen sein lassen, möglichst die Derivirten der sogenannten „**Elementarfunctionen**“ zu bestimmen — d. i. derjenigen Functionen, durch welche die gebräuchlichen sieben Rechnungsarten charakterisirt werden — und nach Regeln suchen, wie sich die Derivirten der zusammengesetzten Functionen etwa auf jene zurückführen.

Nun ist es ein grosser Gewinn für die Differentialrechnung, dass die zuletzt gestellte Aufgabe unmittelbar vom Begriff der Derivirten aus — ohne Rücksicht auf besondere Eigenschaften der Functionen — sich in einer Form lösen lässt, welche schon bei der Ableitung der Derivirten der einfachsten Elementarfunctionen wesentliche Dienste zu leisten vermag.

Wir wollen deshalb zunächst diese allgemeinsten Sätze der Differentialrechnung darstellen.

Capitel III.

Die Fundamentalsätze der Differentialrechnung.

§ 7.

Die Rolle der Constanten.

Lehrsatz I.

Ist eine **Function** $y = f(x)$ von der Stelle $x = a$ aus in der Differentiationsrichtung innerhalb eines beliebig kleinen Intervalls **constant**, so besitzt ihre Derivirte den Werth Null:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = f'(a) = 0.$$

Beweis. Da $f(x)$ von $x = a$ aus sich nicht ändert, so ist für jedes beliebig wenig von a unterschiedene x:

$$f(x) - f(a) = 0, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0;$$

also auch:

$$f'(a) = \lim_{x=a} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0.$$

Lehrsatz II.

Besitzt eine zu differentiirende Summe einen **constanten Summanden**, so darf man diesen als nicht vorhanden ansehn:

$$\frac{d[c + f(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Beweis. Man hat für jedes von a verschiedene x:

$$\frac{[c + f(x)] - [c + f(a)]}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Hieraus folgt durch den Uebergang zur Grenze, was behauptet wird.

Lehrsatz III.

Besitzt ein zu differentiirendes Product einen **constanten Factor**, so tritt dieser ungeändert vor die Derivirte seines andern Factors:

$$\frac{d[c \cdot f(x)]}{dx} = c \cdot \frac{d f(x)}{dx}.$$

Beweis. Es ist identisch

$$\frac{[c \cdot f(x)] - [c \cdot f(a)]}{x - a} = c \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Durch den Uebergang zur Grenze folgt hieraus die behauptete Gleichung.

§ 8.

Differentiation vermittelst einer Mittelfunction.

Lehrsatz.

Ist y eine **Function einer Function** von x, nämlich:

(1) $$\begin{cases} y = f(u), \quad u = \varphi(x); \\ v = f[\varphi(x)], \end{cases}$$

so folgt die Gleichung

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

bei jedem Werthe von x, für welchen die Derivirten $\varphi'(x)$ und $f'(u)$ völlig bestimmte Werthe erhalten.

Beweis. Bezeichnet man, indem unter a ein bestimmter Werth von x verstanden wird:

$$x - a = \Delta x, \quad \varphi(x) - \varphi(a) = \Delta u, \quad f[\varphi(x)] - f[\varphi(a)] = \Delta y$$

— was mit der Voraussetzung durchaus übereinstimmt — so kann man zunächst die identische Gleichung aufstellen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Aus dieser ergiebt sich aber sofort die Gleichung (2) durch die Grenzannäherung von x an a, weil wir vorausgesetzt haben, dass

$$\lim_{\Delta x = 0} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x) \text{ und } \lim_{\Delta u = 0} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$$

völlig bestimmte Zahlen sind.

Zusatz.

Man darf Derivirte $\frac{dy}{du}$, $\frac{dv}{dx}$ bei ihrer Multiplication und Division **formal so behandeln**, als wären sie Brüche,

und als würden durch die Symbole dx, dy, du, dv Grössen bezeichnet. In Sonderheit ist:

(3) $$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

(4) $$\frac{dx}{dx} = +1,$$

(5) $$\frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dx} = +1, \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dx}} = \left\{\frac{du}{dx}\right\}^{-1}.$$

Beweis. Die Formel (3), welche die Umkehrung von (2) enthält, folgt aus derselben identischen Gleichung, wie jene. Die Formel (4) ergiebt sich unmittelbar aus der identischen Gleichung

$$\frac{\Delta x}{\Delta x} = +1.$$

Die Formel (5) enthält denjenigen speciellen Fall von (3), in welchem $y = x$ angenommen wird.

Anmerkung.

Die in unserm Zusatz angemerkte formale Analogie einer Derivirten, wenn man das Symbol $\frac{dy}{dx}$ anwendet, mit einem Bruch verleitet Anfänger leicht zu der irrthümlichen Annahme, die Derivirte $f'(x)$ von $f(x)$ müsse doch wohl ein wirklicher Bruch sein, und hat schon manchen sonst klaren Kopf zu mystischen metaphysischen Speculationen über Unendlichkleines als ein so kleines Quantum verführt, welches zu begreifen der menschliche Intellect nicht hinreiche, u. dgl.

Deshalb mag der Hinweis darauf nicht überflüssig sein, dass ganz analoge formale Transformationen in der adoptirten Zeichensprache der Analysis mehrfach vorkommen und als mnemotechnische Hülfsmittel gerne benutzt werden, ohne damit Jemandem einreden zu wollen, dass die formale Analogie auf begrifflicher Identität beruhe.

Z. B. gelten für Logarithmen die mit (3), (4) und (5) durchaus correspondirenden Sätze:

$$\frac{l\,y}{u} \cdot \frac{l\,u}{x} = \frac{l\,y}{x}, \quad \frac{l\,x}{x} = 1, \quad \frac{l\,x}{u} = \left\{\frac{l\,u}{x}\right\}^{-1}.$$

Die logische Berechtigung, $\frac{dy}{dx}$ für den Quotienten zweier Zahlen

dy und dx auszugeben, steht durchaus nicht höher als diejenige, dem Logarithmus von y nach der Basis x die Bedeutung eines Quotienten zwischen y und x beizulegen. — Dass $\frac{ly}{x} = \frac{ly}{lx}$ ist, thut bei dieser Frage nichts zur Sache, sondern bietet nur ein neues acceptables mnemotechnisches Hülfsmittel in Absicht auf die Gesetze des Logarithmirens.

§ 9.

Die partielle Differentiation (Differentiation vermittelst mehrerer Mittelfunctionen).

Definition.

Die Derivirte einer Function nach einer Variabeln, während alle anders bezeichneten Variabeln als Constante behandelt werden, heisst die **partielle Derivirte der Function nach jener Variabeln.**

Dass y eine Function mehrerer Variabeln oder Argumente u, v, w, ... sei, schreibt man:

$$y = f(u, v, w, \dots).$$

Die partiellen Derivirten bezeichnet man durch die synonymen Symbole:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f(u, v, w, \dots)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} = f'_u(u, v, w, \dots) = f'_u$$

und analog für die übrigen Variabeln.

Ein als constant behandeltes Argument nennt man auch einen **Parameter** der Function.

Lehrsatz.

Sind sowohl die Functionen u, v, w, ..., z von x als auch $y = f(u, v, w, \dots, z)$ nebst ihren Derivirten an der Stelle $x = a$ bestimmt und stetig, so gilt für $x = a$ jederzeit die Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} + \dots + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$$

— wenigstens, so lange man es mit einer endlichen Anzahl von Mittelfunctionen u, v, w, ..., z zu thun hat.

Beweis. Betrachten wir zunächst eine Function $y = f(u, v)$ von zwei Variabeln, welche wieder Functionen von x sind, und bezeichnen durch Δy, Δu, Δv die Zuwachse, welche y, u, v erleiden, sobald x um Δx wächst, so ist identisch:

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$$

$$= [f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v] + [f(u, v + \Delta v) - f(u, v],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$+ \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Nähert sich nun Δx dem Grenzwerthe Null, so thun dies — der Voraussetzung gemäss — auch Δy, Δu, Δv, und die letzte Gleichung geht, wenn wir — wie es die Absicht ist — zunächst im ersten Summanden der rechten Seite auf die Veränderlichkeit von v keine Rücksicht nehmen, sondern uns erst hinterher auf dieselbe besinnen wollen, über in:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta v = 0} \cdot \frac{\partial f(u, v + \Delta v)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Dass dies unter allen Umständen mit demjenigen Resultat übereinstimmt, welches bei dem thatsächlich gleichzeitigen Verschwinden von Δu und Δv erhalten wird, lässt sich nur dann behaupten, wenn die partielle Derivirte $\frac{\partial f(u, v + \Delta v)}{\partial u}$ sich einem und demselben bestimmten Grenzwerthe $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$ nähert, nach welchem Gesetze man auch Δv sich der Null nähern lassen mag, d. h. m. a. W., wenn die Function $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$ für die Variable v bei dem fraglichen Werthe von v stetig und bestimmt ist.[1])

Setzt man dies aber — wie es unser Lehrsatz thut — voraus, so geht die letzte Gleichung über in:

---

[1]) Es dürfte also beispielsweise nicht $\frac{\partial f u, v + \Delta v}{\partial u} = \left\{3 + 10^{\frac{1}{\Delta v}}\right\}^{-1}$ sein. (Vgl. § 1.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dv};$$

was zu beweisen wir uns zunächst vorgenommen hatten.

Diese Gleichung kann man wegen des im vorigen § bewiesenen Satzes auch so schreiben, wobei die Bedeutung der Zeichen leicht erkannt wird:

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{v = \text{Const.}} + \left[\frac{dy}{dx}\right]_{u = \text{Const.}}.$$

Wollen wir ferner in y nicht bloss zwei, sondern drei Mittelfunctionen u, v, w unterscheiden, so ist dies nicht eine wesentliche Änderung des Gesichtspunktes. Denn da v und w als Functionen von x durch Gleichungen $v = \varphi(x)$, $w = \psi(x)$ bestimmt sind, aus welchen man x eliminirt und daher $w = \chi(v)$ als Function von v dargestellt denken kann, und da dies zur Folge hat, dass w gleichzeitig mit v als constant behandelt wird, so folgt aus der letzten Gleichung unmittelbar:

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{v = \text{Const.},\, w = \text{Const.}} + \left[\frac{dy}{dx}\right]_{u = \text{Const.}}$$

und:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{u = \text{Const.}}$$

$$= \left[\frac{dy}{dx}\right]_{u = \text{Const.},\, w = \text{Const.}} + \left[\frac{dy}{dx}\right]_{u = \text{Const.},\, v = \text{Const.}};$$

mithin durch Substitution:

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{v = \text{Const.},\, w = \text{Const.}} + \left[\frac{dy}{dx}\right]_{u = \text{Const.},\, w = \text{Const.}}$$
$$+ \left[\frac{dy}{dx}\right]_{u = \text{Const.},\, v = \text{Const.}};$$

oder, wenn man jedes Mal die allein als variabel angesehene Mittelfunction anstatt der als constant behandelten notirt:

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{u\ \text{variabel}} + \left[\frac{dy}{dx}\right]_{v\ \text{variabel}} + \left[\frac{dy}{dx}\right]_{w\ \text{variabel}};$$

d. i. nach § 8:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}.$$

Unterscheidet man eine vierte Mittelfunction, so kann man diese zunächst mit w verknüpfen, wie zuvor w mit v; u. s. f.

Demnach ist bei einer beliebigen Anzahl von Mittelfunctionen:

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_u + \left[\frac{dy}{dx}\right]_v + \left[\frac{dy}{dx}\right]_w + \cdots + \left[\frac{dy}{dx}\right]_z,$$

wo die Indices u, v, w, . . . , z an den Differentiationszeichen anzeigen, welche Mittelfunction als allein veränderlich angesehen ist.

Diese Gleichung (2) ist aber nach § 8 identisch mit der Gleichung (1), welche wir beweisen wollten.

Zusatz.

Hat man bei der Differentiation einen variabeln Bestandtheil der Function übersehn, so kann man den Fehler dadurch ausgleichen, dass man zu der erhaltenen Derivirten diejenige addirt, welche gewonnen wird, wenn man bloss die übersehene Variable als variabel betrachtet. — Wörtliche Uebersetzung der Formel (2).

Anmerkung.

Die im Zusatz zum vorigen § angezeigte formale Analogie der Derivirten mit einem Bruch beutet man in der Weise aus, dass man anstatt unserer Gl. (1) auch schreibt:

$$(3) \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot dw + \cdots + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot dz,$$

also es dem Leser überlässt, den „Nenner" dx zu den „Zählern" dy, du, dv, dw, . . . , dz hinzuzudenken oder, wie man sich ebenfalls ausdrückt: „die Gleichung mit dx zu dividiren."

Man ist hierzu um so mehr berechtigt, als die Gleichung richtig bleibt, auch wenn man hinterher anstatt x eine andere unabhängige Variable t wählt, von welcher x eine Function ist, wenn man also hinterher mit dt dividirt anstatt mit dx; denn das Resultat

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dt} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

erhält man nach dem vorigen §, wenn man die Gl. (1) mit $\frac{dx}{dt}$ multiplicirt.

Ein wenig hiervon verschieden ist eine andere Auffassung der Gleichung (3), deren Berechtigung aus folgender Erwägung erhellen wird.

Nach dem Begriff der Derivirten ist die Grösse φ in der Gleichung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \varphi$$

so beschaffen, dass sie sich gleichzeitig mit Δx dem Grenzwerthe Null nähert; und ganz analoge Beziehungen existiren zwischen den übrigen Derivirten $\frac{du}{dx}, \ldots, \frac{dz}{dx}$ und den entsprechenden Differenzenverhältnissen $\frac{\Delta u}{\Delta x}, \ldots, \frac{\Delta z}{\Delta x}$. Daher folgt aus (1):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varepsilon + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

$$(4) \quad \Delta y = \varepsilon \cdot \Delta x + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \Delta v + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \Delta w + \cdots + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \Delta z,$$

wo ε eine Zahl bedeutet (die Summe der verschiedenen φ), welche sich gleichzeitig mit Δx dem Grenzwerthe Null nähert.[1])

Man kann daher die Gleichung (3) auch als Näherungsformel für die correcte Gleichung (4) auffassen, mit welcher sie in Absicht auf die Herleitung der Gl. (1) von gleicher Wirksamkeit ist, falls man hierbei in (3) unter dx, dy, du, ..., dz die einander bedingenden Zuwachse Δx, Δy, Δu, ..., Δz versteht, welche nach der Division der Gleichung mit irgend einem von ihnen in der Weise unendlich abnehmen sollen, wie es durch die Abhängigkeit der Functionen y, u, v, ..., z von x gefordert wird.

Definition.

Deutet man dadurch, dass man den Zuwachs einer Veränderlichen ω durch $d\omega$ anstatt durch $\Delta\omega$ bezeichnet von vorne herein die Absicht an, diesen Zuwachs später dem Grenzwerthe Null zu nähern, so nennt man das Symbol $d\omega$ das **Differential** von ω.

---

[1]) Lässt man die Anzahl der Mittelfunctionen u, v, w, ..., z unendlich wachsen, so kann ε einen andern Grenzwerth haben.

Capitel IV.

Die Differentiation der algebraisch zusammengesetzten Functionen.

§ 10.

Begriff der algebraisch zusammengesetzten Functionen.

Definition.

Unter einer **algebraisch zusammengesetzten** Function versteht man eine solche, welche nur Summen und Differenzen, Producte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln ihrer Bestandtheile in irgend welcher Combination enthält.

Ist die Function auf diese Weise direct aus der Variabeln gebildet, so heisst sie eine **algebraische** Function derselben.

Demnach sind beispielsweise $\{a + \sqrt[5]{b - x^3}\}^2$, $\frac{2^u}{x} + \sqrt[3]{x^2} \cdot \sin u$ algebraische Functionen von x. Sieht man in der letzteren aber u als Variable an, so hat man nicht eine algebraische, sondern nur eine aus den Bestandtheilen 2^u und $\sin u$ algebraisch zusammengesetzte Function vor sich.

Die algebraischen Functionen umfassen also alle Grössenformen, welche durch die sieben Rechnungsarten definirt werden, nebst allen möglichen Combinationen derselben, nur dass die variabeln Exponenten (und Logarithmen) ausgeschlossen sind.

§ 11.

Differentiation einer Summe.

Lehrsatz.

Die Derivirte einer **Summe** von endlicher Summandenzahl[1]) ist gleich der Summe der Derivirten der einzelnen Summanden:

---

[1]) Summen und Producte unendlicher Reihen gestatten nicht immer dieselbe Behandlung, wie die Summen und Producte endlicher Reihen.

$$\frac{d(u+v+w+\cdots+z)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}+\cdots+\frac{dz}{dx}.$$

Beweis. Dies folgt aus § 9 unmittelbar nach der dortigen Formel (2), wenn man zunächst immer nur einen von den Summanden u, v, w, ..., z als variabel ansieht und den Satz § 7, II benutzt.

Anmerkung.

Unser Satz schliesst denjenigen über die Differentiation einer Differenz ein, wenn man auf § 7, III Rücksicht nimmt; denn es ergiebt sich für einen negativen Summanden (— t):

$$\frac{d(-t)}{dx}=\frac{d[(-1)\cdot t]}{dx}=(-1)\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{dt}{dx}.$$

§ 12.

Differentiation eines Products.

Lehrsatz.

Die Derivirte eines **Products** von endlicher Factorenzahl[1]) ist gleich der Summe aller Producte, welche aus ihm entstehn, wenn man je einen Factor durch seine Derivirte ersetzt:

$$\frac{d(u\cdot v\cdot w\cdots t\cdot z)}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot v\cdot w\cdots z+u\cdot\frac{dv}{dx}\cdot w\cdots z+\cdots+u\cdot v\cdots t\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$=(u\cdot v\cdots z)\cdot\left\{\frac{\frac{du}{dx}}{u}+\frac{\frac{dv}{dx}}{v}+\cdots+\frac{\frac{dt}{dx}}{t}+\frac{\frac{dz}{dx}}{z}\right\}.$$

Beweis. Es folgt dies unmittelbar aus § 9, (2) und § 7, III, wenn man zunächst immer nur einen der Factoren u, v, w, ..., t, z als variabel ansieht.

§ 13.

Differentiation eines Bruchs.

Lehrsatz.

Die Derivirte eines **Bruchs** ist das Resultat der Division mit dem Quadrate des Nenners in diejenige Differenz, welche man erhält, wenn man das Product aus dem

[1]) s. Note auf S. 29.

Nenner und der Derivirten des Zählers um dasjenige aus dem Zähler und der Derivirten des Nenners vermindert:

(1) $$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{du} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{u}{v} \cdot \left\{ \frac{\frac{du}{dx}}{u} - \frac{\frac{dv}{dx}}{v} \right\}.$$

Beweis. Differentiirt man die identische Gleichung

$$\left(\frac{u}{v}\right) \cdot v = u$$

nach der im vorigen § erhaltenen Anweisung, so folgt:

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} \cdot v + \frac{u}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx};$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich durch ihre Auflösung nach der Unbekannten $\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}$, was behauptet wird.

Zusatz.

Man kann den zu differentiirenden Bruch auch als Product aus dem Zähler und dem reciproken Werth des Nenners behandeln:

(2) $$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{d\left(u \cdot \frac{1}{v}\right)}{dx} = \frac{1}{v} \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{dx},$$

indem man dabei auf die Formel

(3) $$\frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{dx} = -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Rücksicht nimmt.

— Die Formel (3) erhält man aus (1) sofort, wenn man dort $u = 1$, $\frac{du}{dx} = \frac{d1}{dx} = 0$ einsetzt. — Eben so leicht ergiebt sie sich durch Vergleichung der rechten Seiten von (1) und (2) bei beliebigem u.

§ 14.

Differentiation einer Potenz nach ihrem Grundfactor.

Lehrsatz.

Die Derivirte einer **Potenz** mit beliebigem Exponenten[1]) **nach deren Grundfactor** ist gleich dem Producte aus dem Exponenten und der um einen Grad erniedrigten Potenz:

$$(1) \qquad \frac{d\,(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1} = x^n \cdot \frac{n}{x}.$$

Beweis. Wir müssen bei der Deduction die verschiedenen Bedeutungen von x^n je nach der Beschaffenheit des Exponenten n unterscheiden.

I. Es sei n eine ganze positive Zahl. Da dann x^n das aus n Factoren bestehende Product

$$y = x \cdot x \cdots x$$

bedeutet, so erhält man nach § 12:

$$\frac{d\,(x^n)}{dx} = x^n \cdot \left\{ \frac{\frac{dx}{dx}}{x} + \frac{\frac{dx}{dx}}{x} + \cdots + \frac{\frac{dx}{dx}}{x} \right\},$$

wo in der Klammer n Summanden stehn, welche wegen des aus § 8, (4) bekannten Werthes $\frac{dx}{dx} = 1$ einzeln $= \frac{1}{x}$ sind. Daher hat die rechte Seite den Werth $x^n \cdot \frac{n}{x} = n x^{n-1}$; was zu beweisen war.[2])

II. Bedeutet n eine ganze negative Zahl, so ist $r = -n$ eine ganze positive Zahl und

$$x^n = \frac{1}{x^r}.$$

Nun folgt aus der Formel (3) des vorigen § für $v = x^r$:

---

[1]) Die Differentiation der Wurzeln nach deren Radicanden wird also miteinbegriffen.

[2]) Dasselbe Resultat erhält man durch eine kaum minder einfache Rechnung direct aus dem Begriff der Derivirten, da

$$\frac{d\,(x^n)}{dx} = \lim_{x_1 = x} \cdot \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = \lim_{x_1 = x} \cdot \left\{ x_1^{n-1} + x_1^{n-2} \cdot x^1 + x_1^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x_1^0 \cdot x^{n-1} \right\}$$
$$= n x^{n-1}$$

ist.

$$\frac{d(x^n)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x^r}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^{2r}} \cdot \frac{d(x^r)}{dx}$$

oder, nachdem der aus I bekannte Werth $\frac{d(x^r)}{dx} = r x^{r-1}$ substituirt ist:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = -\frac{1}{x^{2r}} \cdot r x^{r-1} = -r \cdot x^{-r-1} = +n \cdot x^{n-1}.$$

III. Bedeutet n eine gebrochene positive oder negative Zahl, so kann man

$$n = \frac{m}{r}$$

setzen, wo m und r ganze Zahlen sind, und dann, indem man vorläufig

$$y = x^n = x^{\frac{m}{r}}$$

einführt, die mit dieser Gleichung identische Gleichung

$$y^r = x^m$$

beiderseitig nach x differentiiren. Wendet man dabei links den in § 8 bewiesenen Satz

$$\frac{d(y^r)}{dx} = \frac{d(y^r)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

an und substituirt die aus I und II folgenden Ausdrücke

$$\frac{d(y^r)}{dy} = r y^{r-1} = r\left[x^{\frac{m}{r}}\right]^{r-1} = r x^{m-\frac{m}{r}},$$

$$\frac{d(x^m)}{dx} = m x^{m-1},$$

so erhält man:

$$r \cdot x^{m-\frac{m}{r}} \cdot \frac{dy}{dx} = m \cdot x^{m-1},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{r} \cdot x^{\frac{m}{r}-1} = n \cdot x^{n-1};$$

was wieder mit der zu beweisenden Relation (1) identisch ist.

IV. Bedeutet n eine irrationale Zahl, so ist der Beweis für die Gültigkeit der Formel (1) apagogisch zu führen.

Da

$$\frac{d(x^n)}{dx} = \lim_{x_1 = x} \cdot \frac{x_1^{\,n} - x^n}{x_1 - x}, \qquad \frac{x_1^{\,n} - x^n}{x_1 - x} = x^{n-1} \cdot \frac{\left(\frac{x_1}{x}\right)^n - 1}{\left(\frac{x_1}{x}\right) - 1}$$

ist, so liegt uns — indem wir der bequemeren Schreibweise wegen den Bruch $\frac{x_1}{x}$ durch ω bezeichnen — der Nachweis ob, dass auch bei sämmtlichen irrationalen Werthen von n

$$\lim_{\omega = 1} \cdot \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = n$$

wird, wie es bei allen rationalen Werthen von n nach I, II und III geschieht.

Zu dem Zwecke bezeichnen wir durch ε und η zwei positive Zahlen von solcher Beschaffenheit, dass $(n - \varepsilon)$ und $(n + \eta)$ rationale Werthe haben.

Mit Beziehung der unteren sowohl als der oberen Zeichen auf einander gilt die Scala:

$$\omega^{n-\varepsilon} \lessgtr \omega^n \lessgtr \omega^{n+\eta},$$

also auch die Scala:

$$\omega^{n-\varepsilon} - 1 \lessgtr \omega^n - 1 \lessgtr \omega^{n+\eta} - 1;$$

und aus der letzteren folgt:

$$\frac{\omega^{n-\varepsilon} - 1}{\omega - 1} < \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} < \frac{\omega^{n+\eta} - 1}{\omega - 1},$$

mithin, weil bei den rationalen Exponenten $(n - \varepsilon)$ und $(n + \eta)$ nach I, II und III

$$\lim_{\omega = 1} \cdot \frac{\omega^{n-\varepsilon} - 1}{\omega - 1} = n - \varepsilon, \qquad \lim_{\omega = 1} \cdot \frac{\omega^{n+\eta} - 1}{\omega - 1} = n + \eta$$

ist:

$$n - \varepsilon < \lim_{\omega = 1} \cdot \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} < n + \eta \cdot$$

Dies heisst aber, weil man beliebig kleine Zahlen ε und η angeben kann, für welche $(n - \varepsilon)$ und $(n + \eta)$ rational sind: „Man

schätzt den Grenzwerth von $\frac{\omega^n - 1}{\omega - 1}$ zu klein oder zu gross, je nachdem man ihn $< n$ oder $> n$ annimmt." Daher ist er $= n$; wie es unser Satz behauptet.

Zusatz.

Bei der Differentiation einer **Wurzel nach ihrem Radicanden** erhält man:

$$\frac{d(\sqrt[n]{x})}{dx} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

— Denn man braucht in (1) nur $\frac{1}{n}$ für n zu substituiren, um von der Potenz zur Wurzel zu gelangen (Fall III).

Anmerkung.

Wir haben in unserm Lehrsatz den Fall stillschweigend übergangen, dass $n = 0$ angenommen sei, weil x^0 constant $= 1$ ist, wie sich x auch ändern mag (nur dass 0^0 einen völlig willkürlichen Werth besitzt) und weil man aus diesem Grunde nicht leicht darauf verfallen wird, die Formel (1) für $n = 0$ anzuwenden.

Die Zulässigkeit der Anwendung der Formel (1) auf den Fall $n = 0$, sobald man die Stelle $x = 0$ vermeidet, steht übrigens ausser Zweifel; denn aus (1) ergiebt sich

$$\frac{d(x^0)}{dy} = \frac{0}{x},$$

was mit § 7, I übereinstimmt, wo $\frac{d1}{dx} = 0$ erhalten wurde.

Für $x = 0$ besitzt die Function x^0 keine bestimmte Derivirte; denn an dieser Stelle ist

$$\frac{\Delta(x^0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^0 - 0^0}{\Delta x} = \frac{1 - 0^0}{\Delta x},$$

wofür man bei jedem beliebig kleinen Δx eine völlig willkürliche Zahl setzen kann, so dass aus der Natur der Function selbst kein Grenzwerth folgt. — Nimmt man aber willkürlich $0^0 = 1$ an, so wird auch hier $\frac{d(x^0)}{dx} = 0$, und nimmt man 0^0 als eine von 1 verschie-

dene Constante an, so wächst $\frac{\Delta(x^0)}{\Delta x}$ unendlich bei der Annäherung von Δx an Null.

Endlich wollen wir noch darauf aufmerksam machen, dass man sich die Formel (3) des vorigen § bequem a posteriori als eine Combination von § 8, (1) und § 14, (1) merken kann, da diese Verbindung

$$\frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{dx}=\frac{d(v^{-1})}{dx}=\frac{d(v^{-1})}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=-1\cdot v^{-2}\cdot\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dv}{dx}$$

ergiebt.

§ 15.

Beispiele für die Differentiation algebraischer Functionen.

I. $$\frac{d\cdot(a+x)^n}{dx}=\frac{d\cdot(a+x)^n}{d\cdot(a+x)}\cdot\frac{d(a+x)}{dx}=n(a+x)^{n-1}\cdot(0+1)$$
$$=n(a+x)^{n-1}.$$

II. $$\frac{d\cdot(a-x)^n}{dx}=\frac{d\cdot(a-x)^n}{d\cdot(a-x)}\cdot\frac{d(a-x)}{dx}=n(a-x)^{n-1}\cdot(0-1)$$
$$=-n(a-x)^{n-1}.$$

III. $$\frac{d\cdot(a+bx^r)^n}{dx}=\frac{d\cdot(a+bx^r)^n}{d\cdot(a+bx^r)}\cdot\frac{d\cdot(a+bx^r)}{dx}$$
$$=n(a+bx^r)^{n-1}\cdot(0+brx^{r-1})=nrb(a+bx^r)^{n-1}x^{r-1}.$$

IV. $$\frac{d\cdot\frac{1+x}{1-x}}{dx}=\frac{(1-x)\cdot\frac{d(1+x)}{dx}-(1+x)\cdot\frac{d(1-x)}{dx}}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{(1-x)\cdot(+1)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}.$$

V. $$\frac{d\cdot\left\{a+b\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^r\right\}^n}{dx}$$
$$=\frac{d\cdot\left\{a+b\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^r\right\}^n}{d\cdot\left\{a+b\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^r\right\}}\cdot\frac{d\left\{a+b\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^r\right\}}{d\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\cdot\frac{d\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{dx}$$

$$= n\left\{a + b\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^r\right\}^{n-1}\cdot br\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{r-1}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2nrb(1+x)^{r-1}\cdot[a(1-x)^r + b(1+x)^r]^{n-1}}{(1-x)^{nr+1}}.$$

VI. $$\frac{d\cdot\frac{1}{a+bx}}{dx} = -\frac{b}{(a+bx)^2}.$$

VII. $$\frac{d\cdot\sqrt{a+bx}}{dx} = +\frac{b}{2\sqrt{a+bx}}.$$

VIII. $$\frac{d\cdot\sqrt{a+bx^n}}{dx} = +\frac{nbx^{n-1}}{2\sqrt{a+bx^n}}.$$

IX. $$\frac{d\cdot\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}}{dx} = \frac{a}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}.$$

X. $$\frac{d\cdot x\sqrt{a+bx}}{dx} = \frac{2a+3bx}{2\sqrt{a+bx}}.$$

XI. $$\frac{d\cdot\sqrt[n]{a+bx^n}}{dx} = \frac{bx^{n-1}}{\sqrt[n]{(a+bx^n)^{n-1}}}.$$

Capitel V.

Das Integral einer Function.

§ 16.

Begriff des Integrals.

In § 2 haben wir gesehn, dass zwischen einer differentiirbaren Function $f(x)$ und ihrer Derivirten $f'(x)$ die Gleichung

(1) $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \varphi,\quad f(x)-f(a) = (x-a)f'(a) + (x-a)\varphi$$

besteht, wo die Grösse φ der Bedingung

$$\lim_{x=a}\cdot\varphi = 0$$

genügt, und dass die Differentiirbarkeit von $f(x)$ an der Stelle $x = a$ besagen will: $f'(a)$ besitze einen völlig bestimmten Werth.

Wir wollen jetzt nachsehn, ob die Relation (1) geeignet ist, die Function $f(x)$ aus ihrer Derivirten $f'(x)$ zu reconstruiren, und eventuell welche Rechnungsoperation den Weg dazu anzeigt.

Zu dem Zweck sei

(2) $$a,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1},\ z$$

eine auf- oder absteigende Reihe von Werthen, welche für die Veränderliche x in $f'(x)$ nach und nach gesetzt werden. Dann hat man nach (1) die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(a) &= (x_1 - a)\, f'(a) + (x_1 - a)\,\varphi,\\
f(x_2) - f(x_1) &= (x_2 - x_1) f'(x_1) + (x_2 - x_1)\,\varphi_1,\\
f(x_3) - f(x_2) &= (x_3 - x_2) f'(x_2) + (x_3 - x_2)\,\varphi_2,\\
&\text{u. s. w.}\\
f(x_n) - f(x_{n-1}) &= (x_n - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1})\,\varphi_{n-1},\\
f(z) - f(x_n) &= (z - x_n) f'(x_n) + (z - x_n)\,\varphi_n,
\end{aligned}$$

durch deren Summation die folgende erhalten wird:

(3) $$\begin{aligned}
&f(z) - f(a)\\
&= (x_1 - a) f'(a) + (x_2 - x_1) f'(x_1) + (x_3 - x_2) f'(x_2) + \cdots + (z - x_n) f(x_n)\\
&+ (x_1 - a)\,\varphi \quad + (x_2 - x_1)\,\varphi_1 \quad + (x_3 - x_2)\,\varphi_2 \quad + \cdots + (z - x_n)\,\varphi_n.
\end{aligned}$$

Dies kann man auch schreiben:

(4) $$f(z) - f(a) = \sum_{x=a}^{x=x_n} f'(x)\,\Delta x + \sum_{x=a}^{x=x_n} \varphi \cdot \Delta x,$$

wo die Summenzeichen Σ mit ihren unten und oben stehenden Indices die Bedeutung haben, dass für x nach und nach alle Glieder der Reihe (2) mit Ausnahme des letzten, und für jedes zugehörige Δx der Rest gesetzt werden soll, welcher bei der Subtration des Gliedes vom folgenden übrig bleibt. Die φ sind die mit den Δx zugleich unendlich kleinen Grössen, welche die Gl. (1) unter der unumgänglichen Voraussetzung definirt, dass $f'(x)$ für jedes in der Reihe (2) enthaltene x einen bestimmten Werth hat.

Nun sei ferner Φ der grösste unter den absoluten Werthen der Reihe

$$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots,\ \varphi_{n-1},\ \varphi_n.$$

Dann ist, wie es am deutlichsten der Anblick der Gl. (3) zeigt:

$$\text{abs}\cdot\sum_{x=a}^{x=x_n}\varphi\cdot\Delta x < \Phi\cdot\text{abs}\cdot(z-a);$$

und dieser Ausdruck nähert sich zweifellos dem Grenzwerthe Null, wenn man die Anzahl n der zwischen a und z in der Reihe (2) interpolirten Glieder in solcher Weise unendlich wachsen lässt, dass zugleich die Differenzen Δx sämmtlich unendlich abnehmen. Daher liefert die Gl. (4) die Relation:

(5) $$f(z)-f(a)=\lim_{\Delta x=0}\cdot\sum_{x=a}^{x=x_n}f'(x)\,\Delta x\cdot$$

Hiermit ist, da wir bereits Functionen $f(x)$ kennen gelernt haben, welche den oben gestellten Anforderungen genügen, nicht nur für viele Fälle die Realität des Grenzwerthes solcher Summen dargethan, wie die rechte Seite der Gl. (5) ihn anspricht, sondern auch eine einfache Beziehung der Summanden zum Grenzwerthe dargestellt.

Für die rechte Seite der Gl. (5) bedient man sich nach dem Vorgange von Leibnitz einer einfacheren Bezeichnung, welche im Wesentlichen darauf hinauskommt, dass man anstatt des Summenzeichens Σ ein deformirtes S, nehmlich $\int$, schreibt und — wieder, wie bei der Bezeichnung der Derivirten (§ 2) — die ausführliche Angabe $\lim_{\Delta x=0}\cdot$ durch die Schreibweise d für Δ unter dem Summenzeichen vertreten sein lässt.

Definition.

Nähert sich eine Summe von der Form

$$(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+(x_3-x_2)f(x_2)+\cdots$$
$$\cdots+(x_n-x_{n-1})f(x_{n-1})+(z-x_n)f(x_n)=\sum_{x=a}^{x=x_n}f(x)\,\Delta x,$$

während die Anzahl der zwischen $x=a$ und $x=z$ interpolirten Werthe

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n$$

von x unendlich wächst, und die Grösse der sämmtlichen Differenzen

(x_1-a), (x_2-x_1), (x_3-x_2), $\ldots$, (x_n-x_{n-1}), $(z-x_n)$ unendlich abnimmt, einem von dem Gesetz der Interpolation unabhängigen bestimmten Grenzwerth, so nennt man diesen Grenzwerth das **Integral der Function** $f(x)$ **nach** x oder das **Integral des Differentials** $f(x)\,dx$ **zwischen den Grenzen** a **und** z und bezeichnet:

$$\lim_{\Delta x=0} \cdot \sum_{x=a}^{x=x_n} f(x)\,\Delta x = \int_a^z f(x)\,dx \cdot$$

Oben ist bewiesen der jetzt in folgender Weise zu formulirende

Lehrsatz.

Besitzen die Function $f(x)$ und deren Derivirte für jeden Werth der Veränderlichen x von $x=a$ bis $x=z$ einen völlig bestimmten Werth, so ist jederzeit:

$$f(z)-f(a)=\int_a^z f'(x)\,dx \cdot \tag{6}$$

Zusatz.

Gleiche Functionen haben gleiche Integrale.

§ 17.

Generelle Realität der Integrale.

Der im vorigen § gewonnene Lehrsatz spricht eine zwischen zwei als bekannt angesehenen Functionen $f(x)$ und $f'(x)$ bestehende Relation aus und hat im Wesentlichen nur die Bedeutung einer Transformation der Gl. (1) jenes § unter einer Reihe von Voraussetzungen über das Verhalten der Function $f(x)$, welche schliesslich in (6) als Integral erscheint.

Betrachtet man aber das Integral als eine vorerst noch unbekannte Function eines gegebenen Differentials — und darauf wird die Anwendung meistens hinauskommen — so entsteht die Aufgabe, allein aus den Eigenschaften des Differentials die Realität nebst den charakteristischen Eigenschaften des Integrals zu erkennen.

Wir werden sehn, dass die Lösung dieser Aufgabe mit verhältnissmässig einfachen Mitteln ziemlich vollkommen gelingt, und dass sie sogar die Aufstellung und sichere Behandlung von Functionen

im Gefolge hat, welche sich von den Elementarfunctionen (d. i. von den durch die sieben Rechnungsarten unmittelbar dargebotenen Functionen) charakteristisch unterscheiden.

Verstehen wir unter $f(x)$ vorerst eine von $x=a$ bis $x=z>a$ stetig wachsende Function, so ist es zunächst einleuchtend, dass die Summe

$$S=(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})f(x_{n-1}) \\ +(z-x_n)f(x_n)$$

wächst, wenn man zwischen den Gliedern der Reihe

(1) $$a,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n,\ z$$

neue Glieder interpolirt; denn jedes Mal, so oft zwischen zwei Glieder x_r und x_{r+1} ein neues ξ gesetzt wird, tritt an die Stelle des einen Summanden

$$(x_{r+1}-x_r)f(x_r)$$

in S die Summe zweier:

$$(\xi-x_r)f(x_r)+(x_{r+1}-\xi)f(\xi) \\ =(x_{r+1}-x_r)f(x_r)+(x_{r+1}-\xi)[f(\xi)-f(x_r)],$$

und da unserer Voraussetzung gemäss beide Factoren des Products

$$(x_{r+1}-\xi)\cdot[f(\xi)-f(x_r)]$$

positiv sind, so giebt dieses Product einen wirklichen Zuwachs des obigen Ausdrucks an.

Thut man dasselbe mit der Summe

$$S'=(x_1-a)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})f(x_n) \\ +(z-x_n)f(z),$$

so nimmt diese dadurch ab, denn der einzelne Summand

$$(x_{r+1}-x_r)f(x_{r+1})$$

geht in die Summe zweier

$$(\xi-x_r)f(\xi)+(x_{r+1}-\xi)f(x_{r+1}) \\ =(x_{r+1}-x_r)f(x_{r+1})+(\xi-x_r)[f(\xi)-f(x_{r+1})]$$

über, die ihn um den negativen Summanden

$$(\xi-x_r)[f(\xi)-f(x_{r+1})]$$

übertrifft, weil gemäss der Voraussetzung $f(\xi)<f(x_{r+1})$ ist.

Die beiden für die bestimmte Reihe (1), also für die Reihe

$$a,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n,\ z,$$

berechenbaren Summen S und S' unterscheiden sich um die Differenz:

$$S'-S=(x_1-a)[f(x_1)-f(a)]+(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]+\cdots \\ \cdots+(z-x_n)[f(z)-f(x_n)].$$

In ihr sind die Factoren der einzelnen Glieder positiv, und es ist daher, wenn man unter den zu berechnenden Differenzen die grösste

$$f(x_{r+1}) - f(x_r) = F$$

bezeichnet:

$$S' - S \leqq (z-a) \cdot F.$$

Beachten wir nun, dass wegen der Stetigkeit der Function $f(x)$ die Differenz F unendlich abnimmt, wenn man zwischen den Gliedern der Reihe (1) unendlich viele neue Glieder mit unendlich kleinen Differenzen interpolirt, so ersehen wir, dass hierbei die unausgesetzt wachsende Summe S und die unausgesetzt abnehmende Summe S′ sich einem und demselben bestimmten Grenzwerth nähern.

Wir wollen denselben mit G bezeichnen, und denjenigen, welcher auf analoge Weise aus einer andern Anfangsreihe

(2) $$a,\ x'_1,\ x'_2,\ \cdots,\ x'_{m-1},\ x'_m,\ z$$

hervorgeht, mit G′, endlich mit G″ denjenigen, welcher aus einer Anfangsreihe hervorgeht, die die Glieder beider Reihen (1) und (2), ihrer Grösse nach geordnet, enthält.

Dann ist es bloss eine zweifache Wiederholung des vorhin gewonnenen Urtheils $\lim \cdot S = \lim \cdot S'$, wenn wir schliessen, dass

$$G = G'',\ G' = G''$$

und deshalb

$$G' = G$$

sei.

Es wird also durch keine Abänderung des Eintheilungsgesetzes des von $x = a$ bis $x = z$ reichenden Intervalls an dem Grenzwerthe von S etwas geändert.

Erwägen wir ferner, dass S und $\lim \cdot S$ höchstens eine Veränderung des Vorzeichens erleiden, wenn $z < a$ ist, oder $f(x)$ als von $x = a$ bis $x = z$ abnehmend vorausgesetzt wird, so gewinnen wir den folgenden

Lehrsatz I.

Bedeutet $f(x)$ eine von $x = a$ bis $x = z$ bestimmte stetig zu- oder abnehmende Function von x, so ist das Integral

$$F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$$

eine völlig bestimmte Function von z.

Aus der Definition des Integrals folgen aber unmittelbar auch die beiden zunächst zu notirenden Lehrsätze:

Lehrsatz II.

In allen Fällen, in denen $f(x)$ eine eindeutige[1]) Function von x ist, deren Integral einen Sinn hat, ändert dasselbe bei der Vertauschung der oberen mit der unteren Grenze nur sein Vorzeichen:

$$(3)\qquad \int_a^z f(x)\,dx = -\int_z^a f(x)\,dx\,.$$

Denn es geht bei der obigen Bezeichnung die Summe S in (— S'), und daher lim · S in (— lim · S') über.

Lehrsatz III.

Es ist stets:

$$(4)\qquad \int_a^z f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^z f(x)\,dx,$$

sobald die hier aufgeführten Integrale sämmtlich einen Sinn haben.

Mithin gilt nach Lehrsatz I auch der folgende:

Lehrsatz IV.

Bedeutet $f(x)$ eine zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = z$ nur eine zählbare Anzahl mal im Zu- und Abnehmen wechselnde und hierbei auch nur eine zählbare Anzahl mal von einem Werth zu einem andern (unstetig) springende, im Übrigen aber überall bestimmte und stetige Function von x, so ist

$$F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$$

eine völlig bestimmte Function von z, d. h. eine Function, welche von dem Eintheilungsgesetz des Summationsintervalls (a, z) nicht abhängt.

Zur vollständigen Sicherstellung dieses Satzes nach allen Seiten hin erübrigt es noch, den Einfluss einer Stelle $x = c$ ins Auge zu fassen, an welcher die generell stetige Function von einem

---

[1]) Für jeden einzelnen Werth von x nur mit einem Werth behaftet.

bestimmten Werthe f_1 zu einem andern f_2 springt, d. h. einer Stelle, wo

$$\lim_{\Delta x=0} \cdot f(c-\Delta x)=f_1, \quad \lim_{\Delta x=0} \cdot f(c+\Delta x)=f_2$$

verschiedene aber bestimmte Werthe sind.

Dann ist in der Summe

$$(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(c-x_r)f(x_r)+(x_{r+1}-c)f(c)$$
$$+(x_{r+2}-x_{r+1})f(x_{r+1})+\cdots+(z-x_n)f(x_n),$$

in welcher c als zwischen x_r und x_{r+1} liegend angenommen ist, zwar ein unbestimmtes Glied

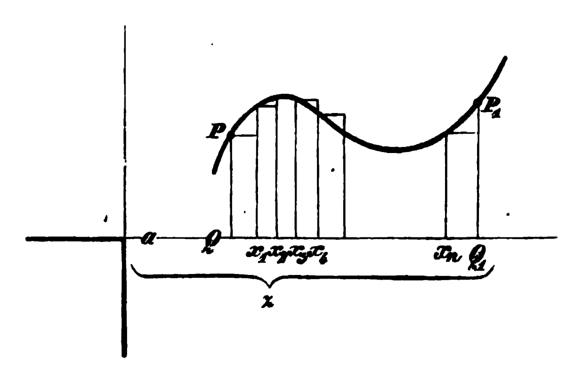
$$(x_{r+1}-c)f(c)$$

enthalten; jedoch nähert sich dieses zugleich mit der Differenz $(x_{r+1}-c)$ dem Grenzwerthe Null und übt daher keinen Einfluss auf den Werth des Integrals aus.

Dass auch eine grössere Anzahl von Sprungstellen, wenn sie nur zählbar ist, und wenn nirgends $f(c\pm\Delta x)$ bei unendlich abnehmendem Δx unendlich wächst, keinen Einfluss auf das Integral ausüben kann, ist aus dem Obigen ohne Weiteres ersichtlich; so wie, dass auch die obere Grenze z und die untere a solche Sprungstellen sein dürfen.

§ 18.

Geometrische Veranschaulichung des Integrals.



Construirt man bei rechtwinkligen Coordinaten eine Curve als geometrischen Ort der Punkte, welche die Abscisse x und die Ordinate $y=f(x)$ haben, so ist bei der in der Geometrie getroffenen Vereinbarung über die Beziehung der Längeneinheit und der

Flächeneinheit zu einander,[1]) die im vorigen § durch S benannte Grösse gleich der Summe der Maasszahlen derjenigen Rechtecke, welche die zu den Abscissen a, x_1, x_2, ..., x_n gehörenden Ordinaten QP, u. s. w. als eine Seite und als zweite Seite die Strecken (x_1-a), (x_2-x_1), ..., $(z-x_n)$ haben.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der

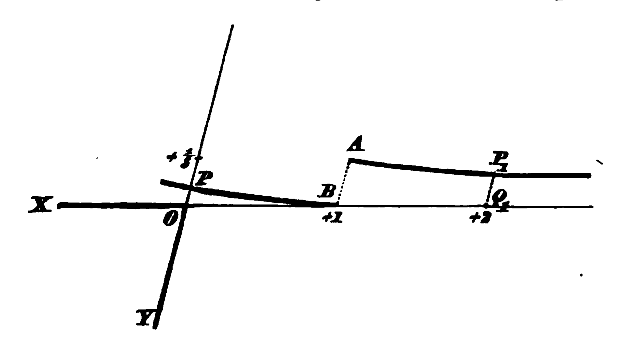
Lehrsatz.

Ist $y=f(x)$ die Gleichung einer Curve, so giebt das Integral

$$\int_a^z f(x)\,dx$$

die Maasszahl desjenigen Flächenstücks (PQQ_1P_1) an, welches von der Abscissenaxe (der Axe der x) und der Curve und den „zu $x=a$ und $x=z$ gehörenden Ordinaten"[2]) begrenzt wird. — Bei dieser Berechnung erhalten die auf verschiedenen Seiten der Abscissenaxe liegenden Flächenstücke Maasszahlen von entgegengesetzten Vorzeichen.

Um der Anschauung ein mögliches Verhalten der Function $f(x)$ nahe zu bringen, bei welchem sie noch in die oben (im vor § und auch hier) betrachtete Kategorie gehört, obgleich sie discontinuirlich ist, wählen wir das in § 2 betrachtete Beispiel



[1]) Das fragliche Übereinkommen ist bekanntlich dieses, dass alle Felder durch das Feld eines Quadrats gemessen werden sollen, dessen Seiten der grade gewählten Längeneinheit gleich sind.

[2]) d. i. in den Endpunkten Q und Q_1 der Abscissen parallel zur Coordinatenaxe gezogenen Graden.

$$y = f(x) = \frac{1}{3 + 10^{\frac{1}{1-x}}}.$$

Die Curve hat etwa die auf voriger Seite verzeichnete Gestalt, und es würde durch das Integral $\int_0^2 \frac{dx}{3 + 10^{\frac{1}{1-x}}}$ das Flächenstück $OPBAP_1Q_1BO$ unzweideutig gemessen werden, sobald $OQ_1 = 2 \cdot OB$ und $\angle XOY = \varkappa$ angenommen wird. Nur gehört die mit OP parallele Grade BA nicht zur Curve.

Um Fälle anzuführen, welche ausgeschlossen sind, so kann es geschehn, dass die den Verlauf der Function $f(x)$ veranschaulichende Curve ohne Aufgabe ihres continuirlichen Zuges zwischen zwei durchaus verschiedenen Ordinaten (etwa $y=1$ und $y=1000000$) desto öfter auf- und absteigt, je mehr die Abscisse sich einem bestimmten Grenzwerthe nähert, oder dass die Curve sich in lauter unverbundene Punkte auflöst — wie oben an der Stelle (A, B) — und dgl. mehr. Dann ist, wie im letzterwähnten Falle, von einem durch das Integral zu messenden Flächenstück überhaupt nicht mehr die Rede, oder es müssen, wo die Continuität eines Curvenzuges noch einen Sinn behält, besondere Vorsichtsmaassregeln für die geeignete Auswahl der Abscissen $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ getroffen werden, um kein falsches Resultat zu erhalten.

Wir sind für die uns hier nahe liegenden Zwecke nicht gemüssigt, auf solche Subtilitäten einzugehn.

Von ganz besonderer Wichtigkeit aber ist noch der im nächsten § zu begründende Satz.

§ 19.

Differentiation des Integrals nach seiner oberen Grenze.

Lehrsatz.

Bedeutet $f(x)$ eine von $x = a$ bis $x = z$ überall endliche,[1]) generell[2]) stetige und auch im Wachsen und Ab-

[1]) Nirgends unendlich wachsende.

[2]) Wir bezeichnen durch das Wort „generell“ die Beschränkung auf eine zählbare Anzahl von Ausnahmen.“ — Hier wird eine zählbare Anzahl von Sprüngen zwischen endlichen Werthen gestattet.

nehmen nur eine zählbare Anzahl mal wechselnde Function von x, so ist das Integral

$$(1) \qquad F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$$

eine völlig bestimmte und nicht nur stetige, sondern auch differentiirbare Function von z mit der Derivirten

$$(2) \qquad F'(z) = f(z).$$

Ist $f(x)$ im **ganzen** Intervall (a, z) **stetig**, so giebt es eine zwischen 0 und + 1 liegende Zahl θ, für welche

$$(3) \qquad F(z) = (z - a) \cdot f[a + \theta(z - a)]$$

hervorgeht. Jedenfalls aber hat man die Beziehung

$$(4) \qquad F(z) = (z - a) \cdot M(g, k),$$

wo $M(g,k)$ einen „Mittelwerth der Function $f(x)$ im Intervall (a, z)", d. i. eine Zahl bedeutet, welche nicht grösser als der grösste Werth g und nicht kleiner als der kleinste Werth k von $f(x)$ im Intervall (a, z) ist.

Endlich ist:

$$(5) \qquad \lim_{z=a} \cdot F(z) = \lim_{z=a} \cdot \int_a^z f(x)\,dx = 0,$$

so lange die oben über $f(x)$ gemachte Voraussetzung zutrifft.

Beweis. Bezeichnet man durch φ den Werth des Quotienten $\frac{F(z)}{z-a}$, so ist identisch:

$$F(z) = (z - a)\varphi = (x_1 - a) \cdot \varphi + (x_2 - x_1)\varphi + (x_3 - x_2)\varphi + \cdots$$
$$\cdots + (z - x_n)\varphi$$

und nach (1) wegen des Begriffs des Integrals auch:

$$F(z) = \lim \cdot [(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + (x_3 - x_2) f(x_2) + \cdots$$
$$\cdots + (z - x_n) f(x_n)];$$

mithin erhält man durch Subtraction:

$$0 = \lim \cdot \{(x_1 - a)[f(a) - \varphi] + (x_2 - x_1)[f(x_1) - \varphi]$$
$$+ (x_3 - x_2)[f(x_2) - \varphi] + \cdots + (z - x_n)[f(x_n) - \varphi]\}.$$

Diese Gleichung kann aber, da die Differenzen der x einerlei Vorzeichen haben, nur bestehn, wenn die Differenzen $[f(x_r) - \varphi]$ entweder sämmtlich $= 0$ sind oder theilweise verschiedene Vorzeichen haben. Im ersten Falle ist $f(x)$ innerhalb des ganzen Intervalls

(a, z) constant $= \varphi$, im zweiten Falle innerhalb desselben theils grösser theils kleiner als φ; — dies spricht die Gl. (4) aus, in welcher g den grössten und k den kleinsten Werth von $f(x)$ innerhalb des Integrationsintervalles bezeichnet. Verengert man nun die Voraussetzung weiter in der Weise, dass die Function $f(x)$ als von $x = a$ bis $x = z$ continuirlich variirend (d. i. als von jedem ihrer Werthe zu jedem andern durch alle dazwischen liegenden Werthe hindurchgehend) angenommen wird, so kann die Differenz $[f(x) - \varphi]$ ihr Vorzeichen nicht wechseln, ohne durch den Werth ± 0 hindurchzugehn; weshalb es einen solchen zwischen a und z enthaltenen Werth x′ (oder auch deren mehrere) geben muss, dass $\varphi = f(x')$ hervorgeht. Für ein solches x′ ist die Bezeichnungsweise

$$x' = a + \theta(z - a), \quad \{0 \leqq \theta < +1\}$$

hergebracht, welche offenbar ihrem Zweck entspricht. — Damit ist die Gl. (3) verificirt.

Um schliesslich das zu deduciren, was in der Gl. (2) behauptet wird, differentiiren wir die Definitionsgleichung (1) nach z. Dieselbe ergiebt zunächst unter Berücksichtigung von § 17 (4):

$$F(z + \Delta z) = \int_a^{z+\Delta z} f(x)\,dx = \int_a^z f(x)\,dx + \int_z^{z+\Delta z} f(x)\,dx.$$

Subtrahirt man nun die Gl. (1) und wendet die oben bewiesene Gl. (4) an, so erhält man:

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(x)\,dx = \Delta z \cdot M(g, k),$$

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = M(g, k);$$

wo g den grössten und k den kleinsten Werth bedeutet, welchen $f(x)$ in dem von $x = z$ bis $x = z + \Delta z$ reichenden Intervall annimmt.

Bei einer an der Stelle $x = z$ stetigen Function $f(x)$ kann man die letzte Gleichung (in Folge der schon bewiesenen Gl. (3)) auch so schreiben:

(6) $$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z + \theta \cdot \Delta z)$$

und erhält im Grenzfalle für ein unendlich kleines Δz augenscheinlich:

$$F'(z) = f(z).$$

Springt aber unsere Function $f(x)$ an der Stelle $x = z$ von einem bestimmten Werth zu einem andern, so gilt — weil $f(x)$ nach unserer Voraussetzung auf jeder Seite der Sprungstelle innerhalb eines gewissen Intervalls stetig bleibt — die Gleichung (6) ebenfalls; nur erhält man durch den Übergang zur Grenze für

$$F'(z) = \lim_{\Delta z = 0} \cdot \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z}$$

die beiden von einander verschiedenen Werthe:

$$\lim_{\Delta z = 0} \cdot f(z + \Delta z) \text{ und } \lim_{\Delta z = 0} \cdot f(z - \Delta z),$$

je nachdem die Annäherung von der positiven oder von der negativen Richtung her geschieht.

Der Werth von $F'(z)$ fällt eben bei den entgegengesetzten Differentiationsrichtungen verschieden aus, ein schon in § 2 als möglich besprochenes Resultat.

Die Gleichung (5) folgt sofort aus (4).

§ 20.

Das bestimmte und das unbestimmte Integral.

Die beiden Integrale

$$\int_a^z f(x)\,dx, \quad \int_b^z f(x)\,dx$$

mit gleichen oberen Grenzen z und verschiedenen unteren Grenzen a und b haben nach § 17 (4) zur Differenz das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

welches von z völlig unabhängig ist, können also durch die Addition eines für z constanten Summanden aus einander abgeleitet werden. Ob derselbe positiv oder negativ sei, hängt vom Verlauf der integrirten Function und von der numerischen Lage der unteren Grenzen a und b gegen einander ab.

Man braucht sich daher um die untere Grenze des Integrals in allen denjenigen Fällen nicht speciell zu kümmern, in welchen

man die Veränderungen des als Function seiner oberen Grenze betrachteten Integrals untersucht. Man vereinfacht in solchen Fällen die Bezeichnung.

Definition.

Ein Integral $\int_a^z f(x)\,dx$ mit bestimmt angegebener oberer und auch unterer Grenze heisst ein **bestimmtes Integral**. Ein als Function seiner oberen Grenze betrachtetes Integral, während für seine untere Grenze eine willkürlich auszuwählende Constante gestattet wird, nennt man ein **unbestimmtes Integral** und schreibt es in der Weise:

$$\int f(z)\,dz\,,$$

so dass die obere Grenze im Differential an der Stelle der unabhängigen Variabeln genannt wird, die untere Grenze aber gar keine Erwähnung findet.

Jede zum unbestimmten Integral addirte Constante heisst eine **willkürliche Integrationsconstante.**

Zusatz I.

Je zwei unbestimmte Integrale $F(z)$ und $\Phi(z)$ desselben Differentials $f(x)\,dx$ haben eine constante Differenz:

$$F(z) - \Phi(z) = C.$$

Denn dies sagt nichts Anderes aus, als die Gleichung (4) des § 17, nämlich als:

$$\int_a^z f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^z f(x)\,dx\,,$$

$$\int_a^z f(x)\,dx - \int_b^z f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Zusatz II.

Ist ein **unbestimmtes** Integral

(1) $$\int f(x)\,dx = F(x)$$

des Differentials $f(x)\,dx$ ermittelt, so kann man jedes **bestimmte** Integral nach der Formel

(2) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

berechnen, jedoch unter der ausdrücklichen Bedingung, dass die Function F(x) im Intervall (a, b) völlig bestimmt und stetig sei.

Die Gleichung (2) nämlich im Verein mit der Definitionsgleichung (1) bedeutet wieder nichts Anderes, als die Gl. (4) des § 17, da sie mit der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx$$

identisch ist.

Zusatz III.

Unter derselben Voraussetzung, wie im Zus. II. ist:

(3) $$\frac{d\left(\int f(x)\,dx\right)}{dx} = f(x)$$

oder in einer bequemeren, leicht verständlichen Schreibweise:

(3') $$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x).$$

— Diese Gleichungen sagen dasselbe aus, wie die Gl. (2) des § 19.

§ 21.

Endliche Integralwerthe bei unendlichen Differentialen oder Integrationsintervallen.

Lehrsatz I.

Wächst die generell bestimmte und stetige Function $f(x)$ bei der unendlichen Annäherung von x an c im Intervall (a, c) unendlich, während hierbei für irgend eine positive Constante μ

$$\lim_{x=c} \cdot (c-x)^{1-\mu} f(x) = 0$$

hervorgeht, so ist

$$\lim_{z=c} \cdot \int_a^z f(x)\,dx$$

eine endliche, völlig bestimmte Grösse.

Beweis. Wir nehmen an, dass x von a nach c hin wachse — wodurch der Allgemeinheit der Beweisführung offenbar kein Abbruch geschieht — und bestimmen im Intervall (a, c) einen Werth z von x so nahe an c, dass in dem Unterintervall (z, c) überall

$$\text{abs}\cdot(c-x)^{1-\mu} f(x) < \varepsilon, \quad \text{abs}\cdot f(x) < \varepsilon\cdot(c-x)^{\mu-1}$$

ist, wo ε eine beliebig kleine Constante bedeutet. Dies kann der Voraussetzung gemäss geschehn.

Interpoliren wir nun zwischen z und c die aufsteigende Reihe $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ und bilden die Summe

$$S = (x_1 - z) f(z) + (x_2 - x_1) f(x_1) + (x_3 - x_2) f(x_2) + \cdots \\ \cdots + (c - x_n) f(x_n),$$

so sind die absoluten Werthe ihrer Glieder kleiner als die Glieder der analogen Reihe

$$\varepsilon\cdot S' = (x_1 - z)\cdot\varepsilon(c-z)^{\mu-1} + (x_2 - x_1)\cdot\varepsilon(c-x_1)^{\mu-1} + \cdots \\ \cdots + (c - x_n)\cdot\varepsilon(c-x_n)^{\mu-1}.$$

Mithin ist:

$$\text{abs}\cdot S < \varepsilon\cdot S',$$

$$\text{abs}\cdot\int_z^c f(x)\,dx < \varepsilon\cdot\int_z^c (c-x)^{\mu-1} dx.$$

Aus § 14 und § 8 folgt aber:

$$\frac{d\cdot(c-x)^\mu}{dx} = \frac{d\cdot(c-x)^\mu}{d(c-x)}\cdot\frac{d(c-x)}{dx} = -\mu(c-x)^{\mu-1};$$

und hieraus durch Integration:

$$(c-x)^\mu + C = -\mu\cdot\int(c-x)^{\mu-1}dx,$$

$$\int_z^c (c-x)^{\mu-1} dx = \frac{1}{\mu}\cdot(c-z)^\mu.$$

Daher ergiebt sich aus der obigen Betrachtung, dass

$$\text{abs}\cdot\int_z^c f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{\mu}\cdot(c-z)^\mu,$$

m. a. W., dass

$$\int_z^c f(x)\,dx = \varepsilon\cdot\frac{\theta}{\mu}(c-z)^\mu, \quad (-1 < \theta < +1)$$

ist.

Demnach kann man mit Rücksicht auf § 17 L. III

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^z f(x)\,dx + \varepsilon \cdot \frac{\theta}{\mu}(c-z)^\mu$$

darstellen.

Der erste Summand der rechten Seite besitzt einen angebbaren bestimmten Werth, der zweite erreicht die Grösse $\frac{\varepsilon}{\mu}(c-z)^\mu$ nicht; daher ist der Werth von $\int_a^c f(x)\,dx$ endlich. Ausserdem ist er ein völlig bestimmter, weil die zu dem völlig bestimmten Werth von $\int_a^z f(x)\,dx$ zu addirende Grösse bei der Annäherung von z an c unendlich abnimmt.

Definition.

Wird die Function $f(x)$ innerhalb des Intervalls (a, b) bei einer Stelle c unendlich, während

$$\lim_{z=c,\,u=c} \left\{ \int_a^z f(x)\,dx + \int_u^b f(x)\,dx \right\}$$

einen endlichen Werth erlangt, so bezeichnet man den letzteren — genau, wie bei endlich bleibenden $f(x)$ — ebenfalls durch $\int_a^b f(x)\,dx$.

Zusatz.

Ergiebt sich für jeden Werth von x innerhalb des Integrationsintervalls (a, z)

$$\lim_{z=x} \cdot (z-x)^{1-\mu} f(z) = 0,$$

so ist in ihm das Integral $\int_a^z f(x)\,dx$ eine stetige und differentiirbare Function von z.

Lehrsatz II.

Hat das Integral $\int_a^z f(x)\,dx$ bei jedem Werthe von z einen bestimmten Werth, und ist für irgend ein positives constantes μ

$$\lim_{x=\infty} \cdot x^{1+\mu} f(x) = 0,$$

so besitzt auch

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{z=\infty} \cdot \int_a^z f(x)\,dx$$

einen bestimmten endlichen Werth.

Beweis. Durch eine Schlussweise, welche derjenigen im vorigen Beweise ganz analog ist, findet man:

$$\int_z^c f(x)\,dx = \theta \cdot \varepsilon \cdot \int_z^c x^{-\mu-1}\,dx = \varepsilon \cdot \frac{\theta}{\mu} \cdot \{z^{-\mu} - c^{-\mu}\}, \; (-1 < \theta < +1).$$

Es bedeutet c eine das z um beliebig viel übersteigende Zahl und ε den grössten Werth von $x^{1+\mu} f(x)$ im Intervall (z, c).

Lässt man c unendlich wachsen, so ist $\lim_{c=\infty} \cdot c^{-\mu} = 0$, mithin:

$$\int_z^\infty f(x)\,dx = \varepsilon \cdot \frac{\theta}{\mu z^\mu},$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^z f(x)\,dx + \varepsilon \cdot \frac{\theta}{\mu z^\mu}.$$

Da der erste Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung für jedes beliebig grosse z nach der Voraussetzung völlig bestimmt ist, und der zweite der Null durch die Vergrösserung von z beliebig nahe gebracht wird, so trifft unser Lehrsatz zu.

Anmerkung.

Die beiden Sätze dieses § reichen in einer grossen Anzahl von Fällen aus, um den Werth eines Integrals als endlich bestimmt zu erkennen, während das Differential oder das Integrationsintervall unendlich wird. In anderen, seltener vorkommenden Fällen muss man sich eines schärferen Kriteriums bedienen; von diesem wird später (in § 49 und § 50) gehandelt werden. — Ein durchaus durchschlagendes giebt es überhaupt nicht und kann es sogar nicht geben, wie ich a. a. O. im Jahre 1867 gezeigt habe.

§ 22.

Aufgabe und Methode der Integralrechnung.

Unter **Integralrechnung** versteht man den Inbegriff aller Lehren über die Integrale der Functionen.

Es wird also — um das Ziel möglichst weit zu stecken — unsere Aufgabe sein, die Integrale analytisch, d. i. durch die Elementarfunctionen,[1] auszuwerthen, die Beziehungen der Integrale verwandter Functionen zu einander aufzudecken und Kriterien für solche Eigenschaften der Integrale zu beleuchten, welche auch ohne vollzogene Integration erkannt werden können.

Wegen der Unmöglichkeit, eine Tafel der Integrale aller denkbaren Functionen herzustellen, wird der erste Theil unserer Aufgabe darauf zu reduciren sein, dass man die Integrale der Elementarfunctionen auswerthet und diejenigen Sätze über die Integration zusammengesetzter Functionen aufstellt, welche in den Complicationen der sieben Rechnungsarten wirksam zu sein pflegen.

Wir werden bald sehen, dass die Integralrechnung in diesem Theil ihrer Aufgabe einen ungünstigeren Stand hat, als die Differentialrechnung in dem analogen. Dass sie dagegen diesen Mangel in anderer Beziehung wettmacht, lässt sich schon aus Früherem, namentlich aus § 19 und § 21, absehn.

Die Methode der Integralrechnung würde, wenn der § 19 sie nicht mit der Differentialrechnung als Inversion vermittelte — etwa wie die Division mit der Multiplication — die sein, dass man in jedem einzelnen Falle den Uebergang zur Grenze bei derjenigen Summe zu vollziehn hätte, durch welchen das Integral definirt ist (§ 16). Der Versuch, auf diese Weise zu nennenswerthen Resultaten zu gelangen, erweist sich als fruchtlos.

Was die Integralrechnung an Resultaten zu leisten vermag, erlangt sie zunächst hauptsächlich durch ihre Inversionsbeziehung zur Differentialrechnung. Und die Einführung des Begriffs des unbestimmten Integrals (§ 20) leitet nur aus dieser Beziehung Zweck und Berechtigung her. — Es eignet sich eben die Form des unbestimmten Integrals am meisten für die Uebertragung der

[1] d. h. durch diejenigen Functionen, welche durch die sieben Rechnungsarten direct definirt sind.

Resultate der Differentialrechnung in die Sprache der Integralrechnung. Der grösste und imponirendste Reichthum ihrer Resultate entspringt aber aus der ausgiebigen Verwerthung der §§ 19 und 21 zur Entdeckung und Discussion der „transcendenten" Functionen, d. i. solcher Functionen, welche nicht in geschlossener Form durch Elementarfunctionen dargestellt werden können. Diesen Theil der Integralrechnung nennt man „Functionentheorie."

Dass wir im Folgenden die analogen Sätze für beide Rechnungsoperationen der Regel nach unmittelbar neben einander stellen, geschieht erstens, um den blossen Anschein der Verschiedenheit oder die wirklichen Abweichungen besser hervorzuheben, zweitens um diejenigen Integrationen offen und nicht maskirt anzuwenden, welche bei manchen gewohnheitsgemäss der Differentialrechnung einverleibten Deductionen und Relationen unerlässlich sind. — Wollte man in der Differentialrechnung Alles streichen, was zur klaren und vollen Darlegung Integration erfordert, so würde von ihr sehr wenig übrigbleiben.

Capitel VI.

Die Integration der einfachsten Formen.

§ 23.

Integration der Constanten.

Lehrsatz.

Das Integral einer **Constanten** ist das Product aus der Constanten und dem Integrationsintervall:

$$\int_a^z c\,dx = c\cdot(z-a) \tag{1}$$

oder in der Schreibweise des unbestimmten Integrals:

$$\int c\,dz = cz + C. \tag{2}$$

Beweis. Dies folgt direct aus dem Begriff des Integrals, nach welchem

$$\int_a^z c\,dx = \lim_{\Delta x = 0} \cdot \{c(x_1 - a) + c(x_2 - x_1) + \cdots + c(z - x_n)\}$$
$$= \lim_{\Delta x = 0} \cdot c\,\{z - a\} = c\,(z - a)$$

ist.

Zusatz I.

Das Integral der **Null** ist bei jedem Integrationsintervall $= 0$.[1])

Zusatz II.

Es giebt kein Integral, welches bei veränderlichen Grenzen einen von der Null verschiedenen constanten Werth besässe.

— Denn aus der Gleichung

$$\int_a^z f(x)\,dx = C$$

folgt nach § 19 durch Differentiation nach z die für jedes z geltende Gleichung

$$f(z) = 0$$

und hieraus durch Integration:

$$\int_a^z f(x)\,dx = \int_a^z 0 \cdot dx = 0.$$

§ 24.

Integration der Summen und Differenzen.

Lehrsatz I.

Das Integral einer **Summe** ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Summanden:

$$(1)\quad \int (u + v + w + \cdots + z)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx + \cdots$$
$$\cdots + \int z\,dx + C$$

---

[1]) Sind zwei oder mehr Functionen durch eine Gleichung von der Form

$$f(x) + \varphi(x) = 0$$

verbunden, so liebt man es, die aus ihr fliessende Gleichung zwischen unbestimmten Integralen (vergl. § 24) in der Form

$$\int f(z)\,dz + \int \varphi(z)\,dz = C$$

darzustellen. Damit will man keineswegs dem obigen Zusatz widersprechen, sondern nur die Integrationsconstanten der linken Seite nach rechts versetzt und durch ein Symbol C zusammengefasst haben. Die Gleichung steht also, wenn man durch F(z) und Φ(z) irgend welche unbestimmten Integrale von f(x) und φ(x) anzeigt, für

$$\{F(z) - F(a)\} + \{\Phi(z) - \Phi(a)\} = 0,$$
$$F(z) + \Phi(z) = F(a) + \Phi(a) = C.$$

— unter der Voraussetzung einer bestimmten[1]) Summandenzahl und der Integrirbarkeit[2]) der einzelnen Summanden.

Beweis. Es folgt dies ohne Weiteres aus dem Begriff des bestimmten Integrals und dem Satz, dass man in jeder Summe die Folge der Summanden beliebig ändern darf, so lange deren Anzahl endlich ist.

Man kann aber auch so schliessen:
Nach § 11 und § 21 ist:

$$\frac{d}{dx}\cdot\left\{\int u\,dx+\int v\,dx+\int w\,dx+\cdots+\int z\,dx+C\right\}$$
$$=u+v+w+\cdots+z,$$

folglich, weil gleiche Functionen gleiche Integrale haben (§ 16):

$$\int u\,dx+\int v\,dx+\int w\,dx+\cdots+\int z\,dx+C$$
$$=\int(u+v+w+\cdots+z)\,dx.$$

Lehrsatz II.

Das Integral einer **Differenz** ist gleich der Differenz der Integrale des Minuenden und des Subtrahenden:

(2) $$\int(u-v)\,dx=\int u\,dx-\int v\,dx+C.$$

— Denn bezeichnet man $u-v=y$, so ist $y+v=u$; mithin nach L. I:

$$\int y\,dx+\int v\,dx=\int u\,dx+C,$$
$$\int y\,dx=\int u\,dx-\int v\,dx+C.$$

Zusatz.

Man darf das Vorzeichen eines Differentials bei der Integration vor das Integralzeichen setzen:

(3) $$\int\pm v\,dx=\pm\int v\,dx.$$

---

[1]) Unendliche Reihensummen lassen sich nicht immer gliedweise integriren. (Vergl. § 59.)

[2]) Die Summe kann ein Integral haben, ohne dass dies von den einzelnen Summanden, in welche man sie nach Willkür zerlegt, zu gelten braucht.

§ 25.

Integration der Producte und Quotienten.

Integrirt man die aus § 12 u. § 21 folgende Gleichung

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(u\cdot\int v\,dx\right)=\frac{du}{dx}\cdot\int v\,dx+uv$$

nach x, so erhält man — unter Weglassung der selbstverständlichen additionellen Integrationsconstante:

$$u\cdot\int v\,dx=\int\left(\frac{du}{dx}\int v\,dx\right)dx+\int uv\,dx$$

oder, wenn man diese Gleichung für das letzte Integral als Unbekannte auflöst:

$$\int uv\,dx=u\cdot\int v\,dx-\int\left(\frac{du}{dx}\cdot\int v\,dx\right)dx.$$

Ist der Factor u des Productes (uv) constant, so wird $\frac{du}{dx}=0$, und es bleibt auf der rechten Seite der Gleichung nur der erste Summand übrig (§ 23 Z. I).

Hierdurch sind die beiden folgenden Sätze bewiesen:

Lehrsatz I.

Das Integral eines Productes, welches einen **constanten Factor** enthält, ist gleich dem Product aus diesem und dem Integral des andern Factors:

(1) $$\int c\cdot f(x)\,dx=c\cdot\int f(x)\,dx\cdot$$

— Wir haben hier nur c für den constanten Factor u und $f(x)$ für den zweiten Factor v geschrieben.

Lehrsatz II.

Bei der Integration eines Productes **zweier** Factoren kann man die Formel

$$\int uv\,dx=u\cdot\int v\,dx-\int\left(\frac{du}{dx}\cdot\int v\,dx\right)dx$$

(2) $$=u\cdot\int v\,dx-\int\left(du\cdot\int v\,dx\right)$$

zur Anwendung bringen; d. i.: Man kann eine zu integrirende Function auf beliebige Weise in zwei Factoren

zerlegen, dann so integriren, als wäre der eine von ihnen constant, und den Fehler dadurch ausgleichen, dass man von dem vorgeblichen Resultat das Integral derjenigen Function subtrahirt, welche seine Derivirte sein würde, wenn in ihm nur der als constant behandelte Factor variabel wäre.

Macht man $v = 1$, so folgt, weil $\int dx = x$ ist, aus (2) der

Zusatz.

Man kann

(3) $$\int u\,dx = xu - \int x\,du,$$

(4) $$\int f(x)\,dx = x f(x) - \int x f'(x)\,dx$$

setzen.

Die obigen Sätze geben Relationen zwischen unbestimmten Integralen und verlangen die nachträgliche Regulirung der additionellen Integrationsconstanten, wobei der Zus. II des § 21 zur Anwendung zu bringen ist.

Wir wollen die Substitution der Integrationsgrenzen näher betrachten: einerseits, um der Gleichung (4) diejenige Gestalt zu geben, in welcher sie sich später als besonders wirksam erweisen wird; andrerseits, um jeden Zweifel darüber zu heben, dass die der Willkür überlassene untere Grenze von $\int v\,dx$ in (2) keinen Einfluss auf das Gesammtresultat der Integration haben kann.

Führen wir zunächst in (4) die Integrationsgrenzen a und z ein, so ergiebt sich aus § 21, Zus. II:

$$\int_a^z f(x)\,dx = z f(z) - a f(a) - \int_a^z x f'(x)\,dx$$

$$= (z - a) f(a) + z \cdot \{f(z) - f(a)\} - \int_a^z x f'(x)\,dx$$

$$= (z - a) f(a) + z \cdot \int_a^z f'(x)\,dx - \int_a^z x f'(x)\,dx,$$

d. i. nach L. I und nach § 17:

$$\int_a^z f(x)\,dx = (z - a) f(a) + \int_a^z (z - x) f'(x)\,dx.$$

— Der einfachste Weg zu diesem Resultat ist folgender:

Integrirt man die aus (§ 12) folgende Gleichung

$$\frac{d}{dx}\cdot\left\{(z-x)f(x)\right\}=\frac{d(z-x)}{dx}\cdot f(x)+(z-x)\frac{d f(x)}{dx}$$
$$=\quad -f(x)+(z-x)f'(x)$$

nach x zwischen den Grenzen a und z, so erhält man:

$$(z-z)f(z)-(z-a)f(a)=-\int_a^z f(x)\,dx+\int_a^z (z-x)f'(x)\,dx,$$

was, weil der erste Summand der linken Seite $=0$ ist, für das erste Integral der rechten Seite den fraglichen Ausdruck ergiebt.

Es gilt also der

Lehrsatz III.

Es lässt sich

$$(5)\qquad \int_a^z f(x)\,dx=(z-a)f(a)+\int_a^z (z-x)f'(x)\,dx$$

darstellen, falls $f(x)$ eine im Intervall (a, z) differentiir- und integrirbare Function ist.

Was die Substitution der Integrationsgrenzen in (2) betrifft, so braucht wohl kaum erst daran erinnert zu werden, dass unter $\int v\,dx$ selbstverständlich überall ein und dasselbe unbestimmte Integral von v verstanden wird, weil sonst die Gleichung, von welcher wir zu Anfang des § ausgingen, nicht richtig wäre. In einer Schreibweise, welche die Möglichkeit des Irrthums ausschliesst, lautet dieselbe:

$$\frac{d}{dx}\cdot\left\{f(x)\cdot\int_b^x \varphi(y)\,dy\right\}=\frac{d f(x)}{dx}\cdot\int_b^x \varphi(y)\,dy+f(x)\cdot\varphi(x),$$

welche Constante man auch unter b verstehn mag. Integrirt man diese Gleichung nach x im Intervall (a, z), so erhält man offenbar:

$$f(z)\cdot\int_b^z \varphi(y)\,dy-f(a)\cdot\int_b^a \varphi(y)\,dy=\int_a^z\left\{\frac{d f(x)}{dx}\cdot\int_b^x \varphi(y)\,dy\right\}dx$$
$$+\int_a^z f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

mithin:

$$\int_a^z f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(z)\cdot\int_b^z \varphi(y)\,dy - \int_a^z \left\{\frac{d\,f(x)}{dx}\cdot\int_b^x \varphi(y)\,dy\right\} dx$$
$$- f(a)\cdot\int_b^a \varphi(y)\,dy\,.$$

Dies ist aber die in (2) viel übersichtlicher erscheinende Gleichung. Sie unterscheidet sich von ihr nur dadurch, dass in (2) die hier geschriebene Integrationsconstante $-f(a)\cdot\int_b^a \varphi(y)\,dy$ als selbstverständlich weggelassen ist.

Macht man übrigens $b = a$, so wird $\int_b^a \varphi(y)\,dy = 0$ nach § 19. Man sieht also,

> dass auf der rechten Seite der Gleichung (2) keine Integrationsconstante hinzukommt, wenn man sämmtlichen Integralen in ihr gleiche untere Grenzen giebt, m. a. W., dass

$$\int_a^z f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(z)\cdot\int_a^z \varphi(y)\,dy - \int_a^z \left\{f'(x)\int_a^x \varphi(y)\,dy\right\} dx$$

ist.

Soll ein Product aus mehr als zwei Factoren integrirt werden, so kann man das Product zunächst als ein zweitheiliges ansehn, indem man die Factoren in zwei Gruppen zusammenfasst, darauf die Formel (2) anwenden und mit den neuen Integralen auf ähnliche Weise verfahren, bis die Factoren in den Differentialen einzeln auftreten.

Beispielsweise erhält man:

$$\begin{aligned} uvw\,dx &= uv\cdot\int w\,dx - \int[d(uv)\int w\,dx] \\ &= uv\int w\,dx - \int[u\,dv\int w\,dx] - \int[v\,du\int w\,dx] \\ &= uv\int w\,dx - u\int[dv\int w\,dx] + \int\{du\int[dv\int w\,dx]\} \\ &\quad - v\int[du\int w\,dx] + \int\{dv\int[du\int w\,dx]\}\,. \end{aligned}$$

Demnach nimmt die Formel schon bei drei Factoren eine so verwickelte Gestalt an, dass man kaum einen Nutzen von derselben erwarten wird. In noch höherem Maasse gilt dies für mehr Factoren.

Man wird deshalb nur in Ausnahmefällen eines Gewinns aus der Zerlegung der zu integrirenden Function in mehr als zwei Factoren gewärtig sein dürfen, obgleich keine theoretischen Schwierigkeiten entgegenstehn.

Was endlich die Integration der Quotienten angeht, so lässt sich darüber nur sagen:

Zur Auswerthung des Integrals eines Quotienten $\frac{u}{v}$ besitzt man kein anderes Mittel, als dass man ihn als Product darstellt — etwa

$$\frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$$

— und dann die obigen Formeln anwendet.

Uebrigens giebt es, wovon wir bereits in § 15 manche Beispiele gesehn haben, viele Functionen, deren Derivirte sich in der Bruchform darstellen, so dass man durch einfache Inversion die Integrale vieler Brüche darstellen kann.

§ 26.

Integration einer Potenz nach ihrem Grundfactor.

Lehrsatz.

Das Integral einer **Potenz nach ihrem Grundfactor** ist gleich der Differenz der um einen Grad höheren Potenzen der Grenzen des Integrals, dividirt durch den erhöhten Exponenten:

(1) $$\int_a^z x^n \, dx = \frac{z^{n+1} - a^{n+1}}{n+1},$$

(2) $$\int z^n \, dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C.$$

Dabei kann der Exponent n jeden beliebigen positiven oder negativen, ganzen, gebrochenen oder irrationalen Werth haben, nur **nicht** den Werth $n = -1$. Und wenn $n+1 < 0$ ist, so darf die Null nicht im Integrationsintervall (a, z) liegen.

Beweis. Nach § 14 ist bei jedem n:

$$\frac{d \cdot x^{n+1}}{d x} = (n+1) \cdot x^n .$$

Integrirt man diese Gleichung nach x im Intervall (a, z), so folgt:

$$z^{n+1} - a^{n+1} = (n+1) \cdot \int_a^z x^n \, d x ,$$

falls x^{n+1} von $x = a$ bis $x = z$ überall einen völlig bestimmten Werth besitzt.

Diese Bedingung ist aber dann nicht erfüllt, wenn bei $n+1 < 0$ die Null im Integrationsintervall (a, z) liegt, weil in diesem Falle x^{n+1} bei der Annäherung von x an Null unendlich wächst; und deshalb stehn wir hier vor einer Ausnahme.

Eine zweite Ausnahme findet bei $n = -1$, $n+1 = 0$ statt, weil dann die letzte Gleichung die Form

$$z^0 - a^0 = 0 \cdot \int_a^z x^{-1} d x ,$$

d. i. die Form

$$0 = 0 \cdot \int_a^z \frac{d x}{x}$$

annimmt, aus welcher sich über den Werth von $\int_a^z \frac{d x}{x}$ nichts schliessen lässt. — Die Division der Gleichung

$$z^{n+1} - a^{n+1} = (n+1) \cdot \int_a^z x^n \, d x$$

mit $(n+1)$ giebt nach den elementaren Lehren über die Division eben nur dann eine Gleichung, wenn der Divisor $(n+1)$ von Null verschieden ist.

Anmerkung.

Den Werth des hier ausgeschlossenen Integrals

$$\int_a^z \frac{d x}{x}$$

werden wir in § 44 kennen lernen.

Ist $(n+1) < 0$ und enthält das Integrationsintervall die Null, so besitzt das Integral

$$\int_a^z x^{n+1}\, dx$$

überhaupt keinen Werth.

§ 27.

Integration durch Substitution einer Mittelfunction.

Der in § 8 bewiesene Satz über die Differentiation durch eine Mittelfunction

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

bildet die Grundlage zu einem ganz analogen Satze in der Integralrechnung.

Macht man nämlich die Integrationsvariable x eines Integrals

$$\int_a^z f(x)\, dx$$

zu einer Function $x = \varphi(\xi)$ einer neuen Variabeln ξ, bezeichnet die Werthe, welche ξ für $x = a$ und $x = z$ annimmt, durch α und ζ und differentiirt das Integral nach ζ, so erhält man unter Benutzung des so eben erwähnten Differentiationssatzes nach § 19:

$$\frac{d}{d\zeta} \cdot \int_a^z f(x)\, dx = \left\{ \frac{d}{dz} \cdot \int_a^z f(x)\, dx \right\} \cdot \frac{dz}{d\zeta},$$

d. i.:

$$\frac{d}{d\zeta} \cdot \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\zeta)} f(x)\, dx = f(z) \cdot \frac{dz}{d\zeta} = f(\varphi(\zeta)) \cdot \varphi'(\zeta)$$

oder:

$$\frac{d}{d\xi} \cdot \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\xi)} f(x)\, dx = f(\varphi(\xi)) \cdot \varphi'(\xi).$$

Integrirt man nun diese Gleichung im Intervall (α, ζ), so erhält man:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\zeta)} f(x)\, dx - \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha)} f(x)\, dx = \int_\alpha^\zeta f(\varphi(\xi)) \cdot \varphi'(\xi) \cdot d\xi.$$

Das zweite Integral auf der linken Seite ist aber $= 0$ nach § 19. Mithin ergiebt sich das Resultat:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\zeta)} f(x)\, dx = \int_\alpha^\zeta f(x) \cdot \frac{dx}{d\xi} \cdot d\xi.$$

Jedoch gilt diese Gleichung nicht bedingungslos.

Zunächst nämlich kann sie nur dann als gesichert angesehn werden, wenn die Veränderung von ξ durch das Intervall (α, ζ) hindurch auch ein stetiges Wachsen oder Abnehmen der Function $x = \varphi(\xi)$ von $x = a$ bis $x = z$ ohne Wechsel in der Änderungsrichtung zur Folge hat — wie wir es stillschweigend voraussetzten. Sind aber beide Functionen $x = \varphi(\xi)$ und $f(x) = f(\varphi(\xi))$ von $\xi = \alpha$ bis $\xi = \zeta$ stetig, so darf man von dieser Bedingung absehn, falls die letztere auch eindeutig ist, d. h. falls die Function $f(x)$ immer wieder denselben Werth annimmt, sobald x als Function von ξ einen Werth wiedererlangt, welchen es schon einmal gehabt hat. Denn bedeutet k den kleinsten und g den grössten Werth von x bei solchem Hin- und Rückgang, so wird das Integral $\int_a^z f(x)\,dx$ durch denselben um die Summe

$$\int_k^g f(x)\,dx + \int_g^k f(x)\,dx$$

vermehrt; und diese ist nach § 17 $(3) = 0$. Daher ist es dann auch gleichgültig, ob der fragliche Hin- und Rückgang die Grenzen des Intervalls (a, z) innehält oder überschreitet.

Wird $f(x)$ durch die Einführung von ξ innerhalb des Intervalls (α, ζ) unstetig oder mehrdeutig, so lässt sich im Allgemeinen nicht behaupten, dass die zum Integral $\int_a^z f(x)\,dx$ hinzugefügten Theile von selbst verschwinden.

In der Regel wird man das Integrationsintervall in so kleine Theile (a, z) zerlegen können, dass man bei der Substitution $x = \varphi(\xi)$ von den so eben besprochenen Bedenken absehn darf; d. h. m. a. W.: bei der Ermittelung des unbestimmten Integrals spielen diese Erwägungen keine Rolle.

Wir resumiren unsere Resultate in dem

Lehrsatz.

Substituirt man in dem Integral $\int_a^z f(x)\,dx$ eine Mittelfunction $x = \varphi(\xi)$, welche $a = \varphi(\alpha)$, $z = \varphi(\zeta)$ ergiebt, so ist:

(1) $$\int f(z)\,dz = \int f(\varphi(\zeta)) \cdot \varphi'(\zeta)\,d\zeta = \int f(z)\frac{dz}{d\zeta}\cdot d\zeta,$$

(2) $$\int_a^z f(x)\,dx = \int_\alpha^\zeta f(\varphi(\xi)) \cdot \varphi'(\xi) \cdot d\xi = \int_\alpha^\zeta f(x)\frac{dx}{d\xi}\cdot d\xi\cdot$$

Jedoch wird hierbei vorausgesetzt, dass das Intervall (a,ζ) klein genug sei, damit die Functionen $x=\varphi(\xi)$, $f(x)=f(\varphi(\xi))$ stetig und die letztere auch eindeutig bleibe.

§ 28.

Erläuterung der vorangehenden Sätze durch Beispiele.

I. (§ 26.)

$$\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C,\ \int_0^z x\,dx=\frac{1}{2}z^2,\ \int_{-1}^{+3} x\,dx=\frac{1}{2}\left[3^2-(-1)^2\right]=+4.$$

II. (§ 26.)

$$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C,\ \int_0^z x^2dx=\frac{1}{3}z^3,\ \int_{-4}^{+5} x^2dx=\frac{1}{3}\left[5^3-(-4)^3\right]=+63.$$

III. (§ 26.)

$$\int \sqrt[3]{x^4}\,dx=\int x^{\frac{4}{3}}\,dx=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C,\qquad \int_{-1}^{+1}\sqrt[3]{x^4}\,dx=+\frac{6}{7}.$$

IV. (§ 26.)

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}=\int x^{-\frac{4}{3}}dx=-3x^{-\frac{1}{3}}+C=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C.$$

Hier darf das Integrationsintervall die Null nicht enthalten.

$$\int_{+1}^{+8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}=+\frac{3}{2},\quad \int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}=+3.$$

V. (§ 27.)

Um das Integral $\int\frac{dx}{(m+nx)^2}$ auszuwerthen, substituire man:

$$m+nx=\xi,\quad n\,dx=d\xi,\quad dx=\frac{1}{n}d\xi.$$

Dadurch wird:

$$\int\frac{dx}{(m+nx)^2}=\frac{1}{n}\cdot\int\frac{d\xi}{\xi^2}=\frac{1}{n}\cdot\int\xi^{-2}\,d\xi=-\frac{1}{n}\cdot\xi^{-1}+C$$

$$=-\frac{1}{n(m+nx)}+C.$$

Folglich ist:

$$\int_a^z\frac{dx}{(m+nx)^2}=-\frac{1}{n(m+nz)}+\frac{1}{n(m+na)}=\frac{z-a}{(m+nz)(m+na)};$$

wo aber der Werth $x = -\frac{m}{n}$, für welchen $m + nx = 0$ wird, nicht im Integrationsintervall (a, z) liegen darf.

Man hat also u. a.:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(m+nx)^2} = \frac{2}{m^2 - n^2} \text{ für } m^2 > n^2;$$

aber nicht für $m^2 \leqq n^2$, für welches Werthegebiet das Integral widersinnig ist, weil $\int_a^z \frac{dx}{(m+nx)^2}$ bei der Annäherung von z an $-\frac{m}{n}$ unendlich wächst.

VI. (§ 27.)

Zur Berechnung des Integrals

$$\int \frac{\sqrt[r]{1+x}}{(1+x)\left\{m\sqrt[r]{1-x} + n\sqrt[r]{1+x}\right\}^{r+1}} dx$$

setze man

$$\sqrt[r]{\frac{1+x}{1-x}} = u, \quad \frac{1+x}{1-x} = u^r, \quad x = \frac{u^r - 1}{u^r + 1} = 1 - \frac{2}{u^r + 1}$$

$$= 1 - 2(u^r + 1)^{-1}, \quad 1 - x = 2(u^r + 1)^{-1},$$

$$1 + x = 2u^r(u^r + 1)^{-1}, \quad dx = 2ru^{r-1}(u^r + 1)^{-2} \cdot du.$$

Dadurch verwandelt sich das Integral in:

$$\int \frac{2^{\frac{1}{r}} u (u^r + 1)^{-\frac{1}{r}}}{2u^r(u^r+1)^{-1}\left\{m \cdot 2^{\frac{1}{r}}(u^r+1)^{-\frac{1}{r}} + n \cdot 2^{\frac{1}{r}} u (u^r+1)^{-\frac{1}{r}}\right\}^{r+1}} \cdot 2ru^{r-1}(u^r + 1)^{-2} du$$

$$= \frac{1}{2} r \cdot \int \frac{du}{\{m + nu\}^{r+1}} = \frac{1}{2} r \cdot \int (m + nu)^{-r-1} \cdot du.$$

Setzt man ferner in dem letzten Ausdruck

$$m + nu = v, \quad ndu = dv, \quad du = \frac{1}{n} \cdot dv,$$

so geht derselbe über in:

$$\frac{r}{2n} \cdot \int v^{-r-1} dv = \frac{r}{2n} \cdot \frac{v^{-r}}{-r} + C = -\frac{1}{2n(m+nu)^r} + C$$

$$= -\frac{1}{2n\left\{m + n\sqrt[r]{\frac{1+x}{1-x}}\right\}^r} + C.$$

Mithin ist:

$$\int \frac{\sqrt[r]{1+x}}{(1+x)\left\{m\sqrt[r]{1-x}+n\sqrt[r]{1+x}\right\}^{r+1}}\,dx$$

$$=-\frac{1-x}{2n\cdot\left\{m\sqrt[r]{1-x}+n\sqrt[r]{1+x}\right\}^{r}}+C.$$

Im Besondern ergiebt sich hieraus, wenn man festsetzt, dass unter $\sqrt[r]{1\pm x}$ der positive Werth der Wurzel verstanden werden soll:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[r]{1+x}}{(1+x)\cdot\left\{m\sqrt[r]{1-x}+n\sqrt[r]{1+x}\right\}^{r+1}}\,dx=\frac{1}{2n\,(m+n)^r},$$

nur dass $\left(-\frac{n}{m}\right)$ keine zwischen 0 und (+1) liegende Zahl sein darf.

Auch ist

$$\int_{-1}^0 \frac{\sqrt[r]{1+x}}{(1+x)\cdot\left\{m\sqrt[r]{1-x}+n\sqrt[r]{1+x}\right\}^{r+1}}\,dx=\frac{(m+n)^r-m^r}{2nm^r\,(m+n)^r},$$

wo $\left(-\frac{m}{n}\right)$ keine zwischen 0 und (+1) liegende Zahl sein darf; und:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt[r]{1+x}}{(1+x)\cdot\left\{m\sqrt[r]{1-x}+n\sqrt[r]{1+x}\right\}^{r+1}}\,dx=\frac{1}{2nm^r},$$

wo die Zahlen m und n gleiche Vorzeichen besitzen müssen.

Hieraus folgt für $m=1$ der Ausdruck

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt[r]{1+x}}{(1+x)\cdot\left\{\sqrt[r]{1-x}+n\cdot\sqrt[r]{1+x}\right\}^{r+1}}\,dx=\frac{1}{2n},\quad (n>0),$$

welcher in so fern merkwürdig ist, als er von r gar nicht abhängt. — Das Gleiche gilt von dem Integral mit den Grenzen 0 und 1, wenn man in ihm $m+n=1$ macht.

VII. (§ 25.)

Behandelt man im folgenden Integral zunächst den Factor x als constant, so ergiebt sich die Entwickelung:

$$\int x(a+x)^n dx = x\int (a+x)^n dx - \int \left(dx \int (a+x)^n dx\right)$$
$$= x \cdot \frac{(a+x)^{n+1}}{n+1} - \int \frac{(a+x)^{n+1}}{n+1} dx$$
$$= \frac{x(a+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(a+x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + C$$

ausser für $n = -1$ und $n = -2$.

VIII. (§ 25.)

$$\int x^r (a+x)^n dx = x^r \int (a+x)^n dx - \int \left(r x^{r-1} dx \int (a+x)^n dx\right)$$
$$= \frac{x^r (a+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{r}{n+1} \cdot \int x^{r-1} (a+x)^{n+1} dx.$$

Wendet man diese Formel wiederholt auf sich selbst an, so erhält man, falls r eine ganze positive Zahl ist, schliesslich:

$$\int x^r (a+x)^n dx$$
$$= \frac{x^r (a+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{r x^{r-1} (a+x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{r(r-1) x^{r-2} (a+x)^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^r \cdot \frac{r(r-1)(r-2)\cdots 1 \cdot x^0 (a+x)^{n+r+1}}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+r)(n+r+1)},$$

nur darf n keine Zahl aus der Reihe $-1, -2, -3, \ldots, -r, -r-1$ sein.

Um darauf aufmerksam zu machen, dass die Transformationen vermittelst der Sätze des § 25 nicht selten zu bemerkenswerthen analytischen Gleichungen führen, denken wir uns $a = 0$ gemacht. Dann ist die rechte Seite der letzten Gleichung ohne Integrationsconstante der präcise Ausdruck des Integrals zwischen den Grenzen 0 und x, falls $n + r + 1 > 0$ angenommen wird. Andrerseits hat dasselbe Integral aber auch den Werth:

$$\int_0^x x^r \cdot x^n dx = \int_0^x x^{r+n} dx = \frac{x^{n+r+1}}{n+r+1}.$$

Mithin ergiebt sich aus der Vergleichung beider Ausdrücke, wobei wir der besseren Übersicht wegen noch n für $(n+1)$ schreiben wollen:

$$\frac{1}{n+r}=\frac{1}{n}-\frac{r}{n(n+1)}+\frac{r(r-1)}{n(n+1)(n+2)}-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^r\cdot\frac{r(r-1)\cdots 1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}.\quad [1])$$

Ihrer Ableitung nach ist diese Gleichung nur für den Fall bewiesen, dass $(n+r)>0$ ist.

Bedenkt man aber, dass sie durch die Multiplication mit $n(n+1)(n+2)\cdots(n+r)$ in eine solche Gleichung r^{ten} Grades für die Unbekannte n übergeht, welche für mehr als r Werthe von n gilt — denn sie gilt für jeden Werth von n, welcher $>-r$ ist — so muss sie eine analytische Gleichung sein, d. h.: sie muss für jeden ganz beliebigen Werth von n gelten, für welchen die vorgeschriebenen Rechnungsoperationen einen Sinn haben. [2])

---

[1]) Übrigens ist diese Formel nicht wesentlich von § 30,(14) verschieden.

[2]) Der Beweis des Lehrsatzes

„Jede Gleichung r^{ten} Grades, welche mehr als r Wurzeln besitzt, ist eine analytische. Nimmt man die gleich hohen Potenzen der Unbekannten zusammen, so verschwinden sämmtliche Coefficienten."

lässt sich u. a. so führen:

Substituirt man in der Gleichung

$$a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + a_{r-2} x^{r-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

für x nach der Reihe die als bekannt vorausgesetzten $(r+1)$ Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r, x_{r+1}$ dieser Gleichung, so entstehen $(r+1)$ Gleichungen, aus welchen man sich vornehmen kann die $(r+1)$ Coefficienten $a_r, a_{r-1}, a_{r-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ zu berechnen.

Giebt man — entgegen unserer Behauptung — die Möglichkeit zu, dass irgend einer unter ihnen (a_μ) nicht $=0$ sei, so liefern die $(r+1)$ Gleichungen dadurch, dass man sie sämmtlich mit dem nun als Divisor verwendbaren a_μ dividirt, $(r+1)$ neue Gleichungen von der Form:

$$\frac{a_r}{a_\mu}\cdot x^r+\frac{a_{r-1}}{a_\mu}\cdot x^{r-1}+\cdots+\frac{a_{\mu+1}}{a_\mu}\cdot x^{\mu+1}+x^\mu+\frac{a_{\mu-1}}{a_\mu}\cdot x^{\mu-1}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{a_1}{a_\mu}\cdot x+\frac{a_0}{a_\mu}=0.$$

In diesen sind die x bekannt; und es käme nun darauf an, die r Coefficienten

$$\frac{a_r}{a_\mu},\ \frac{a_{r-1}}{a_\mu},\ \ldots,\ \frac{a_{\mu+1}}{a_\mu},\ \frac{a_{\mu-1}}{a_\mu},\ \ldots,\ \frac{a_1}{a_\mu},\ \frac{a_0}{a_\mu}$$

so zu berechnen, dass sie $(r+1)$ Gleichungen genügen, von denen keine

IX. (§ 25.)

$$\int (a+x^2)^r x^n dx = (a+x^2)^r \cdot \int x^n dx - \int \left(2rx(a+x^2)^{r-1} dx \int x^n dx\right)$$
$$= \frac{(a+x^2)^r x^{n+1}}{n+1} - \frac{2r}{n+1} \cdot \int (a+x^2)^{r-1} x^{n+2} dx$$

Aus dieser Formel folgt, wenn man sie recursiv benutzt, für jede ganze positive r:

$$\int (a+x^2)^r x^n dx$$
$$= \frac{(a+x^2)^r x^{n+1}}{n+1} - \frac{2r \cdot (a+x^2)^{r-1} x^{n+3}}{(n+1)(n+3)} + \frac{2r \cdot 2(r-1) \cdot (a+x^2)^{r-2} x^{n+5}}{(n+1)(n+3)(n+5)} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^r \cdot \frac{2r \cdot 2(r-1) \cdot 2(r-2) \cdots 2 \cdot (a+x^2)^0 x^{n+2r+1}}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7) \cdots (n+2r+1)}.$$

X. (§ 25.)

$$\int \frac{1-3x}{\sqrt{1-2x}} dx = (1-3x) \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}} - \int \left(-3dx \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}\right).$$

Führt man $1-2x = u$, $x = \frac{1}{2}(1-u)$, $dx = -\frac{1}{2} du$ ein, so folgt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -u^{\frac{1}{2}}.$$

Mithin ergiebt sich:

$$\int \frac{1-3x}{\sqrt{1-2x}} dx = -(1-3x)u^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du$$
$$= -(1-3x)u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= -(1-3x)\sqrt{1-2x} + (1-2x)\sqrt{1-2x} + C$$
$$= x\sqrt{1-2x} + C.$$

§ 29.

Partielle Integration.

Wir wollen schliesslich noch einen Satz ableiten, welcher die Analogie zu dem in § 9 besprochenen Verfahren der partiellen

---

aus den andern folgt. Da dies unmöglich ist, so müssen die Coefficienten $a_r, a_{r-1}, \ldots, a_1, a_0$ sämmtlich $= 0$ sein.

Dass man dann für das x der vorgelegten Gleichung jeden beliebigen Werth setzen darf, ist selbstverständlich.

Differentiation in der Integralrechnung herstellt und die meisten Sätze des vorliegenden Capitels als besondere Fälle umfasst oder wenigstens zu ihrer Herleitung benutzt werden könnte.

Wir haben ihn nicht an die Spitze des Capitels gestellt, wie den analogen Satz über die Differentiation, einerseits weil seine Anwendung auf die einfachsten besonderen Functionsformen keinen praktischen Vorzug vor dem directen Zurückgreifen auf die Differentiationssätze haben dürfte, andrerseits weil es in der Integralrechnung an einem hergebrachten präcisen und bequemen Zeichen für partielle Integrale fehlt. Wir wollen sie durch ∂ anstatt d im Differential andeuten.

Der Satz lautet:

Lehrsatz.

Bedeutet $f(u,x)$ eine Function von u und x, in welcher u wieder eine Function von x ist, so gilt die Gleichung:

$$(1)\quad \int f(u,x)\,dx = \int f(u,x)\,\partial x - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \cdot \int f(u,x)\,\partial x \right\} \frac{du}{dx}\,dx.$$

Das soll heissen: Bei der Integration einer Function kann man zunächst einen beliebigen variabeln Bestandtheil derselben als constant behandeln und dann den Fehler dadurch ausgleichen, dass man von dem vorgeblichen Resultat das Integral derjenigen Function subtrahirt, welche die Derivirte dieses Resultats sein würde, wenn in ihm nur der als constant behandelte Bestandtheil variabel wäre.

Zum Zweck der bequemeren Schreibweise beim Beweise benennen wir das partielle Integral von $f(u,x)$ nach x mit $\varphi(u,x)$, setzen also

$$\int f(u,x)\,\partial x = \varphi(u,x),$$

mithin:

$$f(u,x) = \frac{\partial \varphi(u,x)}{\partial x}.$$

Es liegt uns demnach ob, den Beweis für die Gleichung

$$\int \frac{\partial \varphi(u,x)}{\partial x} \cdot dx = \varphi(u,x) - \int \frac{\partial \varphi(u,x)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx$$

zu erbringen.

Die vollständige Derivirte der rechten Seite nach x ist

$$= \frac{d\varphi(u,x)}{dx} - \frac{\partial\varphi(u,x)}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \left\{\frac{\partial\varphi(u,x)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(u,x)}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}\right\} - \frac{\partial\varphi(u,x)}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{\partial\varphi(u,x)}{\partial x},$$

und diejenige der linken Seite ist eben so gross.

Folglich gilt die obige Gleichung nach dem Satze, dass gleiche Functionen gleiche Integrale haben.

Dass der Lehrsatz II des § 25 in der That hieraus folgt durch die Absonderung eines zunächst als constant zu behandelnden Factors, fällt von selbst in die Augen.

Will man den Satz über die Integration einer Potenz auf die hier beregte Weise deduciren, so kann man, nachdem § 25, (1) bewiesen ist, schliessen:

$$\int x^n dx = x^n \int dx - \int \left(n x^{n-1} dx \int dx\right) = x^n \cdot x - n \cdot \int x^n dx,$$

$$(n+1)\cdot\int x^n dx = x^{n+1}.$$

Die Verallgemeinerung unseres obigen Satzes (1), welche sich in der Form

$$(2) \quad \int f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)\, dx = \int f(u_1, \ldots, u_n, x)\, \partial x - \sum_{r=1}^{r=n} \int \left\{\frac{\partial}{\partial u_r} \cdot \int f(u_1, \ldots, u_n, x)\, \partial x\right\} \frac{du_r}{dx} dx$$

darstellen lässt, ist nur eine scheinbare, da sie aus (1) ohne Weiteres folgt.

Der Nutzen des obigen allgemeinsten Satzes über die Transformation der Integrale tritt (abgesehn von seiner Verwendung bei der Integration der Differentialgleichungen) besonders dann hervor, wenn ein Factor der zu integrirenden Function die Derivirte des andern Factors sein würde, falls ein Bestandtheil des letzteren constant wäre. Denn wenn man das x der Formel (1) durch v bezeichnet, sobald x nicht als unabhängige Variable angesehn wird, so kann man dieselbe auch so schreiben:

$$(3) \quad \int f(u,v)\, dx = \int f(u,v)\, \partial v - \int \left\{\frac{\partial}{\partial u} \cdot \int f(u,v)\, \partial v\right\} \frac{du}{dx} dx;$$

wobei u in v eingeschachtelt sein darf.

Beispielsweise ergiebt sich sofort

$$\int x(x^2+2ax+b)^n dx = \frac{(x^2+2ax+b)^{n+1}}{2(n+1)} - a\cdot\int (x^2+2ax+b)^n dx,$$

wenn man in der Klammer zunächst das x des Summanden 2ax als constant = u behandelt. Denn dann ist:

$$\int x(x^2+2au+b)^n\cdot \partial x = \frac{1}{2}\int (x^2+2au+b)^n\cdot d(x^2+2au+b) \cdot\cdot \S 27.$$

$$= \frac{(x^2+2au+b)^{n+1}}{2(n+1)} \ldots\ldots\ldots\ldots \S 26.$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\cdot\int x(x^2+2au+b)^n \partial x = \frac{\partial}{\partial u}\cdot\left\{\frac{(x^2+2au+b)^{n+1}}{2(n+1)}\right\}$$

$$= a\cdot(x^2+2au+b)^n\cdot$$

Mit dem Integral $\int (x^2+2ax+b)^n dx$ werden wir uns später zu beschäftigen haben; seine Auswerthung an dieser Stelle wäre nur für wenige besondere numerische Werthe von n möglich.

Der Grund dafür, dass es der neuesten Zeit vorbehalten war, den obigen Satz zum ersten Male auszusprechen[1]), wird darin zu suchen sein, dass man in der That mit seinem Specialfall § 25 überall zum Resultat gelangen kann, wo die Auswerthung der Integrale durch Elementarfunctionen und die Reduction der Integrale auf einander durch Elementarfunctionen als Mittelglieder möglich geworden ist.

Capitel VIII.

Mehrfache Differentiation und Integration.

§ 30.

Mehrfache Differentiation nach einer Variabeln; direct und vermittelst einer Mittelfunction. Vertauschung der Variabeln.

Definition.

Man bezeichnet

(1) $\frac{d f'(x)}{dx} = f''(x), \quad \frac{d f''(x)}{dx} = f'''(x), \ldots, \quad \frac{d f^{(r)}(x)}{dx} = f^{(r+1)}(x)$

und nennt $f^{(r)}(x)$ die **rte Derivirte von $f(x)$ nach** x. Auch wird häufig das Zeichen

(2) $$\frac{d^r f(x)}{dx^r} = f^{(r)}(x)$$

[1]) Er ist zum ersten Male im vorigen Jahre aus einem Briefe von mir an Herrn Schlömilch in dessen Journal abgedruckt.

gebraucht, und zuweilen in Absicht auf die Symmetrie von Formeln

(3) $$f(x) = f^{(0)}(x) = \frac{d^0 f(x)}{dx^0}$$

geschrieben.

Beispiele.

I. Ist
$$f(x) = x^n,$$
so folgt aus § 14 (1) und § 7 (3) successive:
$$f'(x) = n x^{n-1},$$
$$f''(x) = n(n-1) x^{n-2},$$
$$f'''(x) = n(n-1)(n-2) x^{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(r)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n+1-r) x^{n-r}.$$

Bedient man sich der in der Arithmetik ganz allgemein gebräuchlichen Zeichen

(4) $r! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots r$, ... („r Facultät),

(5) $\binom{n}{r} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\frac{n+1-r}{r}$, . . . („n tief r"),[1]

so stellt sich daher die r^{te} Derivirte von x^n nach x für jedes n in den folgenden Formen dar:

(6) $$\frac{d^r(x^n)}{dx^r} = n(n-1)(n-2)\cdots(n+1-r) x^{n-r}$$
$$= r!\binom{n}{r} x^{n-r},$$

welche Nummer man auch für r setzen mag.

---

[1]) Eine sehr wichtige Gleichung zwischen den „Tieffunctionen" $\binom{n}{r}$ ist die hier abgeleitete:
$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\frac{n+1-r}{r}\left\{1 + \frac{n+1-(r+1)}{r+1}\right\}$$
$$= \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\frac{n+1-r}{r}\cdot\frac{n+1}{r+1},$$
$$= \frac{n+1}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n-1}{3}\cdots\frac{n+2-r}{r}\cdot\frac{n+2-(r+1)}{r+1};$$
d. i. nach (5):

(11) $$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Das Zeichen $\binom{n}{0}$ hat nach der Definitionsgleichung (5) keinen Sinn; man

Hat im Besondern n einen ganzen positiven Werth, so ist:

(7) $$\frac{d^r(x^r)}{dx^r} = r!,$$

(8) $$\frac{d^{r+k}(x^r)}{dx^{r+k}} = 0, \ (k > 0);$$

denn es folgt aus (5):

(9) $$\binom{r}{r} = 1,$$

(10) $$\binom{r}{r+k} = 0, \ (k > 0).$$

II. Es ist:

$$\frac{d^r\{(ax+b)^n\}}{dx^r} = r!\binom{n}{r} a^r \cdot (ax+b)^{n-r},$$

weil bei jeder einzelnen Differentiation nach § 8

$$\frac{d\{(ax+b)^m\}}{dx} = \frac{d\{(ax+b)^m\}}{d(ax+b)} \cdot \frac{d(ax+b)}{dx} = m(ax+b)^{m-1} \cdot a$$

hervorgeht.

---

benutzt es aber in der Bedeutung

(12) $$\binom{n}{0} = 1,$$

um die Gleichung (11) noch für $r = 0$ verwenden zu können. — Diese geht dann nämlich in die identische Gleichung $\binom{n}{0} + n = n+1$ über.

Ist endlich n eine ganze positive Zahl, so kann man

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdots \frac{n+1-r}{r} \cdot \left(\frac{n-r}{n-r} \cdot \frac{n-r-1}{n-r-1} \cdots \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1}\right),$$

also

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

darstellen, weshalb dann

(13) $$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

ist. Substituirt man in (11) für n nach und nach $r, r+1, r+2, \ldots, n$ und addirt alle so erhaltenen Gleichungen, so folgt das wichtige Resultat:

(14) $$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

III. Es ist
$$\frac{d^r f(x)}{\{d(ax+b)\}^r}=\frac{f^{(r)}(x)}{a^r};$$
denn man erhält bei jeder einzelnen Differentiation nach § 8:
$$\frac{d f^{(m)}(x)}{d(ax+b)}=\frac{d f^{(m)}(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{d(ax+b)}=f^{(m+1)}(x)\cdot\frac{1}{a}\cdot$$

Lehrsatz.

Will man bei der mehrmaligen Differentiation von y nach x nicht direct nach x differentiiren, sondern eine Mittelfunction u einschieben, setzt man also:

(15) $$y=f(u),\ u=\varphi(x),$$

so erhält man nach und nach:

(16) $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot u',$$

(17) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$=f''(u)\cdot u'^2+f'(u)\cdot u'',$$

(18) $$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y}{du^3}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^3+3\cdot\frac{d^2y}{du^2}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^3u}{dx^3}$$
$$=f'''(u)\cdot u'^3+3\cdot f''(u)\cdot u'\cdot u''+f'(u)\cdot u''',$$

u. s. w.

und allgemein:

(19) $$\frac{d^n y}{dx^n}=f^{(n)}(u)\cdot\Phi_n(x)+f^{(n-1)}(u)\cdot\Phi_{n-1}(x)+\cdots+f'(u)\cdot\Phi_1(x),$$

wo die durch $\Phi_r(x)$ bezeichneten Functionen nur von den Derivirten der Mittelfunction $u=\varphi(x)$ abhängen, nicht aber von der Function $f(u)$.

Die Gültigkeit dieses Satzes erhellt sofort aus § 8, § 11 und § 12. Mit der allgemeinen Auswerthung der Coefficienten $\Phi_r(x)$ in (19) wollen wir uns hier nicht befassen, weil man von ihren independenten Ausdrücken nur in seltenen Fällen Gebrauch zu machen hat. — Dass $\Phi_n(x)=u'^n$, $\Phi_1(x)=u^{(n)}$ ist, sieht man auf der Stelle. — Das Letztere ist in den Beispielen II und III benutzt. — Die andern Functionen $\Phi_r(x)$ ergeben sich verhältniss-

mässig leicht, wenn man die Function $f(u)$, von welcher sie nicht abhängen, in geeigneter Weise specialisirt.[1])

Macht man in den obigen Formeln $y = x$, so hat dies die Bedeutung, dass $x = f(u)$ und $u = \varphi(x)$ als inverse Functionen von einander betrachtet werden. Dann gehen die Formeln (16), (17), (18) u. s. w. über in:

$$1 = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

$$0 = \frac{d^2x}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dx}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2},$$

$$0 = \frac{d^3x}{du^3} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^3 + 3 \cdot \frac{d^2x}{du^2} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dx}{du} \cdot \frac{d^3u}{dx^3},$$

u. s. w.

Berechnet man aus ihnen die Derivirten von x nach u und schreibt dann y für u, so erhält man den

Zusatz.

Vertauscht man bei der wiederholten Differentiation die **unabhängige** Variable mit der **abhängigen**, so muss man setzen:

$$(20) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x' = \frac{1}{y'};$$

$$(21) \qquad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad x'' = -\frac{y''}{y'^3};$$

$$(22) \qquad \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3 \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^3y}{dx^3}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^5}, \quad x''' = \frac{3y''^2 - y'y'''}{y'^5};$$

u. s. w.

---

[1]) Über das Nähere: Hoppe „Theorie der höheren Differentialquotienten. Leipzig, 1845." und Schlömilch „Vorlesungen über einzelne Theile der h. Anal. Bd. II. Braunschweig, 1874."

Anmerkung.

Der Satz, dass man das Zeichen $\frac{dy}{dx}$ formal wie einen Bruch behandeln kann (§ 8), weil

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ist, lässt sich auf die Derivirten von einer höheren Ordnung nicht ausdehnen; denn schon die Formel (17) über die zweite Derivirte, nämlich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2},$$

hat bereits jede Analogie mit Sätzen der Bruchrechnung verloren, da der Versuch einer solchen Behandlung den Widerspruch

$$d^2y = d^2y + \frac{dy}{du} \cdot d^2u$$

ergeben würde.

Man spricht dies in der Regel so aus: „Es giebt kein allgemeines Differential ($d^n y$) von einer höheren Ordnung als der ersten."

§ 31.

Der Leibnitzsche Satz.[1])

Differentiirt man die Gleichung

$$(1) \qquad f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

n mal nach x, so lässt sich das Differentiationsresultat in folgenden Formen darstellen:

$$(2) \quad f^{(n)}(x) = \varphi(x)\psi^{(n)}(x) + \binom{n}{1}\varphi'(x)\psi^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}\varphi''(x)\psi^{(n-2)}(x) + \cdots$$
$$\cdots + \binom{n}{r}\varphi^{(r)}(x)\,\psi^{(n-r)}(x) + \cdots + \binom{n}{n}\varphi^{(n)}(x)\,\psi(x),$$

$$(3) \quad \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \varphi(x) \cdot \frac{\psi^{(n)}(x)}{n!} + \frac{\varphi'(x)}{1!} \cdot \frac{\psi^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{\varphi''(x)}{2!} \cdot \frac{\psi^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\varphi^{(r)}(x)}{r!} \cdot \frac{\psi^{(n-r)}(x)}{(n-r)!} + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}\psi(x)$$

oder:

---

[1]) Benannt nach Leibnitz, dem Erfinder der Differential- und Integralrechnung (1646 — 1716).

$$(4)\quad f_n(x)=\varphi_0(x)\cdot\psi_n(x)+\varphi_1(x)\cdot\psi_{n-1}(x)+\varphi_2(x)\cdot\psi_{n-2}(x)+\cdots$$
$$\cdots+\varphi_r(x)\cdot\psi_{n-r}(x)+\cdots+\varphi_n(x)\cdot\psi_0(x);$$

wo zuletzt der besseren Uebersicht wegen die abkürzende Bezeichnung

$$(5)\qquad F_n(x)=\frac{F^{(n)}(x)}{n!},\quad F_0(x)=F(x)$$

gebraucht ist.

Beweis. Gilt die Gleichung (2) für irgend eine Nummer n, so geht aus ihr durch Differentiation die Gleichung

$$f^{(n+1)}(x)$$
$$=\varphi(x)\psi^{(n+1)}(x)+\left[1+\binom{n}{1}\right]\varphi'(x)\psi^{(n)}(x)+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]\varphi''(x)\psi^{(n-1)}(x)$$
$$+\cdots+\left[\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}\right]\varphi^{(r+1)}(x)\psi^{(n-r)}(x)+\cdots+\binom{n}{n}\varphi^{(n+1)}(x)\psi(x),$$

d. i. nach § 30 (11), (12) und (9) die Gleichung

$$f^{(n+1)}(x)$$
$$=\varphi(x)\psi^{(n+1)}(x)+\binom{n+1}{1}\varphi'(x)\psi^{(n)}(x)+\binom{n+1}{2}\varphi''(x)\psi^{(n-1)}(x)+\cdots$$
$$\cdots+\binom{n+1}{r+1}\varphi^{(r+1)}(x)\psi^{(n-r)}(x)+\cdots+\binom{n+1}{n+1}\varphi^{(n+1)}(x)\psi(x)$$

hervor, welche sich von (2) nur dadurch unterscheidet, dass $(n+1)$ an der Stelle von n steht.

Nun gilt aber die Gleichung (2) nach § 12 für $n=1$. Also gilt sie, wie wir so eben gesehn haben, auch für $n=2$, mithin auch für $n=3$, mithin auch für $n=4$, u. s. w.: überhaupt für jede Nummer n.[1])

Die Formeln (3) und (4) ergeben sich aus (2) unmittelbar durch die Substitution aus § 30 (13).

---

[1]) Die hier benutzte Art des Beweises heisst „der Schluss von n auf (n+1)“ oder die „Bernoullische Schlussweise“ nach Johann Bernoulli (1667—1748), welchem namentlich die Integralrechnung sehr viel verdankt.

§ 32.

Mehrfache Differentiation nach verschiedenen unabhängigen und abhängigen Variabeln, so wie der unentwickelten Gleichungen.

Definition:

Unter einer **partiellen Derivirten r^{ter} Ordnung** von der Function $f(u, v, \ldots, w)$ versteht man jeden Ausdruck, welcher aus ihr durch r-malige partielle Differention nach einem oder nach mehreren von den Argumenten $u, v, \ldots, w$ hervorgegangen ist.

Lehrsatz I.

Sind die partiellen Derivirten $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}$ und $\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$ an der Stelle (u,v) nicht nur endlich bestimmt und sowohl beim gleichzeitigen als auch beim ungleichzeitigen Durchgange von u und v durch die Intervalle $(u, u+\Delta u)$, $(v, v+\Delta v)$ stetig, sondern ist auch jede von ihnen nach der Variabeln der andern in der Richtung von deren Intervall partiell differentiirbar, so findet stets die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right)}{\partial u} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right)}{\partial v}$$

statt, d. h. m. a. W.: es ist dann für das schliessliche Resultat der doppelten Differentiation gleichgültig, in welcher Folge sie ausgeführt wurde, und man darf ohne Gefahr eines Fehlers

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\, \partial v} \text{ sowohl für } \frac{\partial\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right)}{\partial u} \text{ als auch für } \frac{\partial\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right)}{\partial v}$$

schreiben.

In andern Fällen kann man durch die Abänderung der Differentiationsfolge auf verschiedene oder unsinnige Resultate stossen.

Beweis. Wir bezeichnen der bequemeren Übersicht wegen:

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} = f_u'(u,v), \quad \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = f_v'(u,v).$$

Dann ist nach § 19 (3):

$$(3) \quad \int_u^{u+\varDelta u} f_u'(u,v)\,\partial u = f(u+\varDelta u, v) - f(u,v) = \varDelta u \cdot f_u'(u+\theta\cdot\varDelta u, v),$$

weil $f_u'(u,v)$ als eine sich durch das Intervall $(u, u+\varDelta u)$ hindurch stetig ändernde und demnach integrirbare Function von u vorausgesetzt ist.

Nun liegt ferner $(u+\theta\cdot\varDelta u)$ in dem Intervall $(u, u+\varDelta u)$, und die Voraussetzung besagt, dass bei einem solchen Werthe der Unabhängigen u die partielle Derivirte $f_u'(u,v)$ partiell nach v in der Richtung des Intervalls $(v, v+\varDelta v)$ differentiirt werden könne, so wie, dass ein Gleiches mit den Functionen $f(u+\varDelta u, v)$ und $f(u,v)$ vorgenommen werden darf. Daher ergiebt die Gleichung (3) durch partielle Differentiation nach v:

$$(4) \quad f_v'(u+\varDelta u, v) - f_v'(u,v) = \varDelta u \cdot \frac{\partial f_u'(u+\theta\cdot\varDelta u, v)}{\partial v}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die bisher als constant betrachtete Grösse $\varDelta u$ und lässt dann $\varDelta u$ unendlich abnehmen, so folgt die Gleichung,

$$\frac{\partial f_v'(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial f_u'(u,v)}{\partial v}$$

welche mit der Gleichung (1) der Behauptung übereinstimmt.

Dass den obigen Schlüssen die Begründung fehlt, wenn man von irgend einem Theile der Voraussetzung absieht, liegt auf der Hand. Es hält auch nicht schwer, Functionen $f(u,v)$ aufzustellen, für welche die Gl. (1) nicht gilt; nur sind dieselben keine algebraischen, weshalb wir hier kein Beispiel für die Ausnahme beibringen.

Lehrsatz II.

Werden bei mehrfach wiederholten Differentiationen von den partiellen Derivirten jedes Mal die im vorigen Lehrsatz aufgezählten Bedingungen erfüllt, so hängt die partielle Derivirte r^{ter} Ordnung

$$\frac{\partial^r f(u,v,\ldots,z)}{\partial u^\alpha\cdot\partial v^\beta\cdots\partial z^\gamma}, \quad (\alpha+\beta+\cdots+\gamma=r)$$

nicht von derjenigen Folge ab, in welcher die einzelnen Differentiationen ausgeführt sind.

Es lassen sich nämlich sämmtliche möglichen Folgen durch successive Permutation zweier benachbarten Operationen aus einer ersten Folge derselben herstellen.

Beispiele.

I. Wenn $f(u,v) = (a + uv^2)^n$ ist, so folgt:

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} = nv^2 (a + uv^2)^{n-1}, \quad \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = 2nuv (a + uv^2)^{n-1},$$

und aus jedem dieser beiden Ausdrücke:

$$\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\, \partial v} = 2nv (a + uv^2)^{n-1} + 2n(n-1) uv^3 (a + uv^2)^{n-2}$$

$$= 2nv (a + uv^2)^{n-2} \cdot (a + nuv^2).$$

Differentiirt man von neuem nach u, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial^3 f(u,v)}{\partial u^2\, \partial v} = 2n(n-1) v^3 (a + uv^2)^{n-3} \cdot (2a + nuv^2).$$

Dies folgt aber auch durch Differentiation von

$$\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2} = n(n-1) v^4 (a + uv^2)^{n-2}$$

nach v.

II. Wenn $f(u,v) = \frac{u-v}{u+v}$ genommen wird, so ist:

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} = \frac{2v}{(u+v)^2}, \quad \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = -\frac{2u}{(u+v)^2}.$$

Aus Beidem ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\, \partial v} = 2\frac{u-v}{(u+v)^3}.$$

Die Anwendbarkeit der obigen Sätze beschränkt sich übrigens nicht auf den Fall, dass die Argumente der Function $f(u, v, \ldots, z)$ in der That sämmtlich von einander unabhängig sind; wovon man sich sogleich überzeugt, wenn man bedenkt, dass nach § 9 jede Differentiation durch die partielle vermittelt werden kann.

In dieser Hinsicht allgemeine Formeln aufzustellen, unter welche sich sämmtliche einzelnen Fälle subsummiren lassen, empfiehlt sich wegen der Weitläufigkeit derselben nicht. Dagegen ist es nützlich, die allgemeine Anwendbarkeit des Verfahrens durch die Behandlung des wichtigsten Falles zu beleuchten.

Wir bemerken vorweg, dass es freisteht, sämmtliche Argumente der Function $f(u, v, \ldots z)$ als Functionen einer einzigen Variabeln t zu behandeln, mögen sie von einander abhängig sein, oder nicht. — Denn diejenigen unter ihnen, welche von einander abhängen, hängen auch von t ab, sobald es das eine thut, und man darf u. a. das t einem von ihnen gleichsetzen; dagegen sind die ausserdem noch vorhandenen Argumente gegen t constant, was in der Grundformel

$$\frac{d f(u, v, \ldots, z)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

die Wirkung hat, dass dasjenige Glied verschwindet, welches die Derivirte eines solchen unabhängigen Arguments nach t besitzt.

Aus diesen Erwägungen erhellt sofort die Gültigkeit der folgenden Sätze:

Lehrsatz III.

Bei einer Function von **zwei** Argumenten ist:

$$(3)\quad \frac{d f(u, v)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt},$$

$$(4)\quad \frac{d^2 f(u, v)}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{d^2 v}{dt^2},$$

$$(5)\quad \frac{d^3 f(u, v)}{dt^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial u^3} \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)^3 + 3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial v} \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \cdot \frac{dv}{dt} + 3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v^2} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)^3 + 3 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + 3 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \left\{\frac{du}{dt} \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{d^2 u}{dt^2} \cdot \frac{dv}{dt}\right\} + 3 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{d^3 v}{dt^3}.$$

Macht man t dem einen Argument v gleich,[1]) so gehen die Relationen (3), (4), (5) über in:

---

[1]) Dadurch wird $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dv} = 1$, $\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{d^2 v}{dv^2} = 0$, $\frac{d^3 v}{dt^3} = \frac{d^3 v}{dv^3} = 0$.

(6) $$\frac{d f(u,v)}{d v}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dv}+\frac{\partial f}{\partial v},$$

(7) $$\frac{d^2 f(u,v)}{d v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{du}{dv}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dv^2},$$

(8) $$\frac{d^3 f(u,v)}{d v^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}\cdot\left(\frac{du}{dv}\right)^3+3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial u^2\,\partial v}\cdot\left(\frac{du}{dv}\right)^2+3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial u\,\partial v^2}\cdot\frac{du}{dv}+\frac{\partial^3 f}{\partial v^3}$$
$$+3\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{d^2u}{dv^2}+3\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{d^2u}{dv^2}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{d^3u}{dv^3}.$$

Übrigens wird die Derivirte dritter Ordnung, welche wir in (5) und (8) dargestellt haben, schon selten gebraucht; wir haben sie hauptsächlich deshalb hierhergeschrieben, um zu zeigen, wie schnell die Ausdrücke sich verwickeln, und um eine instructive Differentiationsübung zu veranlassen.

Von wesentlichem Nutzen sind solche Differentiationen bei der Behandlung der sogenannten **unentwickelten** oder **impliciten** Gleichungen, d. h. derjenigen Gleichungen, welche erst für die abhängige Variable als Unbekannte aufgelöst werden müssen, um diese als Function ihrer Argumente analytisch darzustellen.

Es sei beispielsweise zwischen x und y die Gleichung

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

— die Mittelpunktsgleichung der Ellipse — gegeben. Aus ihr folgt:

$$b^2x+a^2y\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

$$b^2+a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a^2y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

was durch Elimination die Resultate

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}$$

auf einfachere Weise ergiebt, als wenn man zuvor

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

entwickelt und dann differentiirt hätte.

Bei complicirteren Gleichungen zwischen x und y springt der Nutzen noch mehr hervor, namentlich, wo deren allgemeine Auflösung schwierig oder unmöglich wird. Beispielsweise folgen aus

$$y^5 - 5axy + b = 0$$

durch partielle Differentiation die Relationen:

$$(y^4 - ax)\frac{dy}{dx} - ay = 0,$$

$$(y^4 - ax)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 4y^3\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a\cdot\frac{dy}{dx} = 0;$$

und aus diesen durch Elimination:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{y^4 - ax} = \frac{5ay^2}{4y^5 - b},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{50a^2y^3(6y^5 + b)}{(4y^5 - b)^3}.$$

§ 33.

Differentiation und Integration der Integrale nach Parametern.

Unter einem Parameter einer Function versteht man ein Argument, welches bei der Veränderung eines andern als constant angesehn wird.

Lässt sich die Function $f(x, y)$ nach dem Parameter y partiell differentiiren, so ist nach dem Begriff der Derivirten

$$(1) \qquad f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \cdot \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \varepsilon\right],$$

wo ε gleichzeitig mit Δy verschwindet, falls die Function

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \varphi(x, y)$$

durch Differentiation nach derjenigen Richtung gewonnen ist, welche durch das Vorzeichen des Δy angezeigt wird. War aber die Differentiationsrichtung die entgegengesetzte, so kann sehr wohl

$$\lim_{\Delta y = 0} \cdot \varepsilon = \eta$$

einen von Null verschiedenen Werth haben (§ 3).

Setzt man beispielsweise

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \varphi(x,y) = \left(x + \frac{1}{\mu + \nu^{\frac{1}{y}}}\right)^n,$$

$$f(x,y) = \int_0^y \varphi(x,y)\,dy = \int_0^y \left(x + \frac{1}{\mu + \nu^{\frac{1}{y}}}\right)^n dy,$$

wo $\nu > 1$ sei, so macht $\varphi(x,y)$ beim Uebergange des y aus dem Negativen ins Positive an der Stelle $y = 0$ einen Sprung von der Grösse

$$\eta = x^n - \left(x + \frac{1}{\mu}\right)^n,$$

obgleich $f(x,y)$ an derselben Stelle stetig und differentiirbar ist (§ 19); denn deutet man durch das Vorzeichen + oder — vor 0 an, von welcher Seite her y sich dem Grenzwerthe 0 nähern soll, so ist

$$\lim_{y=+0} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^n, \quad \lim_{y=-0} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left(x + \frac{1}{\mu}\right)^n;$$

und der zuletzt genannte Grenzwerth zeigt zugleich denjenigen Werth an, welchen $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ an der Stelle $y = 0$ annimmt, wenn $f(x,y)$ nach der Richtung der abnehmenden y differentiirt wird. Bedeutet nun das Δy einen positiven Zuwachs von y an der Stelle $y = 0$, so ergiebt die Gleichung (1):

$$f(x, \Delta y) - f(x, 0) = \Delta y \cdot \left[\left(x + \frac{1}{\mu}\right)^n + \varepsilon\right]$$

mit dem Werthe (vergl. § 19):

$$\varepsilon = \left(x + \frac{1}{\mu + \nu^{\frac{1}{\theta \cdot \Delta y}}}\right)^n - \left(x + \frac{1}{\mu}\right)^n, \quad (0 < \theta < 1),$$

$$\eta = \lim_{\Delta y = +0} \cdot \varepsilon = x^n - \left(x + \frac{1}{\mu}\right)^n.$$

Nach dieser Abschweifung auf ein Beispiel, durch welches die Wichtigkeit des Bedenkens über den Grenzwerth von ε beleuchtet wird, fahren wir in der allgemeinen Behandlung der Gleichung (1) fort.

Integrirt man die Gleichung (1) zwischen den von y unabhängigen Grenzen $x = a$ und $x = z$, so erhält man:

$$\int_a^z f(x, y + \Delta y)\, dx - \int_a^z f(x,y)\, dx = \Delta y \cdot \left[\int_a^z \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx + \int_a^z \varepsilon\, dx\right],$$

mithin:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^z f(x,y)\, dx = \int_a^z \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \lim_{\Delta y = 0} \cdot \int_a^z \varepsilon\, dx. \tag{2}$$

Es ist aber — wenigstens bei endlichen Integrationsgrenzen a und z —

$$\lim_{\Delta y = 0} \cdot \int_a^z \varepsilon\, dx = \int_a^z \eta\, dx,$$

wo η die oben schon eingeführte Bedeutung von $\lim\limits_{\Delta y = 0} \cdot \varepsilon$ hat.

Denn nehmen wir zunächst an, es sei $\eta = 0$ für jedes x des Intervalls (a, z), so folgt aus § 19, dass

$$\int_a^z \varepsilon\, dx = (z - a) \cdot E$$

gesetzt werden kann, wo E eine Zahl bedeutet, welche ihrem absoluten Betrage nach den grössten Werth von ε im Intervall (a, z) nicht übersteigt, also gleichzeitig mit ε verschwindet; dann ist

$$\eta = 0, \quad \lim_{\Delta y = 0} \cdot \int_a^z \varepsilon\, dx = \int_a^z \eta\, dx = 0.$$

Ist aber η entweder überall oder theilweise von Null verschieden, so hat man in Folge des so eben gewonnenen Resultats:

$$\lim_{\Delta y = 0} \cdot \int_a^z (\varepsilon - \eta)\, dx = 0, \quad \lim_{\Delta y = 0} \cdot \int_a^z \varepsilon\, dx = \int_a^z \eta\, dx.$$

Daher geht die Gleichung (2) über in:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^z f(x,y)\, dx = \int_a^z \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx + \int_a^z \eta\, dx. \tag{3}$$

Meistens hat man es nur mit Functionen zu thun, bei welchen $\eta = 0$ und demnach auch $\int_a^z \eta\, dx = 0$ ist.

Hieran schliessen sich dem Grade der Häufigkeit nach solche Functionen an, bei welchen η im Intervall (a, z) zwar generell $= 0$

ist, aber für getrennt von einander liegende Werthe von x einen andern endlichen Werth annimmt. Auch dann ist $\int\limits_a^z \eta\,dx = 0$. — Denn bedeutet ξ irgend einen solchen Werth von x, so kann man das ganze Integral in eine zählbare Anzahl von Summanden zerlegen, welche die Form

$$\int\limits_{\xi-\nu}^{\xi+\mu} \eta\,dx$$

haben und höchstens an einer Stelle ($x = \xi$) ein von Null verschiedenes η besitzen. Jeder einzelne von diesen Summanden hat dann nach § 19 den Werth

$$\int\limits_{\xi-\nu}^{\xi+\mu} \eta\,dx = (\mu + \nu) \cdot H, \quad (\text{abs} \cdot H < \text{abs} \cdot \eta)$$

bei beliebig kleinen Werthen von μ und ν, d. h.: den Werth Null; so dass auch das Gesammtintegral $= 0$ ist.

Übrigens verlieren die obigen Schlüsse ihre Gültigkeit, wenn die eine Integrationsgrenze z als unendlich gross angenommen wird, weil dann das Product $(z - a) \cdot E$ keinen Sinn mehr hat, so dass auch das Integral $\int\limits_a^z \varepsilon\,dx$ nicht gleichzeitig mit E zu verschwinden braucht.

Hiervon im nächsten §! — Das Resultat der bisherigen Untersuchung ist folgendes:

Lehrsatz I.

Ist in dem endlichen Intervall (a, z) sowohl $f(x, y)$ als auch

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \varphi(x, y)$$

integrirbar nach x, sind ferner die Integrationsgrenzen a und z unabhängig von y, und stimmen auch noch die Differentiationsrichtungen auf beiden Seiten der nächsten Gleichung überein, so ist stets:

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_a^z f(x, y)\,dx = \int\limits_a^z \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

Sieht man $\varphi(x,y)$ als die gegebene Function an, so ist

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\int_a^z \left\{\int_c^y \varphi(x,y)\,dy\right\} dx = \int_a^z \varphi(x,y)\,dx + \int_a^z \eta\,dx,$$

wo η den Grenzwerth des Sprunges bedeutet, welchen $\varphi(x,y)$ bei einer unendlich kleinen Veränderung von y im Sinne des ∂y etwa macht.

Das additionelle Integral $\int_a^z \eta\,dx$ ist $= 0$, falls η sich gar nicht oder nur für discrete[1]) Werthe des x endlich von Null unterscheidet.

Zusatz.

Ist z — aber nicht a — eine Function von y, und stimmen die Differentiationsrichtungen für y überall überein, so ist

$$\text{(6)} \qquad \frac{d}{dy}\int_a^z f(x,y)\,dx = \int_a^z \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + f(z,y)\,\frac{dz}{dy},$$

sobald nicht nur die Integrale, sondern auch $f(z,y)$ und $\frac{dz}{dy}$ völlig bestimmte Werthe haben.

Denn differentiirt man die Function

$$\int_a^z f(x,y)\,dx = F(z,y)$$

nach y, so ist nach § 9:

---

[1]) d. i. für solche Werthe des x, welche eine endliche Differenz haben. — Bei dem oben benutzten Beispiel ist an der Stelle $y = 0$ für positive dy:

$$\int_a^z \eta\,dx = \int_a^z \left\{x^n - \left(x + \frac{1}{\mu}\right)^n\right\} dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\left\{z^{n+1} - a^{n+1} - \left(z + \frac{1}{\mu}\right)^{n+1} + \left(a + \frac{1}{\mu}\right)^{n+1}\right\},$$

falls x^{n+1} und $\left(x + \frac{1}{\mu}\right)^{n+1}$ im Intervall (a, z) nirgends unendlich werden. Bei negativen Werthen von $(n+1)$ dürfen daher hier die Stellen $x = 0$ und $x = -\frac{1}{\mu}$ nicht zum Integrationswege gehören.

$$\frac{dF(z,y)}{dy} = \left[\frac{\partial F(z,y)}{\partial y}\right]_{z=\text{Const.}} + \frac{\partial F(z,y)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dy},$$

was in Verbindung mit (4) die Gleichung (6) ergiebt.

Sind a und z Functionen von y, so folgt demnach:

$$\frac{d}{dy} \cdot \int_a^z f(x,y)\,dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\int_a^z f(x,y)\,dx + \left[\frac{\partial}{\partial z}\int_c^z f(x,y)\,dx\right]\frac{dz}{dy} - \left[\frac{\partial}{\partial a}\int_c^a f(x,y)\,dx\right]\frac{da}{dy}$$

oder:

$$(7)\quad \frac{d}{dy} \cdot \int_a^z f(x,y)\,dx = \int_a^z \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + f(z,y) \cdot \frac{dz}{dy} - f(a,y) \cdot \frac{da}{dy}.$$

Aus der Gleichung (5) ergiebt sich noch sofort ein Satz über die Integration eines Integrals nach einem Parameter bei constanten Integrationsgrenzen.

Da nämlich aus der Gleichung

$$F(z,y) = \int_a^z \left\{\int_c^y \varphi(x,y)\,dy\right\} dx$$

nach (5) gefolgert wird, dass

$$\frac{\partial F(z,y)}{\partial y} = \int_a^z \varphi(x,y)\,dx + \int_a^z \eta\,dx$$

ist, so erlangt man vermittelst neuer Integration:

$$F(z,u) - F(z,c) = \int_c^u dy \int_a^z \varphi(x,y)\,dx + \int_c^u dy \int_a^z \eta\,dx.$$

Nun ist aber der Definition nach stets $F(z,c) = 0$; und ferner ist

$$\int_c^u dy \int_a^z \eta\,dx = 0,$$

falls das Integral $\int_a^z \eta\,dx$ höchstens für discrete Werthe des y sich endlich von Null unterscheidet.

Dies führt zu dem

Lehrsatz II.

Sind bei der successiven Integration einer Function nach zwei Parametern zwischen endlichen Grenzen auch

die Grenzen des einen Integrals unabhängig von denen des andern, so darf man die Folge der Integrationen vertauschen:

$$(8)\quad \begin{cases} \int_a^z \left\{ \int_c^u \varphi(x,y)\,dy \right\} dx = \int_c^u \left\{ \int_a^z \varphi(x,y)\,dx \right\} dy, \\ \int_a^z dx \int_c^u \varphi(x,y)\,dy \quad = \int_c^u dy \int_a^z \varphi(x,y)\,dx. \end{cases}$$

Jedoch ist dies nur dann verbürgt, wenn die Function $\varphi(x,y)$ höchstens eine zählbare Anzahl endlicher Sprünge macht, sobald man die eine Integrationsvariable unter Beibehaltung eines constanten Werthes der andern ihr Integrationsintervall stetig durchlaufen lässt.[1])

§ 34.

Ausdehnung der letzten Sätze auf Integrale mit unendlichen Grenzen.

Im vorigen § wurde der Fall eines unendlich grossen z ausgeschlossen, weil die Darstellung

$$\int_a^z \varepsilon\,dx = (z-a)\cdot E$$

hierbei nicht mehr angeht.

---

[1]) Stellt man sich x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene vor, so bedeutet $\varphi(x, y)$ den Werth einer Function φ, welcher an den fraglichen Punkt der Ebene geknüpft ist, und kann durch die zugehörige dritte Coordinate eines Raumpunktes veranschaulicht werden. Die Gesammtheit dieser Raumpunkte wird auf einer Fläche liegen, welche durch den Ausdruck $\varphi(x, y)$ charakterisirt ist; — und umgekehrt wird jede Fläche eine besondere Function $\varphi(x, y)$ anzeigen.

Das ganze Integrationsgebiet des obigen Doppelintegrals (d. i. alle oben zur Verwendung gebrachten Werthe von x und y) veranschaulicht dann der Plan eines Rechtecks, dessen zusammenstossende Seiten die Integrationswege (a, z) und (c, u) sind. Über diesem Rechteck liegt die betrachtete Fläche. Und das Doppelintegral (8) drückt in Folge der Bestimmungen der Stereometrie das Volumen desjenigen graden cylindrischen Körpers aus, von welchem besagtes Rechteck die Grundfläche ist, während die gegenüberliegende Begrenzung von der Fläche $\varphi(x, y)$ gebildet wird.

Ist $\varphi(x, y)$ in dem „Integrationsfelde" (a, z; c, y) überall stetig, so

Man kann aber die Integrale mit unendlichen Grenzen leicht auf solche mit endlichen Grenzen zurückführen, indem man eine geeignete neue Integrationsvariable, etwa

$$x = \frac{a}{1-t}, \quad dx = \frac{a\,dt}{(1-t)^2},$$

einsetzt. Dadurch geht hervor:

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dx = a \cdot \int_0^1 f\left(\frac{a}{1-t}, y\right) \cdot \frac{dt}{(1-t)^2}.$$

Und da wir hier jetzt rechts endliche Grenzen haben, so folgt nach den Resultaten des vorigen §:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^\infty f(x,y)\,dx = a \cdot \int_0^1 \frac{\partial f\left(\frac{1}{1-t}, y\right)}{\partial y} \cdot \frac{dt}{(1-t)^2}$$

oder:

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx;$$

so wie — gemäss der dortigen Gleichung (5):

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^\infty dx \int_c^y \varphi(x,y)\,dy = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^1 \frac{a\,dt}{(1-t)^2}\int_c^y \varphi\left(\frac{a}{1-t}, y\right) dy$$

$$= \int_0^1 \varphi\left(\frac{a}{1-t}, y\right)\frac{a\,dt}{(1-t)^2} + \int_0^1 \eta \frac{a\,dt}{(1-t)^2}$$

---

hängt die Fläche über demselben überall stetig zusammen. Dagegen zeigt die Fläche über etwa vorhandenen Linien des Parallelogramms, bei deren Überschreitung die Function $\varphi(x, y)$ endliche Sprünge macht, Schlitze mit verschieden hohen Rändern, und über einzeln liegenden Punkten dieser Art jähe Abstürze mit verticalen Kanten.

Das Integral $\int_a^z \varphi(x, y)\,dx$ misst die Flächenausdehnung eines verticalen und zur x-Axe parallelen Schnitts durch den Körper, $\int_a^z \eta\,dx$ die Differenz derselben gegen diejenige des Nachbarschnitts im Abstande dy. Das Integral $\int_a^z \eta\,dx$ ist daher von Null verschieden, wenn der Schnitt längs der beiden Ränder eines Schlitzes der Fläche verläuft; denn es giebt die Grösse der verticalen ebenen Fläche zwischen dessen Rändern an.

oder:

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial y}\int_a^\infty dx \int_c^y \varphi(x,y)\,dy = \int_a^\infty \varphi(x,y)\,dx + \int_a^\infty \eta\,dx.$$

Die einfache Zerlegung des Integrals $\int_a^\infty \eta\,dx$ nach Theilintervallen zeigt ferner, dass die für sein Verschwinden im § 33 ausgesprochene Bedingung auch hier genügt, nämlich die, dass η generell $=0$ sei oder nur für endlich verschiedene Werthe des x endlich von Null abweiche. Dann ist aber auch die Gleichung (8) des vorigen § bei unendlich grossen z und u gültig, wie dort bei endlichen.

Hiermit könnten wir die Besprechung unseres Themas beendet sein lassen, wenn es bei den meistens zu machenden Anwendungen nicht auch darauf anzukommen pflegte, erst festzustellen, ob die Integrale auf den rechten Seiten von (1) und (2) endliche Werthe besitzen, während bisher vorausgesetzt wurde, dass dies bekannt sei, so wie, ob die Veränderungen der Integrale als Functionen von y stetig vor sich gehn.

Um einen besonders häufig vorkommenden Fall dieser Art hervorzuheben, so sei die Function

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \varphi(x,y)$$

längs des ganzen Integrationsweges (a, z) bei der Veränderung von y stetig, und es mache

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}$$

höchstens endliche Sprünge $\lim_{\Delta y = 0} \cdot \varepsilon' = \eta'$. Dann kann man nach dem Begriff der Derivirten und des Integrals setzen:

$$\varepsilon = \varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x,y) = \Delta y \cdot \left[\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} + \varepsilon'\right],$$

$$(3)\qquad \int_a^\infty \varepsilon\,dx = \Delta y \cdot \int_a^\infty \left[\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} + \varepsilon'\right] dx \cdot$$

Der Grenzwerth dieses Ausdrucks bei unendlich kleinem Δy misst die mögliche Abweichung der rechten Seiten von (1) und (2) gegen die linken. Er ist jedenfalls dann $=0$, wenn das Integral

$$\int_a^\infty \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} dx$$

einen endlichen Werth nicht übersteigt und diese Eigenschaft bei der Veränderung von y um dy[1]) beibehält — das Letztere wegen des ε'.

Dies führt zu dem

Lehrsatz.

Übersteigt das Integral

$$\int_a^\infty \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} dx = \int_a^\infty \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} dx$$

nicht einen endlichen Werth, und behält es diese Eigenschaft bei, sobald y um dy geändert wird, so darf man die beiden Seiten der Gleichungen

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\int_a^\infty dx \int_c^y \varphi(x,y)\,dy = \int_a^\infty \varphi(x,y)\,dx,$$

$$(6) \qquad \int_a^\infty dx \int_c^u \varphi(x,y)\,dy = \int_c^u dy \int_a^\infty \varphi(x,y)\,dx$$

durch einander ersetzen; m. a. W.: dann ist es gleichgültig, in welcher Folge man die nach einander vorzunehmenden Differentiationen und Integrationen ausführt.

Anmerkung.

Die Einschränkungen, unter denen die willkürliche Veränderung der Folge der Integrationen und Differentiationen gestattet ist, werden in der Regel bei der Demonstration der einschlägigen Sätze nicht gebührend hervorgehoben aus dem rein praktischen Grunde, dass die Beispiele, welche man zunächst beibringen kann,

---

[1]) d. i. um ein Δy, welches man hinterher unendlich abnehmen lässt.

die Vorsicht meistens nicht erheischen. Denn so lange man es bloss mit algebraischen Functionen zu thun hat, findet man keinen Ausnahmefall, sondern diese stellen sich erst ein, wo Integrale von Exponentialfunctionen (mit complexen Argumenten) oder Integrale discontinuirlicher Functionen (Summen unendlicher Reihen — vergl. § 59) nach einem Parameter differentiirt werden sollen. Z. B. folgt aus der seinerzeit leicht zu erweisenden Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad (y \gtrless 0)$$

freilich, dass

$$\frac{\partial}{\partial y} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{x} dx = 0,$$

aber keineswegs, dass auch

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left[\frac{\sin(xy)}{x}\right] \cdot dx = 0$$

ist. Vielmehr hat das letztgenannte Integral, welches wegen der Relation $\frac{\partial}{\partial y} \cdot \left[\frac{\sin(xy)}{x}\right] = \cos(xy)$ mit dem Integral

$$\int_0^\infty \cos(xy)\, dx = \lim_{x=\infty} \cdot \frac{\sin(xy)}{y}$$

gleichbedeutend ist, gar keinen bestimmten Werth.

Und dies stimmt damit überein, dass die obige Formel (4) für $f(x,y) = \frac{\sin(x,y)}{x}$ nicht gilt, weil

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} dx = -\int_0^\infty x \sin(xy)\, dx$$

keinen endlichen Werth besitzt.

§ 35.

Mehrfache Integration nach einer Variabeln.

Substituirt man in der Formel § 33, (6) für $f(x,y)$ den Ausdruck $(y-x)^n \cdot f(x)$, so geht dieselbe über in

$$\frac{d}{dy}\int_a^z (y-x)^n f(x)\,dx = \int_a^z \frac{\partial\,[(y-x)^n f(x)]}{\partial y}\,dx + (y-z)^n f(z)\frac{dz}{dy}$$

$$= n\int_a^z (y-x)^{n-1} f(x)\,dx + (y-z)^n f(z)\frac{dz}{dy}.$$

Nimmt man nun z als die denkbar einfachste Function von y an, nämlich $z=y$, so ergiebt sich:

$$(1) \qquad \frac{d}{dy}\int_a^y (y-x)^n f(x)\,dx = n\cdot\int_a^y (y-x)^{n-1} f(x)\,dx$$

unter der alleinigen Bedingung, dass $n>0$ sei, und dass $f(y)$ einen endlichen Werth besitze.

Integrirt man diese Gleichung von $y=a$ bis $y=z$ — wo das neue z selbstverständlich einen andern Sinn hat, als das frühere — so geht hervor:

$$\int_a^z (z-x)^n f(x)\,dx - \int_a^a (a-x)^n f(x)\,dx$$

$$= n\int_a^z dy\int_a^y (y-x)^{n-1} f(x)\,dx, (n>0),$$

oder weil

$$\int_a^a (a-x)^n f(x)\,dx = 0$$

ist:

$$(2) \quad \int_a^z (z-x)^n f(x)\,dx = n\int_a^z dy\int_a^y (y-x)^{n-1} f(x)\,dx,\ (n>0).$$

Durch die wiederholte Anwendung dieser Gleichung auf ihre rechte Seite ergiebt sich:

$$\int_a^z (z-x)^n f(x)\,dx = n(n-1)\int_a^z dz_1\int_a^{z_1} dz_2\int_a^{z_2} (z_2-x)^{n-2} f(x)\,dx,$$

$$(n-1>0)$$

$$= n(n-1)(n-2)\int_a^z dz_1\int_a^{z_1} dz_2\int_a^{z_2} dz_3\int_a^{z_3} (z_3-x)^{n-3} f(x)\,dx,$$

$$(n-2>0)$$

u. s. w.;

überhaupt:

$$(3)\int_a^z (z-x)^n f(x)\,dx = r!\binom{n}{r}\int_a^z dz_1\int_a^{z_1} dz_2\int_a^{z_2}\cdots dz_r\int_a^{z_r}(z_r-x)^{n-r} f(x)\,dx$$

mit der Bedingung, dass

$$n+1-r>0$$

sei.

Zum Zwecke der einfacheren Bezeichnung bei wiederholter Integration nach einer Variabeln schreiben wir:

$$\int_a^z du\int_a^u \varphi(x)\,dx = \int_a^{u,z}\varphi(x)\,dx\cdot du,$$

$$\int_a^z du_2\int_a^{u_2} du_1\int_a^{u_1}\varphi(x)\,dx = \int_a^{u,z}\varphi(x)\,dx\cdot du^2,$$

$$\int_a^z du_3\int_a^{u_3} du_2\int_a^{u_2} du_1\int_a^{u_1}\varphi(x)\,dx = \int_a^{u,z}\varphi(x)\,dx\cdot du^3,$$

u. s. f.

Dies führt, weil die Gl. (3) sich nun in der Form

$$\int_a^z (z-x)^n f(x)\,dx = r!\binom{n}{r}\cdot\int_a^{u,z}(u-x)^{n-r} f(x)\,dx\cdot du^r$$

darstellt, durch die Vertauschung von n mit (n+r) zu folgendem

Lehrsatz.

Benutzt man die Bezeichnung

$$(4)\qquad \int_a^{u,z}\varphi(x)\,dx\cdot du^r = \int_a^z du_r\int_a^{u_r}\cdots du_2\int_a^{u_2} du_1\int_a^{u_1}\varphi(x)\,dx$$

für ein (r+1)-faches Integral, bei dessen Herleitung zuerst $\varphi(x)$ nach x, und dann jedes erhaltene Integral nach seiner oberen Grenze integrirt ist, während allen unteren Grenzen derselbe constante Werth a ertheilt wurde, so gilt stets die Gleichung

$$(5)\quad \int_a^{u,z}(u-x)^n f(x)\,dx\cdot du^r = \frac{1}{r!\binom{n+r}{r}}\cdot\int_a^z (z-x)^{n+r} f(x)\,dx,$$

falls $(n+1)>0$ und $f(x)$ im Intervall (a, z) endlich ist.

Für $n=0$ ergiebt sich im Besondern:

$$(6)\qquad \int_a^{u,z} f(x)\,dx\cdot du^r = \frac{1}{r!}\int_a^z (z-x)^r f(x)\,dx.$$

Wenn endlich in (5) für $f(x)$ ein constanter Werth gesetzt, und $(r-1)$ für r geschrieben wird, so ergiebt sich aus (5) noch:

$$(7)\qquad \int_a^{u,z} (u-x)^n\,dx\cdot du^{r-1} = \frac{(z-a)^{n+r}}{r!\binom{n+r}{r}},$$

falls n der Bedingung $n+1>0$ genügt.

Die Relationen (5) und (6) sind für die wiederholte Integration nach einer Variabeln äusserst wichtig, weil sie das vielfache Integral durch ein einfaches ausdrücken, wie auch umgekehrt.

In demjenigen Fall, in welchem die unteren Grenzen verschiedene Werthe haben, werden die Formeln etwas complicirter.

Denn integrirt man die Gleichung (1) zwischen $y=b$ und $y=z$, so ergiebt sich:

$$\int_a^z (z-x)^n f(x)\,dx$$
$$= \int_a^b (z-x)^n f(x)\,dx + n\int_b^z dy\int_a^y (y-x)^{n-1} f(x)\,dx,\ (n>0);$$

wo das erste Integral der rechten Seite eine bei jeder ferneren Integration constante Grösse bedeutet, da es nur von den unteren Grenzen a und b abhängt. Macht man daher die analoge Substitution aus dieser Gleichung in sich selbst, wie (3) aus (2) abgeleitet wurde, so erkennt man leicht, dass das allgemeine Integral, welches wir durch das Weglassen der unteren Grenzen andeuten wollen, sich in der Form

$$(8)\quad \int^{u,z} (u-x)^n f(x)\,dx\cdot du^r = \frac{1}{r!\binom{n+r}{r}}\int^z (z-x)^{n+r} f(x)\,dx$$
$$+\frac{c_0\cdot z^r}{r!}+\frac{c_1\cdot z^{r-1}}{(r-1)!}+\cdots+\frac{c_{r-1}\cdot z^1}{1!}+c_r$$

ausdrücken lässt; wo unter $c_0, c_1, \ldots, c_{r-1}, c_r$ gewisse, von den unteren Grenzen der Integrale abhängende Constanten zu verstehn sind.

Capitel VIII.

Der Taylorsche Satz[1]) mit seinen nächstliegenden Anwendungen.

§ 36.

Erste Ableitung des Taylorschen Satzes.

Substituirt man in der Gleichung (6) des vorigen § $f^{(r+1)}(x)$ für $f(x)$, so ergiebt dieselbe:

$$(1) \qquad \frac{1}{r!}\int_a^z (z-x)^r f^{(r+1)}(x)\,dx = \int_a^{u,z} f^{(r+1)}(x)\,dx \cdot du^r$$

Nun ist aber der Definition nach:

$$\int_a^{u,z} f^{(r+1)}(x)\,dx \cdot du^r = \int_a^z du^r \int_a^u f^{(r+1)}(x)\,dx$$

$$= \int_a^{u\ z} du^r \left[f^{(r)}(u) - f^{(r)}(a)\right]$$

$$= \int_a^{u,z} f^{(r)}(u)\cdot du^r - f^{(r)}(a)\int_a^{u,z} du^r$$

oder unter Benutzung der Gl. (7) desselben § für $n=0$:

$$\int_a^{u,z} f^{(r+1)}(x)\,dx \cdot du^r = \int_a^{u,z} f^{(r)}(x)\,dx \cdot du^{r-1} - (z-a)^r \frac{f^{(r)}(a)}{r!}.$$

Wendet man diese Gleichung rmal auf ihre rechte Seite an, so ergiebt sich:

$$\int_a^{u,z} f^{(r+1)}(x)\,dx \cdot du^r$$

$$= \int_a^z f'(x)\,dx - (z-a)^1\frac{f'(a)}{1!} - (z-a)^2\frac{f''(a)}{2!} - \cdots - (z-a)^r\frac{f^{(r)}(a)}{r!}$$

$$= f(z) - f(a) - (z-a)^1\frac{f'(a)}{1!} - (z-a)^2\frac{f''(a)}{2!} - \cdots - (z-a)^r\frac{f^{(r)}(a)}{r!}.$$

Löst man aber die letzte Gleichung für den ersten Summanden $f(z)$ der rechten Seite als Unbekannte auf und schreibt

[1]) Von Brook Taylor zuerst im Jahre 1714 bekannt gegeben.

schliesslich (r — 1) für r, so erhält man mit Rücksicht auf Gl. (1) und auf die im vorigen § auseinandergesetzten Gültigkeitsbedingungen den

Lehrsatz.

Ist die r^{te} Derivirte $f^{(r)}(x)$ der Function $f(x)$ von $x=a$ bis $x=z$ endlich, so gilt stets die Gleichung

$$(2)\quad f(z)=f(a)+(z-a)^1\frac{f'(a)}{1!}+(z-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+(z-a)^3\frac{f'''(a)}{3!}+\cdots$$

$$\cdots+(z-a)^{r-1}\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}+\varphi_r,$$

wo φ_r den Werth

$$(3)\quad \varphi_r=\int_a^{u,z} f^{(r)}(x)\,dx\cdot du^{r-1}=\frac{1}{(r-1)!}\cdot\int_a^z (z-x)^{r-1}f^{(r)}(x)\,dx$$

hat.

In denjenigen Fällen, in welchen

$$\lim_{r=\infty}\cdot\varphi_r=0$$

hervorgeht, ist daher:

$$(4)\quad f(z)=\lim_{r=\infty}\cdot\left\{f(a)+(z-a)^1\frac{f'(a)}{1!}+(z-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(z-a)^{r-1}\cdot\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}\right\}$$

oder in der gebräuchlichen bequemeren Schreibweise

$$(5)\quad f(z)=f(a)+(z-a)^1\frac{f'(a)}{1!}+(z-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+(z-a)^3\frac{f'''(a)}{3!}+\cdots,$$

bei welcher die Punkte am Schluss der Formel das Zeichen $\lim_{r=\infty}\cdot$ nebst dem Endgliede der Klammer in (4) ersetzen.

Zusatz. (Der Maclaurinsche Satz.)

Ist die r^{te} Derivirte $f^{(r)}(x)$ der Function $f(x)$ von $x=0$ bis $x=z$ endlich, so gilt stets die Gleichung

(6) $$f(z)=f(0)+z^1\frac{f'(0)}{1!}+z^2\frac{f''(0)}{2!}+z^3\frac{f'''(0)}{3!}+\cdots$$

$$\cdots+z^{r-1}\frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}+\varphi_r,$$

wo φ_r den Werth

(7) $$\varphi_r=\int_0^{u,z} f^{(r)}(x)\,dx\cdot du^{r-1}=\frac{1}{(r-1)!}\int_0^z (z-x)^{r-1} f^{(r)}(x)\,dx$$

hat.

In denjenigen Fällen, in welchen

$$\lim_{r=\infty}\cdot\varphi_r=0$$

hervorgeht, ist daher:

(8) $$f(z)=f(0)+z^1\frac{f'(0)}{1!}+z^2\frac{f''(0)}{2!}+z^3\frac{f'''(0)}{3!}+\cdots$$

Anmerkung.

Die Eigenschaft der Functionen, sich nach Anleitung der Gleichung (5) — oder (8) — als Grenzwerth der Summe einer unendlich wachsenden Anzahl von Summanden darstellen zu lassen, welche nach den steigenden ganzen Potenzen der unabhängigen Variabeln (z — a) — oder z — fortschreiten, wird so allgemein angetroffen, wenigstens bei einer beschränkten Ausdehnung des Intervalls (a, z), dass man eher nach den Ausnahmen zu suchen hat, als umgekehrt. Daher ist die Entdeckung Taylors von ungeheurer Tragweite geworden, namentlich seitdem es Cauchy[1]) gelungen ist, die Beurtheilung des Werthes von φ_r unmittelbar an die Function $f(x)$ selbst zu knüpfen, anstatt, wie oben, an deren r^{te} Derivirte. Um dies thun zu können, muss man aber erst eine neue Zahlenform, die complexe, mit in den Bereich des Calculs gezogen haben, wozu hier bisher der Anlass, wie auch die zu ihrer Bewältigung ausreichende Handhabe fehlte.

Was indessen vor der Einführung jener Zahlenform in Absicht auf die Ausschliessung unnöthiger Bedingungen geleistet werden kann, das geschieht unter allen möglichen Ableitungsmethoden am

---

[1]) 1789 — 1857.

vollkommensten durch die obige, da sie die Gültigkeit der Taylorschen Entwickelung an das Verhalten einer einzigen Function $f^{(r)}(x)$ knüpft, während die übrigen nicht umhin können, sich einer möglichen Störung des Resultats durch jede Function aus der Reihe

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(r-1)}(x),\ f^{(r)}(x)$$

zu versehen, welche an den andern Functionen vielleicht nicht bemerkt werde.

Zur vollkommneren Auffassung der Gleichung (2) kann der Hinweis beitragen, dass die Summe

$$(z-a)\frac{f'(a)}{1!}+(z-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\cdots+(z-a)^{r-1}\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}$$

den Unterschied zwischen dem einfachen Integral

$$\int_a^z f'(x)\,dx$$

und dem $(r-1)$fach höheren Integral der $(r-1)^{ten}$ Derivirten seines Differentials, nämlich

$$\int_a^{u,z} f^{(r)}(x)\,dx\cdot du^{r-1},$$

angiebt.

§ 37.

Andere Herleitungen desselben Satzes.

I.

Substituirt man in der Gleichung § 25, (5), nämlich in

$$\int_a^z f(x)\,dx=(z-a)f(a)+\int_a^z (z-x)f'(x)\,dx,$$

für $f(x)$ den Ausdruck:

$$\frac{(z-x)^{r-1}f^{(r)}(x)}{(r-1)!}$$

also für $f'(x)$ den Ausdruck:

$$\frac{(z-x)^{r-1}f^{(r+1)}(x)}{(r-1)!}-(r-1)\cdot\frac{(z-x)^{r-2}f^{(r)}(x)}{(r-1)!},$$

so geht sie über in;

$$\int_a^z \frac{(z-x)^{r-1} f^{(r)}(x)}{(r-1)!} dx$$

$$= \frac{(z-a)^r f^{(r)}(a)}{(r-1)!} + \int_a^z \frac{(z-x)^r f^{(r+1)}(x)}{(r-1)!} - (r-1) \int_a^z \frac{(z-x)^{r-1} f^{(r)}(x)}{(r-1)!} dx.$$

Daraus folgt durch Versetzung des letzten Integrals der rechten Seite auf die linke und nachfolgende Division mit r:

$$(1) \int_a^z \frac{(z-x)^{r-1} f^{(r)}(x)}{(r-1)!} dx = \frac{(z-a)^r f^{(r)}(a)}{r!} + \int_a^z \frac{(z-x)^r f^{(r+1)}(x) \, dx}{r!}.$$

Ertheilt man dem r in dieser Gleichung nach und nach die Werthe 1, 2, 3, ..., (r — 1), summirt die dadurch erhaltenen Gleichungen und subtrahirt im Resultat die rechts und links übereinstimmenden Summanden, so entsteht die abzuleitende Gleichung (2) des vorigen § mit der zweiten der dort in Gl. (3) dargestellten Formen des Restes φ_r.

II.

Eine dritte Ableitungsmethode ist die folgende:

Substituirt man in dem Leibnitzschen Satze (§ 31)

$$\psi(x) = (z-x)^{-1}, \quad \frac{\psi^{(n)}(x)}{n!} = (z-x)^{-(n+1)},$$

so geht die dortige Gleichung (3) für $n = (r-1)$ über in:

$$\frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}\left[\varphi(x)(z-x)^{-1}\right]}{dx^{r-1}}$$

$$= \varphi(x)(z-x)^{-r} + \frac{\varphi'(x)}{1!}(z-x)^{-r+1} + \cdots + \frac{\varphi^{(r-1)}(x)}{(r-1)!}(z-x)^{-1}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung noch mit $(z-x)^r$, substituirt

$$\varphi(x) = f(x) - f(z), \quad \varphi^{(m)}(x) = f^{(m)}(x)$$

und schreibt schliesslich a für x, so folgt:

$$f(z) = f(a) + (z-a)^1 \frac{f'(a)}{1!} + (z-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \cdots + (z-a)^{r-1} \frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}$$

$$+ \frac{(z-a)^r}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{r-1}}{da^{r-1}} \left\{ \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right\}.$$

Bei dieser Ableitung des Taylorschen Satzes ist eine neue Form für φ_r gewonnen, nämlich:

$$\varphi_r = \frac{(z-a)^r}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{r-1}}{da^{r-1}} \left\{ \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right\}. \tag{2}$$

III.

Eine vierte Ableitungsmethode, oder vielmehr ein synthetischer Beweis für den Taylorschen Satz, setzt voraus, dass man auf den glücklichen Gedanken gekommen sei, nach einer Vereinfachung des Ausdrucks

$$\varphi_r = f(z) - f(a) - (z-a)^1 \frac{f'(a)}{1!} - (z-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} - (z-a)^3 \frac{f'''(a)}{3!} - \cdots$$
$$\cdots - (z-a)^{r-1} \frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}$$

zu suchen, indem man ihn nach a differentiirt und dann wieder integrirt. Die Differentiation ergiebt sofort:

$$\frac{d\varphi_r}{da} = -\frac{(z-a)^{r-1} f^{(r)}(a)}{(r-1)!};$$

und hieraus folgt durch Integration, indem man das variable a mit x bezeichnet und darauf Acht nimmt, dass der obige Ausdruck von φ_r für $a = z$ verschwindet:

$$\varphi_r = -\int_z^a \frac{(z-x)^{r-1} f^{(r)}(x)}{(r-1)!} dx = +\int_a^z \frac{(z-x)^{r-1} f^{(r)}(x)}{(r-1)!} dx.$$

Dies ist nun wieder der zweite Ausdruck von φ_r in der Gl. (3) des vorigen §.

Anmerkung.

Dass die in diesem § dargestellten Ableitungsmethoden in der That nicht geeignet sind, bei jedem einzelnen Falle der Anwendung des Taylorschen Satzes von der Achtsamkeit darauf zu entbinden, ob auch jede von den Grössen $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a), \ldots, f^{(r)}(x)$ einen völlig bestimmten Werth habe, ist einleuchtend, und somit der Vorzug der ersten Ableitungsmethode (§ 36) festgestellt.

§ 38.

Der Rest der Taylorschen Reihe.

Definition.

Die rechte Seite der Gleichung (2) in § 36 nach Abzug der Grösse φ_r wird die **Taylorsche Reihe**, und φ_r der **Rest** derselben genannt.

Es wurde schon in § 36 angedeutet, dass es bei vielen Anwendungen des Taylorschen Satzes wichtig ist, zu beurtheilen, welchen Werth dieser Rest φ_r habe, namentlich, ob er bei unendlich wachsendem r unendlich klein sei, oder nicht.

Nun kann man ihn aber fast nie in einer bequem calculirbaren Form genau darstellen.

Aus diesem Umstand entspringt die Wichtigkeit auch derjenigen unter den folgenden Transformationen, welche nur zur Bestimmung von Grenzen führen, zwischen denen φ_r liegt.

Der aus § 36 bekannte Ausdruck für den Rest, nämlich

$$(1)\qquad \varphi_r = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^z (z-x)^{r-1} f^{(r)}(x)\,dx,$$

geht durch die Substitution

$$x = z - u(z-a),\quad z - x = u(z-a),\quad dx = -(z-a)\,du$$

— weil u das Intervall (1, 0) stetig durchläuft, während x von a bis z geht — über in:

$$(2)\qquad \varphi_r = \frac{(z-a)^r}{(r-1)!}\int_0^1 u^{r-1} f^{(r)}\big(z-u(z-a)\big)\,du.$$

Substituirt man ferner hier die zugleich mit u von 0 bis 1 wachsende neue Integrationsvariable

$$w = u^r;\quad dw = ru^{r-1}\,du,\quad u^{r-1}\,du = \frac{1}{r}\,dw,$$

so folgt:

$$(3)\qquad \varphi_r = \frac{(z-a)^r}{r!}\int_0^1 f^{(r)}\big(z - w^{\frac{1}{r}}\cdot(z-a)\big)\,dw.$$

Dies sind diejenigen unter den wichtigeren Restformen, welche zu den aus § 36 bekannten Bedingungen keine neuen hinzufügen, da die obigen Substitutionen nach § 26 stets zulässig sind. — Die Formen (2) und (3) zeichnen sich vor (1) dadurch aus, dass a und z nicht in den Integrationsgrenzen vorkommen.

Aendert sich $f^{(r)}(x)$ von $x=a$ bis $x=z$ stetig, so ergeben sich ferner aus (2) und (3) nach § 19 die folgenden Ausdrücke:

$$(4) \qquad \varphi_r = \frac{1}{(r-1)!}\,\theta^{r-1}(z-a)^r f^{(r)}\big(z-\theta(z-a)\big),$$

$$(5) \qquad \varphi_r = \frac{1}{r!}(z-a)^r f^{(r)}\big(z-\theta(z-a)\big);$$

wo θ eine zwischen 0 und 1 liegende, näher nicht zu bestimmende, Zahl bedeutet. — No. (4) heisst die Cauchysche, No. (5) die Legendresche Form des Restes.

Da die hier aufgezählten Formen des Restes keine Rücksicht auf die besondere Natur der einzelnen Functionen $f(x)$ nehmen, welche zur Untersuchung gelangen, und es ihrer Allgemeinheit wegen auch nicht können, so lassen sie sich häufig durch Einführung neuer Integrationsvariablen in (2) oder (3) noch handlicher machen; — wovon wir sogleich im nächsten § ein Beispiel sehen werden.

§ 39.

Der binomische Satz.[1]

Die Function $f(x)=(1+x)^n$ ergiebt nach § 30, (15):

$$\frac{f^{(r)}(x)}{r!} = \binom{n}{r}(1+x)^{n-r}.$$

Mithin ist nach § 36, (2) für $a=0$ — oder nach § 36, (6):

$$(1) \quad (1+z)^n = 1+\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2+\binom{n}{3}z^3+\cdots+\binom{n}{r-1}z^{r-1}+\varphi_r;$$

wo der Rest φ_r nach § 38, (3) den Werth besitzt:

$$(2) \qquad \varphi_r = \binom{n}{r}z^r\cdot\int_0^1\left(1+z-z\sqrt[r]{w}\right)^{n-r}dw$$

---

[1]) Unter einem „Binom“ versteht man eine Summe von zwei Summanden.

oder:

(3) $$\varphi_r = \binom{n}{r} z^r \cdot J_r$$

für

(4) $$J_r = \int_0^1 \left(1 + z - z\sqrt[r]{w}\right)^{n-r} dw.$$

Wir wollen zunächst untersuchen, wie sich $(1+z)^n$ ändert, wenn n unendlich wächst, dann den Werth des Restes φ_r bei einem endlichen und schliesslich bei einem unendlich grossen r darstellen für jedes z und n. Die Eintheilung in Abschnitte wird jedoch wegen der grossen Reichhaltigkeit an Einzelheiten mehr Nummern haben.

I.

Für $r = 2$ ergiebt sich aus (1) und (2):

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{1}{2} n(n-1) z^2 \cdot \int_0^1 \left(1 + z - z\sqrt{w}\right)^{n-2} dw.$$

Da nun das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung bei jedem positiven z und n positiv ist — denn nach § 19 liegt sein Werth zwischen $(1+z)^{n-2}$ und 1 — so ergiebt diese Gleichung u. A., dass

$$(1+z)^n > n \cdot z, \quad (z > 0, \; n > 1)$$

ist. Daher wächst $(1+z)^n$ bei wachsendem n stärker als das Product nz und ist zugleich mit n unendlich gross, wenn nicht etwa gleichzeitig z unendlich abnimmt.

Hat aber z einen negativen, zwischen 0 und (— 1) liegenden, endlich von 0 verschiedenen Werth, so giebt es stets eine endlich von 0 verschiedene positive Zahl z_1, welche der Gleichung

$$(1+z)^n = \frac{1}{(1+z_1)^n}$$

genügt.

Hieraus folgt in Verbindung mit dem zuvor gewonnenen Resultat der

Lehrsatz I.

Bei einem **positiv unendlich grossen Exponenten** und einem endlich von 1 verschiedenen Grundfactor ist die

Potenz unendlich **gross** oder **klein,** je nachdem der Grundfactor **grösser** oder **kleiner** als 1 ist.

II.

Ist n eine ganze positive Zahl, so ergiebt sich aus (2) und (1) für $r = n$ sofort:

$$\varphi_n = \binom{n}{n} z^n .$$

Daher gilt der

Lehrsatz II.

Bei jedem ganzen positiven n ist:

$$(5) \qquad (1+z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \cdots$$
$$\cdots + \binom{n}{n-1} z^{n-1} + \binom{n}{n} z^n$$

ohne Einschränkung für die Grösse der Zahl z.

— Dies ist das bekannte, auch durch einfache Multiplication zu erzielende Resultat.

III.

Das Integral

$$(4) \qquad J_r = \int_0^1 \left(1 + z - z\sqrt[r]{w}\right)^{n-r} dw$$

lässt sich, da es nach § 38, (2) mit

$$J_r = r\int_0^1 u^{r-1}(1 + z - zu)^{n-r} du$$

identisch ist, nach der in § 28, VIII ausgeführten Entwickelung vollständig auswerthen. Damit ist uns aber für unsere Zwecke nicht gedient, weil wir wieder zu unsern Ausgangsgleichungen (1) und (3) zurückgelangen würden, welche eine viel zu sehr zusammengesetzte Form zeigen, um die Grösse des Werthes von J_r übersehn zu können.

Wir entlehnen deshalb aus (1) und (3) nur die Relation

$$\binom{n}{r} z^r \cdot J_r = \binom{n}{r} z^r + \binom{n}{r+1} z^{r+1} \cdot J_{r+1},$$

welche durch die Vergleichung der Ausdrücke für zwei um 1 verschiedene Werthe von r gewonnen wird und durch die Division mit $\binom{n}{r} z^r$ zu der Gleichung

$$(6) \qquad J_r + \left(1 - \frac{n+1}{r+1}\right) z \cdot J_{r+1} = 1$$

führt. Dieselbe gilt in allen denjenigen Fällen, welche uns hier interessiren, weil die Zahl $\binom{n}{r} z^r$, mit welcher wir dividirt haben, in ihnen nicht $= 0$ sein kann. Denn für $z = 0$ hat die Entwickelung (1) überhaupt keinen Zweck, und auch nicht für $\binom{n}{r} = 0$, weil dann n eine unter dem Werthe von r liegende ganze positive Zahl und der Rest $\varphi_r = 0$ ist.

Es kann aber unsere Restbestimmung auch dadurch ihren Sinn verlieren, dass das Integral J_r wegen des Durchganges seines Differentials durch das Unendliche bedeutungslos wird.

Dies tritt jedoch jedenfalls dann nicht ein, wenn $(1 + z) > 0$ ist, weil unter dieser Voraussetzung der Werth von $\sqrt[r]{w}$, für welchen $1 + z - z\sqrt[r]{w} = 0$ wird, nämlich $\sqrt[r]{w} = \frac{1+z}{z}$, entweder > 1 oder < 0 ist.

Auch für $1 + z = 0$, $z = -1$, giebt es Fälle, in denen J_r einen völlig bestimmten Werth hat; denn die Gleichung (4) liefert hierfür das Resultat:

$$(7) \quad J_r = \int_0^1 \left(\sqrt[r]{w}\right)^{n-r} dw = \int_0^1 w^{\frac{n}{r}-1} dw = \frac{r}{n}, \quad (n > 0,\ z = -1).$$

Betrachten wir nun den Fall, in welchem $(1 + z) > 0$ ist, genauer, so steht es nach § 26 frei, für w als neue Integrationsvariable die zugleich mit w von 0 bis 1 wachsende Grösse

$$v = \frac{w}{\left(1 + z - z\sqrt[r]{w}\right)^r},$$

also

$$dv = \frac{1+z}{\left(1 + z - z\sqrt[r]{w}\right)^{r+1}} dw, \quad \left(1 + z - z\sqrt[r]{w}\right)^{n-r} dw = \frac{(1+z)^n dv}{\left(1 + z\sqrt[r]{v}\right)^{n+1}}$$

einzuführen. Dadurch erhält man den Ausdruck:

(8) $$J_r = (1+z)^n \cdot \int_0^1 \frac{dv}{\left(1+z\sqrt[r]{v}\right)^{n+1}}, \quad (1+z>0).$$

Derselbe ist positiv und hat, weil für alle zwischen 0 und 1 liegenden Werthe von v die Beziehung $\sqrt[r]{v} < \sqrt[r+1]{v}$ stattfindet, die Eigenthümlichkeit, dass

(9) $$\begin{cases} J_r > J_{r+1}, & \left((n+1)z>0\right), \\ J_r < J_{r+1}, & \left((n+1)z<0\right) \end{cases}$$

hervorgeht, wovon man sich bei der Einzelprüfung der vier möglichen Fälle leicht überzeugt; so wie diejenige, jedenfalls zwischen endlichen Grenzen — nämlich nach § 19 zwischen $(1+z)^n$ und $(1+z)^{-1}$ — zu verbleiben, wenn r unendlich wächst. Daraus lässt sich schliessen, dass $\lim_{r=\infty} \cdot J_r$ einen endlichen, völlig bestimmten positiven Werth besitzt.

Für denselben ergiebt sich aus (6) der Werth:

(10) $$\lim_{r=\infty} \cdot J_r = \frac{1}{1+z}, \quad (1+z>0).$$

Ferner erhält man durch Anwendung der Ungleichungen (9) auf die Gleichung (6) Grenzen, zwischen denen J_r liegt; und zwar stellt sich durch eine ganz elementare Schlussfolgerung heraus, dass J_r einen durch die folgende Formel charakterisirten Werth besitzt:

(11) $$J_r = 1 : \left\{1 + z - \frac{(n+1)z}{r+\theta^z}\right\}, \quad (0<\theta<1, \ r-n>0).$$

— Anstatt des einfacheren Zeichens θ bei einem positiven und $\frac{1}{\theta}$ bei einem negativen z ist hier, um beide Fälle zusammenzufassen, θ^z geschrieben, was offenbar dieselbe Bedeutung hat.

Der Fall $(n+1)=0$, $n=-1$, welchen wir in (9) ausnahmen, giebt nach (8) für jedes r genau:

$$J_r = \frac{1}{1+z}, \quad J_r = J_{r+1};$$

ein Resultat, welches sich ebenfalls unter (11) subsumiren lässt.

Übrigens kann das J_r bei jedem ganzen negativen Werth von (n + 1) durch einen geschlossenen algebraischen Ausdruck dargestellt werden, der sich bei wachsendem r nicht complicirt. Denn, da in diesem Falle (—n—1) eine ganze positive Zahl ist, so folgt aus (8) und (5):

$$J_r = (1+z)^n \int_0^1 \frac{dv}{\left(1+z\sqrt[r]{v}\right)^{n+1}} = (1+z)^n \int_0^1 \left(1+zv^{\frac{1}{r}}\right)^{-n-1} dv$$

$$= (1+z)^n \int_0^1 dv \left\{1 + \binom{-n-1}{1} z v^{\frac{1}{r}} + \binom{-n-1}{2} z^2 v^{\frac{2}{r}} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \binom{-n-1}{-n-1} z^{-n-1} v^{\frac{-n-1}{r}} \right\},$$

(12) $$J_r = (1+z)^n \left\{1 + \binom{-n-1}{1}\frac{rz}{r+1} + \binom{-n-1}{2}\frac{rz^2}{r+2} + \binom{-n-1}{3}\frac{rz^3}{r+3} + \cdots + \binom{-n-1}{-n-1}\frac{rz^{-n-1}}{r-n-1}\right\}.$$

Der besseren Übersicht wegen wollen wir hier n + 1 = — m setzen und, indem wir (— z) für z schreiben, durch Vermittelung von (3) in (1) substituiren. Dies führt zu dem

Lehrsatz III.

Ist m eine ganze positive Zahl, mit Einschluss der Null, so gilt die Gleichung:

(13) $$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = 1 + \frac{m+1}{1}\cdot z + \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2} z^2 + \cdots \cdots + \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdots\frac{m+r-1}{r-1} z^{r-1} + \varphi_r$$

mit der Bedeutung

(14) $$\varphi_r = \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdots\frac{m+r}{r}\cdot\frac{z^r}{(1-z)^{m+1}}\cdot\left\{1 - \binom{m}{1}\frac{rz}{r+1} + \binom{m}{2}\frac{rz^2}{r+2} + \cdots + (-1)^m\binom{m}{m}\frac{rz^m}{r+m}\right\}$$

bei jeder Nummer r und für jeden Werth von z ausser z = + 1.

— Dass z in der That jeden beliebigen Werth haben darf (selbstverständlich ausser $z=1$) erkennt man sofort, wenn man erwägt, dass (13) durch Multiplication mit $(1-z)^{m+1}$ in eine algebraische Gleichung $(m+r)^{\text{ten}}$ Grades mit mehr als $(m+r)$ Wurzeln verwandelt wird; — denn die Gleichung (13) gilt ihrer Herleitung nach für jedes z, welches der Bedingung $(1-z)>0$ genügt. (Vergl. die Anmerkung zu § 28.)

Endlich sei noch erwähnt, dass durch partielle Integration gefunden wird:

$$\int \frac{dv}{\left(1+z\sqrt[r]{v}\right)^{n+1}} = \frac{v}{\left(1+z\sqrt[r]{v}\right)^{n+1}} + \frac{n+1}{r}\int \frac{z\sqrt[r]{v}}{\left(1+z\sqrt[r]{v}\right)^{n+2}}\,dv$$

$$= \frac{v}{\left(1+z\sqrt[r]{v}\right)^{n+1}} + \frac{n+1}{r}\left\{\int \frac{dv}{\left(1+z\sqrt[r]{v}\right)^{n+1}} - \int \frac{dv}{\left(1+z\sqrt[r]{v}\right)^{n+2}}\right\},$$

$$\left(1-\frac{n+1}{r}\right)\int_0^1 \frac{dv}{\left(1+z\sqrt[r]{v}\right)^{n+1}} + \frac{n+1}{r}\int_0^1 \frac{dv}{\left(1+z\sqrt[r]{v}\right)^{n+2}} = \frac{1}{(1+z)^{n+1}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(1+z)^{n+1}$, so erhält man nach (8) die Relation

$$\left(1-\frac{n+1}{r}\right)(1+z)\cdot J_r(n) + \frac{n+1}{r} J_r(n+1) = 1,$$

in welcher, um die J_r mit verschiedenem n zu unterscheiden, $J_r(n)$ für das frühere J_r geschrieben ist. Aus der letzten Relation lässt sich die Gleichung (12) ebenfalls ableiten.

Die obigen Ermittelungen über den Werth von J_r umfassen alle denkbaren Fälle — auch bei einem negativen Werthe von $(1+z)$ in (1) oder von $(1-z)$ in (13), da der Rest φ_r für ein nicht ganzes m jedenfalls zwischen den Werthen liegt, welche φ_r annimmt, wenn man für m in (14) die nächstgrössere und die nächstkleinere ganze Zahl setzt.

IV.

Was schliesslich den Factor $\binom{n}{r}$ von φ_r betrifft, so ergiebt sich durch allmähliche Vergrösserung von k in der Relation

$$\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\cdot\frac{n+1-(k+1)}{k+1}=(-1)\cdot\binom{n}{k}\left(1-\frac{n+1}{k+1}\right)$$

die identische Gleichung:

(15) $$(-1)^r\binom{n}{r}$$

$$=(-1)^k\binom{n}{k}\cdot\left(1-\frac{n+1}{k+1}\right)\left(1-\frac{n+1}{k+2}\right)\left(1-\frac{n+1}{k+3}\right)\cdots\left(1-\frac{n+1}{r}\right)$$

$$=(-1)^k\binom{n}{k}\cdot\prod_{\mu=1}^{\mu=r-k}\left(1-\frac{n+1}{k+\mu}\right)^{1)}.$$

Die Zahl k sei so gross gewählt, dass $k-n>0$ hervorgeht. Dann folgt aus den Ungleichungen

$$k-n>0,\quad \mu-1\geqq 0,$$

dass

$$(k+\mu)-(n+1)>0,\quad 1-\frac{n+1}{k+\mu}>0$$

ist, weshalb das obige Product Π einen positiven Werth besitzt, und $(-1)^r\binom{n}{r}$ im Vorzeichen mit $(-1)^k\binom{n}{k}$ übereinstimmt, wie gross r auch werden mag.

Um den Grenzwerth jenes Ausdrucks $(-1)^r\binom{n}{r}$ für ein unendlich grosses r zu bestimmen, führen wir die Bezeichnung

$$\lim_{r=\infty}\cdot\prod_{\mu=1}^{\mu=r-k}\left(1-\frac{n+1}{k+\mu}\right)=\prod_{\mu=1}^{\mu=\infty}\left(1-\frac{n+1}{k+\mu}\right)=P(n+1,k)$$

ein. Es kann zunächst festgestellt werden, dass bei allen positiven Werthen von $(n+1)$ ein völlig bestimmter, die 1 nicht erreichender Grenzwerth $P(n+1,k)$ existirt, weil dann die Factoren des Productes Π sämmtlich <1 sind, und daher das letztere Schritt für Schritt abnimmt, wenn r wächst.

Nun ergiebt sich durch die Transformation

---

1) Man bezeichnet in der Analysis häufig:

$$f(a)\cdot f(a+1)\cdot f(a+2)\cdots f(b)=\prod_{\mu=a}^{\mu=b} f(\mu),$$

deutet also durch das Zeichen Π ein Product an, dessen Factoren die Werthe sind, welche $f(\mu)$ annimmt, wenn man für μ die Glieder einer arithmetischen Reihe mit der Differenz 1 setzt

$$1-\frac{n+1}{k+\mu}=\frac{k+\mu-1-n}{k+\mu}=\frac{k+\mu-1}{k+\mu}\left(1-\frac{n}{k+\mu-1}\right)$$

sofort:

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=r-k}\left(1-\frac{n+1}{k+\mu}\right)=\frac{k-n}{r}\cdot\prod_{\mu=1}^{\mu=r-k-1}\left(1-\frac{n}{k+\mu}\right).$$

Mithin ist:

$$P(n+1,k)=0,\quad (n+1\gtreqless 1),$$

weil nach dem Obigen der Grenzwerth $P(n,k)$ des zuletzt geschriebenen Productes Π bei jedem positiven n die 1 nicht übersteigt.

Es sind also die Werthe von $P(n,k)$ für die zwischen 0 und 1 liegenden Werthe von n noch fraglich. Wir wissen von ihnen bis jetzt nur, dass sie die 1 nicht übertreffen, und entnehmen aus ihrem Bildungsgesetz, dass $P(n,k)$ abnimmt, wenn n von 0 an wächst — falls $P(n,k)$ nicht auch in diesem Falle einen von n unabhängigen Werth besitzt, wie bei den grösseren n, welche das Resultat $P(n,k)=0$, $(n\gtreqless 1)$, ergaben.

Um die Entscheidung zu treffen, vergrössern und verkleinern wir in der Definitionsgleichung

$$P\left(\frac{n}{2},k\right)=\left(1-\frac{n}{2k+2}\right)\left(1-\frac{n}{2k+4}\right)\left(1-\frac{n}{2k+6}\right)\left(1-\frac{n}{2k+8}\right)\cdots$$

die Nenner um 1, wodurch der ganze Ausdruck beziehungsweise vergrössert und verkleinert wird, so dass für $n>0$ die Scala

$$\left(1-\frac{n}{2k+3}\right)\left(1-\frac{n}{2k+5}\right)\cdots\gtreqless P\left(\frac{n}{2},k\right)$$
$$\geq\left(1-\frac{n}{2k+1}\right)\left(1-\frac{n}{2k+3}\right)\cdots$$

hervorgeht. Multiplicirt man dieselbe mit dem exacten Ausdruck von $P\left(\frac{n}{2},k\right)$, so erhält man:

$$P(n,2k+1)\gtreqless\left\{P\left(\frac{n}{2},k\right)\right\}^2\geqq P(n,2k).$$

Wir wissen aber aus dem Obigen, dass für $n\gtreqless 1$ das erste und das letzte Glied dieser Scala $=0$ sind. Daher gilt dies auch von dem mittleren; d. h. es ist:

$$P\left(\frac{n}{2}, k\right) = 0, \quad (n \overline{>} 1).$$

Substituiren wir jetzt in derselben Scala $\left(\frac{n}{2}\right)$ für n, so folgt:

$$P\left(\frac{n}{4}, k\right) = 0, \quad (n \overline{>} 1);$$

und, da man diesen Schluss beliebig oft wiederholen kann, so ergiebt sich für jede Nummer r:

$$P\left(\frac{n}{2^r}, k\right) = 0, \quad (n > 1),$$

d. i.:

(16).
$$\begin{cases} P(n,k) = 0, & (n > 0), \\ \lim\limits_{r=\infty} \cdot \binom{n}{r} = 0, & (n+1 > 0). \end{cases}$$

Wird $n = 0$, so springt die Function P vom Werthe 0 zum Werthe 1 über und wird sofort unendlich, wenn n einen negativen Werth erlangt. Denn es ist identisch:

$$\left(1 + \frac{n}{k+\mu}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{k+n+\mu}\right) = 1,$$

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=r-k} \left(1 + \frac{n}{k+\mu}\right) \cdot \prod_{\mu=1}^{\mu=r-k} \left(1 - \frac{n}{k+n+\mu}\right) = 1,$$

wo der zweite Factor der linken Seite zwischen

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=r-k} \left(1 - \frac{n}{k+p+\mu}\right) \text{ und } \prod_{\mu=1}^{\mu=r-k} \left(1 - \frac{n}{k+p+1+\mu}\right)$$

liegt, wenn p die grösste im positiven n enthaltene ganze Zahl bedeutet. Hieraus folgt aber, dass jener zweite Factor sich bei einem unendlich grossen r dem Grenzwerthe

$$P(n, k+p) = P(n, k+p+1) = 0$$

nähert, so dass der Grenzwerth $P(-n, k)$ des ersten Factors unendlich gross sein muss. Dies führt zu dem Resultat:

(17)
$$\lim_{r=\infty} \cdot (-1)^r \binom{n}{r} = (-1)^k \cdot \infty, \quad (n+1 < 0).$$

Endlich folgern wir aus der Gleichung (15) noch, dass unter allen Umständen

$$(-1)^r \binom{n}{r} = (-1)^k \binom{n}{k} \cdot \eta^{r-k}$$

gesetzt werden kann, wo η eine zwischen 1 und $\frac{k-n}{k+1}$ liegende Zahl bedeutet, welche bei einem hinreichend grossen k der 1 beliebig nahe kommt und daher der 1 so nahe gebracht werden kann, dass das Product (ηz) zugleich mit z dem absoluten Betrage nach > 1 oder < 1 ist.

Daher muss der absolute Werth von $\binom{n}{r} z^r$ bei unendlich wachsendem r unendlich wachsen oder abnehmen, je nachdem der absolute Werth von $z > 1$ oder < 1 ist.

Fassen wir nun die wichtigeren Resultate unserer Untersuchung zusammen, so finden wir das Material zu dem folgenden

Lehrsatz IV.

Als Grenzwerth einer Summe von unendlich wachsender Summandenzahl kann

$$(1+z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \cdots$$

dargestellt werden:

1. für jedes beliebige z, wenn n eine ganze positive Zahl ist;
2. für $-1 < z < +1$, welchen Werth n auch haben mag;
3. auch noch für $z = \pm 1$, wenn $n > 0$ ist;
4. auch für $z = +1$, aber nicht für $z = -1$, wenn $0 > n > -1$ ist.

Der Rest φ_r der Entwickelung

$$(1+z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \cdots + \binom{n}{r-1} z^{r-1} + \varphi_r$$

hat die folgenden Werthe:

$$\varphi_r = (-1)^r \cdot \binom{n-1}{r-1}, \quad (n > 0, \ 1 + z = 0),$$

$$\varphi_r = (-1)^r \cdot \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdots \frac{m+r}{r} \cdot \frac{z^r}{(1+z)^{m+1}} \cdot \left\{1 + \binom{m}{1}\frac{rz}{r+1}\right.$$

$$\left. + \binom{m}{2}\frac{rz^2}{r+2} + \cdots + \binom{m}{m}\frac{rz^m}{r+m}\right\}, \quad (n = -(m+1) = \text{ganze neg. Zahl}).$$

Er wird, welchen Werth z auch haben mag, in jedem Falle durch

$$\varphi_r = \binom{n}{r} \cdot \frac{z^r}{1 + z - \dfrac{(n+1)z}{r+\theta^z}}$$

ausgedrückt, wo θ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet. Der Werth von $\binom{n}{r}$ hat einerlei Vorzeichen mit $(-1)^{r-k} \cdot \binom{n}{k}$, sobald $k - n > 0$ ist, und nimmt seinem absoluten Betrage nach bei einem unendlich wachsenden r unendlich **zu** oder **ab**, je nachdem $(n+1)$ einen **negativen** oder einen **positiven** Werth hat.

Beispiele:

I.
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{r-1} + \frac{z^r}{1-z},$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \quad (-1 < z < +1);$$

als „geometrische" Reihe schon in den Elementen der Arithmetik bekannt.

II.
$$\frac{1}{(1-z)^3} = 1 + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}z + \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}z^2 + \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}z^3 + \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}z^4 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{r(r+1)}{1\cdot 2}z^{r-1} + \frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot 2}\left\{1 - \frac{2rz}{r+1} + \frac{rz^2}{r+2}\right\}.$$

III.
$$(1+z)^{10} = 1 + 10z + 45z^2 + 120z^3 + 210z^4 + 252z^5$$

$$+ 210z^6 + 120z^7 + 45z^8 + 10z^9 + z^{10}.$$

IV.
$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2\cdot 4}z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^4$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}z^5 - \cdots, \quad \{-1 \overset{=}{<} z \leqq +1\}.$$

Der Rest hat, wenn das bei der Berechnung zuletzt benutzte Glied z^{r-1} enthält, den Werth

$$\varphi_r = (-1)^{r-1} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2r)} \cdot \frac{z^r}{1+z-\frac{3z}{2(r+\theta^z)}}, \quad (0<\theta<1).$$

V. $$\frac{1}{\sqrt{1+z}} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^4 - \cdots$$
$$\{-1 < z \leqq +1\}.$$

Der Rest hat den Werth:

$$\varphi_r = (-1)^r \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2r)} \cdot \frac{z^r}{1+z-\frac{z}{2(r+\theta^z)}}, \quad (0<\theta<1).$$

VI. $$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \cdots, \quad (n+1>0).$$

Der Rest hat den Werth:

$$\varphi_r = \binom{n}{r} : \left\{2 - \frac{n+1}{r+\theta}\right\}, \quad (0<\theta<1).$$

VII. $$(-1)^r \binom{n-1}{r} = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^r \binom{n}{r}.$$

VIII. $$\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$
$$= (1-z)\cdot\left\{1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^8 + \cdots\right\}$$
$$\{-1 < z < +1\}.$$

IX. $$\sqrt{a^2+b}$$
$$= a\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a^2} - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{b^2}{a^4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{b^3}{a^6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{b^4}{a^8} + \cdots\right\}$$
$$\left\{-a^2 \gtreqless b \leqq +a^2\right\}.$$

X. $$\sqrt{2} = \frac{41}{29} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{1681}}$$

$$= \frac{41}{29} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2 \cdot 1681} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 1681^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1681^3} - \cdots \right\}.$$

Der Rest der eingeklammerten Reihe hat, wenn im Nenner des zuletzt benutzten Gliedes 1681^{r-1} steht, den Werth:

$$\varphi_r = (-1)^{r-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2r)} \cdot \frac{1}{1681^{r-1}\left(1682 - \frac{3}{2(r+\theta)}\right)},$$

$$(0 < \theta < 1).$$

Er liegt also z. B., wenn man

$$\sqrt{2} = \frac{41}{29} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2 \cdot 1681} - \frac{1}{8 \cdot 1681^2} + \frac{1}{16 \cdot 1681^3} \right\}$$

annimmt, zwischen:

$$-\frac{1}{1681^3 \cdot 43049{,}6} \text{ und } -\frac{1}{1681^3 \cdot 43051{,}52},$$

d. i. zwischen:

$$-\frac{1}{139\,360\,347\,693\,353{,}6} \text{ und } -\frac{1}{139\,366\,563\,125\,496{,}32},$$

so dass die 15te Decimalstelle etwa um 7 zu gross wird. Dieser Fehler lässt sich aber durch Anbringung der so eben beurtheilten Correction noch bedeutend verringern, da dann nur eine Unsicherheit bestehn bleibt, welche weniger als

$$\frac{1{,}92}{88 \cdot 10^{18}}$$

beträgt, also frühestens in der 20sten Decimalstelle erscheint.

§ 40.

Die Exponentialfunction e^x.

Substituirt man in den Gleichungen des vorigen § $z = \frac{x}{n}$, so erhält man:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{x^3}{n^3} + \cdots + \binom{n}{r-1}\frac{x^{r-1}}{n^{r-1}} + \varphi_r$$

oder:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x^1}{1!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-2}{n}\right)\cdot\frac{x^{r-1}}{(r-1)!} + \varphi_r;$$

und für den Rest:

$$\varphi_r = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\cdot\frac{x^r}{r!}\cdot J_r,$$

$$J_r = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \int_0^1 \frac{dv}{\left(1+\frac{x}{n}\sqrt[r]{v}\right)^{n+1}} = 1 : \left\{1 + \frac{x}{n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{x}{r+\theta^{\frac{x}{n}}}\right\},$$

wo $0 < \theta < 1$ ist, falls $(r-n)$ einen positiven Werth hat.

Lässt man nun n in irgend welcher Weise positiv oder negativ unendlich wachsen, so folgt aus dem Obigen:

$$(1)\ \lim_{n=\infty}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{x^r}{r!}\cdot J_r,$$

und weil $(r-n)$ nur bei negativ wachsenden Werthen von n positiv bleibt, der Exponent $\frac{x}{n}$ von θ demnach nur bei einem negativen x positive Werthe behält, zunächst für $n < 0$:

$$(2)\ J_r = \lim_{n=\infty}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \int_0^1 \frac{dv}{\left(1+\frac{x}{n}\sqrt[r]{v}\right)^{n+1}} = 1 : \left\{1 - \frac{x}{r+\theta^{-x}}\right\},\ (0 < \theta < 1$$

Dass unser letzter Ausdruck von J_r auch für die positiv wachsenden Werthe von n gilt, steht von vorne herein noch nicht fest. Allein die Relationen (9) und (11) des vorigen § bleiben gültig, wenn $(n+1)$ und z gleichzeitig ihre Vorzeichen ändern. Dies bedeutet für uns, weil wir $z=\frac{x}{n}$ gesetzt haben, dass der zweite Ausdruck von J_r sich nicht ändert, wenn man dem n das entgegengesetzte Vorzeichen giebt. Daher ist er auch für die positiv unendlichen n gültig.

Jedenfalls gilt demnach, da θ^{-x} positiv ist, die Gleichung

$$\lim_{r=\infty} \cdot J_r = 1.$$

Nun ist aber ausserdem

$$\text{abs}\cdot\frac{x^r}{r!} = \text{abs}\cdot\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdots\frac{x}{r} < \left(\text{abs}\cdot\frac{x^k}{k!}\right)\cdot\left(\text{abs}\cdot\left[\frac{x}{k+1}\right]^{r-k}\right),$$

wo $(k+1) > \text{abs}\cdot x$ genommen werde, mithin nach dem Lehrsatz I des vorigen §

$$\lim_{r=\infty}\cdot\frac{x^r}{r!}=0\,,\quad \lim_{r=\infty}\cdot\varphi_r = \lim_{r=\infty}\cdot\frac{x^r}{r!}J_r = 0$$

für jedes endliche x.

Daher nähert sich die linke Seite von (1) einem vom Vorzeichen und vom Wachsthumgesetze des Exponenten n unabhängigen Grenzwerthe.

Die linke Seite der Gleichung (1) für $x=1$ ist man gewohnt durch den Buchstaben e zu bezeichnen; d. h.: man bezeichnet in der Analysis

$$\lim_{n=\infty}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Folglich ist, wenn man in dem allgemeinen Ausdruck (1) $n=mx$ setzt:

$$\lim_{n=\infty}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left\{\lim_{m=\infty}\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^x = e^x.$$

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich, indem man das letzte Resultat auch auf den ersten Ausdruck von J_r in (2) anwendet, der

Lehrsatz.

Wenn n auf irgend welche Weise positiv oder negativ unendlich wächst, so ist

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

bei jedem endlichen x eine von dem Gesetz jener Veränderung des n völlig unabhängige bestimmte Grösse. Zur Definition der Zahl e dient der doppelte Ausdruck

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Durch eine endliche Summandenzahl lässt sich

$$(5) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{x^r}{r!} \cdot J_r$$

mit dem Werthe

$$(6) \qquad J_r = e^x \int_0^1 e^{-x\sqrt[r]{v}}\, dv = 1 : \left\{1 - \frac{x}{r+\theta^{-x}}\right\}, \quad (0 < \theta < 1)$$

darstellen.

§ 41.

Der numerische Werth von e.

Lehrsatz.

Die Zahl e ist irrational.

Macht man nämlich die Hypothese, es sei e rational, so muss sich $e = \frac{m}{r}$ durch ganze Zahlen m und r darstellen lassen. Das widerspricht aber der Gleichung (4) des vorigen §, nach welcher dann

$$r!\left[\frac{m}{r} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{r!}\right]$$
$$= r!\left[\frac{1}{(r+1)!} + \frac{1}{(r+2)!} + \frac{1}{(r+3)!} + \cdots\right]$$

eine ganze Zahl sein müsste; und das ist nicht der Fall, weil die rechte Seite dieser Gleichung

$$< \frac{1}{r+1} + \frac{1}{(r+1)^2} + \frac{1}{(r+1)^3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{r+1} \cdot \frac{1}{r+1 - \frac{1}{r+1}} = \frac{1}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \S\ 39\ \mathrm{I}$$

hervorgeht. — Mithin ist e in der That irrational.

Wir wollen e numerisch berechnen. Es ergiebt sich unter der Berücksichtigung von 12 Decimalstellen:

$$
\begin{aligned}
1:\ 2! &= 0,5 \\
1:\ 3! &= 0,166\ 666\ 666\ 667 \\
1:\ 4! &= 0,041\ 666\ 666\ 667 \\
1:\ 5! &= 0,008\ 333\ 333\ 333 \\
1:\ 6! &= 0,001\ 388\ 888\ 889 \\
1:\ 7! &= 0,000\ 198\ 412\ 698 \\
1:\ 8! &= 0,000\ 024\ 801\ 587 \\
1:\ 9! &= 0,000\ 002\ 755\ 732 \\
1:10! &= 0,000\ 000\ 275\ 573 \\
1:11! &= 0,000\ 000\ 025\ 052 \\
1:12! &= 0,000\ 000\ 002\ 088 \\
1:13! &= 0,000\ 000\ 000\ 161 \\
1:14! &= 0,000\ 000\ 000\ 011 \\
1:15! &= 0,000\ 000\ 000\ 001
\end{aligned}
$$

und daher aus (4) als Näherungswerth:

(1) $$e = 2,718\ 281\ 828\ 459.$$

Wegen der Abkürzungsfehler bei den einzelnen Summanden könnte man erwarten, dass das Resultat mit einem Fehler behaftet sei, der bis zu 7 Einheiten der 12ten Decimalstelle ansteigen könnte, während der durch Vernachlässigung aller folgenden Glieder der Reihe begangene Fehler

$$\varphi_{16} = \frac{1}{16!\left(1 - \frac{1}{16+\theta^{-1}}\right)} = \frac{16+\theta^{-1}}{16!\left(15+\theta^{-1}\right)} = \frac{1}{16!}\left(1 + \frac{1}{15+\theta^{-1}}\right)$$

nicht mehr in die 12te Decimalstelle hineinragt.

Zufällig ist hier der erste Fehler Null, also der Werth von e so genau, wie er mit 12 Stellen überhaupt angegeben werden kann.

§ 42.

Der Logarithmus.

Potenzirt man die identische Gleichung

$$a = e^{\frac{\mathfrak{l}a}{e}},$$

durch welche der Logarithmus von a nach e, d. i. die Grösse $\frac{\mathfrak{l}a}{e}$, definirt wird, mit n, so ergiebt sich aus § 40 (3):

$$a^n = e^{n\frac{\mathfrak{l}a}{e}} = 1 + \frac{n\frac{\mathfrak{l}a}{e}}{1!} + \frac{n^2\left(\frac{\mathfrak{l}a}{e}\right)^2}{2!} + \frac{n^3\left(\frac{\mathfrak{l}a}{e}\right)^3}{3!} + \cdots$$

Hieraus folgt:

(1) $$\lim_{n=\infty} \cdot \frac{a^n - 1}{n} = \frac{\mathfrak{l}a}{e}.$$

Den nach dieser Vorschrift zu berechnenden Logarithmus von a, dessen Basis $= e$ ist, nennt man den **natürlichen Logarithmus von a** und bezeichnet:

(2) $$\frac{\mathfrak{l}a}{e} = \log \cdot \mathrm{nat} \cdot a = \mathfrak{l}a.$$

Substituirt man in (1) eine Grösse a von der Form $a = 1 + z$, so lassen sich die dort gegebenen Rechenvorschriften nach einander ausführen. Denn man erhält nach § 39 zunächst:

$$\frac{(1+z)^n - 1}{n}$$

$$= \frac{z}{1} + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} \cdot \frac{z^4}{4} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdots \frac{n-(r-2)}{r-2} \cdot \frac{z^{r-1}}{r-1}$$

$$+ \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdots \frac{n-(r-1)}{r-1} \cdot \frac{z^r}{r} \cdot J_r$$

und dann als den Grenzwerth bei unendlich abnehmendem n:

$$\mathfrak{l}(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{r-2} \frac{z^{r-1}}{r-1} + (-1)^{r-1} \frac{z^r}{r} \cdot J_r,$$

$$J_r = \int_0^1 \frac{dv}{1+z\sqrt[r]{v}} = 1:\left\{1+z-\frac{z}{r+\theta^z}\right\}.$$

Dies giebt den

Lehrsatz I.

Bei jedem positiven Werthe von $(1+z)$ lässt sich der natürliche Logarithmus dieser Zahl durch die Formel

$$(3)\quad l(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{r-2} \cdot \frac{z^{r-1}}{r-1} + (-1)^{r-1} \cdot \frac{z^r}{r} \cdot J_r,$$

$$(4)\qquad J_r = \int_0^1 \frac{dv}{1+z\sqrt[r]{v}} = 1:\left\{1+z-\frac{z}{r+\theta^z}\right\},\quad (0<\theta<1)$$

darstellen; und es ist als Grenzwerth einer Summe von unendlich wachsender Summandenzahl:

$$(5)\qquad l(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

$$\{-1 < z \leqq +1\}\cdot$$

Dies giebt u. A.:

$$(6)\qquad l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots$$

Aus (3) und (4) kann man noch andere Formeln ableiten, welche wegen ihrer grösseren Wirksamkeit bei der numerischen Rechnung und wegen ihrer späteren Verwendung beim Rechnen mit complexen Zahlen wichtig sind.

Versteht man nämlich von jetzt ab unter r eine ungrade Zahl, so folgen aus (3) und (4) für $\text{abs}\cdot z < 1$ die beiden Gleichungen:

$$l(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \cdots - \frac{z^{r-1}}{r-1} + \frac{z^r}{r}\int_0^1 \frac{dv}{1+zv^{\frac{1}{r}}},$$

$$l(1-z) = -\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} - \cdots - \frac{z^{r-1}}{r-1} - \frac{z^r}{r}\int_0^1 \frac{dv}{1-zv^{\frac{1}{r}}}$$

und aus diesen durch Subtraction:

$$l\,\frac{1+z}{1-z} = 2\cdot\left\{\frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots + \frac{z^{r-2}}{r-2} + \frac{z^r}{r}\cdot\int_0^1 \frac{dv}{1-z^2v^{\frac{2}{r}}}\right\}.$$

Substituiren wir endlich

$$\frac{1+z}{1-z}=1+x,\quad z=\frac{x}{2+x},\quad x=\frac{2z}{1-z},$$

so erhalten wir, weil hierbei $-1<x<+\infty$ für $-1<z<1$ hervorgeht, aus der letzten Gleichung noch eine zweite. Wir stellen die Resultate unter Benutzung beider Ausdrücke von J_r in (4) zusammen:

Lehrsatz II.

Versteht man unter r eine ungrade Nummer, so ist,

$$(7)\quad l\frac{1+z}{1-z}=2\cdot\left\{\frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots+\frac{z^{r-2}}{r-2}+\frac{z^r}{r}\cdot J_r\right\},$$

$$(8)\quad l(1+x)=2\cdot\left\{\frac{1}{1}\cdot\left(\frac{x}{2+x}\right)^1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{2+x}\right)^3+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{r-2}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{r-2}+\frac{1}{r}\left(\frac{x}{2+x}\right)^r\cdot J_r\right\},$$

wo für J_r die Ausdrücke

$$(9)\quad J_r=\int_0^1\frac{dv}{1-z^2v^{\frac{2}{r}}}=1:\left\{1-z^2\cdot\frac{r+2\theta}{r+2}\right\}^{1)}$$

$$=\int_0^1\frac{dv}{1-\left(\frac{x}{2+x}\right)^2v^{\frac{2}{r}}}=1:\left\{1-\left(\frac{x}{2+x}\right)^2\cdot\frac{r+2\theta}{r+2}\right\},$$

$$(0<\theta<1)$$

Geltung haben, so lange $-1<z<+1$, beziehungsweise $-1<x<+\infty$ ist. — Dies sind auch die Bedingungen, unter denen bei unendlich wachsendem r

---

[1]) Dieses θ ist nicht mit demjenigen in (4) identisch, sondern das Resultat der Erwägung, dass der aus (4) direct folgende Bruch $\frac{z^2}{\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}}$ zwischen 0 und $\frac{2z^2}{r+2}$ liegt.

$$(10)\qquad l\,\frac{1+z}{1-z}=2\cdot\left\{\frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\cdots\right\},$$

$$(11)\qquad l\,(1+x)=2\cdot\left\{\frac{1}{1}\left(\frac{x}{2+x}\right)^1+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2+x}\right)^5+\cdots\right\}$$

hervorgeht.

Wir wollen endlich noch eine Formel für den Logarithmus entwickeln, welche nicht, wie die obigen, auf den binomischen Satz zurückgreift, sondern auf die für jedes absolute x geltende Identität:

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Aus ihr folgt durch ihre wiederholte Anwendung auf den letzten Summanden der rechten Seite:

$$(12)\qquad \frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-x^{\frac{1}{4}}}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{2^r}\cdot\frac{1-x^{\frac{1}{2^r}}}{1+x^{\frac{1}{2^r}}}+\frac{1}{2^r}\cdot\frac{1+x^{\frac{1}{2^r}}}{1-x^{\frac{1}{2^r}}}.$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung nähert sich aber bei unendlich wachsendem r dem Grenzwerthe $-\frac{2}{lx}$; denn es ist

$$\lim\cdot x^{\frac{1}{2^r}}=\lim\cdot e^{\frac{1}{2^r}lx}=e^0=1,\quad \lim\cdot 2^r\left(1-x^{\frac{1}{2^r}}\right)=-lx,$$

— das Letztere nach (1).

Folglich gilt für jedes absolute x die Gleichung:

$$(13)\qquad \frac{2}{lx}=-\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-x^{\frac{1}{4}}}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1-x^{\frac{1}{8}}}{1+x^{\frac{1}{8}}}+\cdots$$
$$=+\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}-1}{x^{\frac{1}{4}}+1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^{\frac{1}{8}}-1}{x^{\frac{1}{8}}+1}-\cdots$$

Um den Fehler ($-\varphi_r$) zu beurtheilen, welchen man begeht, wenn man rechts nur die Summe

$$(14)\qquad s_r = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}-1}{x^{\frac{1}{4}}+1} - \cdots - \frac{1}{2^r}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2^r}}-1}{x^{\frac{1}{2^r}}+1}$$

setzt, während doch nach (13)

$$(15)\qquad \frac{2}{lx} = s_r - \varphi_r$$

ist, kann man folgenden Weg einschlagen. — Wir setzen, damit φ_r positiv sei, $x > 1$ und daher $lx > 0$ voraus.

Betrachtet man nun zunächst die einzelnen Summanden von

$$\varphi_r = \sum \frac{1}{n}\cdot\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{x^{\frac{1}{n}}+1}, \quad \left(n = 2^{r+1},\ 2^{r+2},\ 2^{r+3}, \ldots\right),$$

so erhält man durch Anwendung von § 40 (5):

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{x^{\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}lx}-1}{e^{\frac{1}{n}lx}+1} = \frac{lx}{2n^2}\cdot\left\{1 - \frac{(lx)^2}{12n^2} + \frac{(lx)^4}{120n^4}\cdot B\right\},$$

wo der Bruch B den positiven Werth

$$B = \frac{1 + \frac{lx}{2n} + \frac{25(lx)^2}{336\cdot n^2} + \cdots + \frac{5(k^2-1)(k+6)(lx)^{k-2}}{(k+3)!\ n^{k-2}} + \cdots}{1 + \frac{lx}{2n} + \frac{(lx)^2}{2\cdot 2!\, n^2} + \cdots\cdots + \frac{(lx)^{k-2}}{2\cdot(k-2)!\, n^{k-2}} + \cdots}$$

hat, welcher sich bei unendlichem n der 1 als Grenze nähert. Mithin ist:

$$\frac{1}{2}lx\cdot\sum\frac{1}{n^2} > \varphi_r > \frac{1}{2}lx\cdot\sum\frac{1}{n^2} - \frac{1}{24}(lx)^3\cdot\sum\frac{1}{n^4}$$

oder:

$$(16)\qquad \frac{lx}{6\cdot 4^r} > \varphi_r > \frac{lx}{6\cdot 4^r} - \frac{(lx)^3}{360\cdot 16^r}.$$

Daher kann man

$$\varphi_r = \frac{l\,x}{6 \cdot 4^r} - \varepsilon_r$$

setzen, wo ε_r eine positive Zahl bedeutet, welche bei wachsendem r schnell abnimmt; und führt man diesen Werth in (15) ein, so ergiebt sich für $l\,x$ eine quadratische Gleichung, welche für unsern Zweck nur die Auflösung

$$(17) \qquad l\,x = 3 \cdot 4^r \cdot \left[(s_r - \varepsilon_r) - \sqrt{(s_r - \varepsilon_r)^2 - \frac{1}{3 \cdot 4^{r-1}}}\right]$$

$$= 4 : \left[(s_r - \varepsilon_r) + \sqrt{(s_r - \varepsilon_r)^2 - \frac{1}{3 \cdot 4^{r-1}}}\right]$$

zulässt, weil die andere nicht der Gleichung (13), $\frac{2}{l\,x} = \lim_{r=\infty} \cdot s_r$, genügt.

Zur Beurtheilung des Werthes von ε_r dient die Formel:

$$(18) \qquad \varepsilon_r = \theta \cdot \frac{(l\,x)^3}{360 \cdot 16^r}, \quad (0 < \theta < 1) \cdot$$

§ 43.

Logarithmen mit verschiedener Basis. Numerische Berechnung derselben.

Logarithmirt man die identische Gleichung

$$a = b^{\frac{l\,a}{b}}$$

nach einer willkürlich gewählten neuen Basis c, so geht der bekannte Satz

$$\frac{l\,a}{c} = \frac{l\,a}{b} \cdot \frac{l\,b}{c}$$

hervor. Setzt man hier $c = e$, so folgt

$$l\,a = \frac{l\,a}{b} \cdot l\,b,$$

oder:

$$\frac{l\,a}{b} = \frac{l\,a}{l\,b} = \frac{1}{l\,b} \cdot l\,a$$

(1) $$\overset{b}{l}a = M \cdot la, \quad M = \frac{1}{lb} = \overset{b}{l}e.$$

Dies heisst in Worten: Der Logarithmus von a nach einer beliebigen Basis b ist gleich dem Quotienten der natürlichen Logarithmen von a und b.

Unter einem **System von Logarithmen** versteht man den Inbegriff aller Logarithmen, welche in der **Basis** übereinstimmen. Ist die Basis $= 10$, so heisst das System das **gemeine** oder das **Briggssche**[1]) System.

Die Zahl $M = \frac{1}{lb} = \overset{b}{l}e$, mit welcher man den natürlichen Logarithmus multipliciren muss, um denjenigen nach der Basis b zu erhalten, heisst der **Modul** des letztgedachten Systems.

Wir wollen den Modul $M = \frac{1}{l10}$ des Briggsschen Systems auf 21 Decimalstellen mit Hülfe der obigen Formeln berechnen.

Anstatt, was sehr wohl anginge, in (8) direct $x = 9$ zu substituiren, zerlegen wir, um schneller zum Ziele zu gelangen, die Zahl 10 in ihre Primfactoren 2 und 5 und berechnen $l10 = l2 + l5$. Nun könnten wir aus (8) $l2$ und $l5$ direct berechnen. Wir ziehn es jedoch vor, auch diese Logarithmen noch auf zwei andere zurückzuführen.

Es ist nämlich:

$$l5 = l(2^2 + 1) = l\left[2^2\left(1 + \frac{1}{4}\right)\right] = 2l2 + l\left(1 + \frac{1}{4}\right)$$

und:

$$7 \cdot l2 = l(2^7) = l128 = l(5^3 + 3) = l\left[5^3\left(1 + \frac{3}{125}\right)\right.$$
$$\left. = 3 \cdot l5 + l\left(1 + \frac{3}{125}\right)\right].$$

Aus den beiden so eben gefundenen Gleichungen

$$l5 - 2 \cdot l2 = l\left(1 + \frac{1}{4}\right),$$
$$3 \cdot l5 - 7 \cdot l2 = -l\left(1 + \frac{3}{125}\right)$$

[1]) Henry Briggs, gest. 1630 zu Oxford, hat zuerst eine Tafel der Logarithmen dieses Systems berechnet.

folgt aber:

$$(2)\quad \begin{cases} l2 = 3\cdot l\left(1+\frac{1}{4}\right)+\quad l\left(1+\frac{3}{125}\right), \\ l5 = 7\cdot l\left(1+\frac{1}{4}\right)+2\cdot l\left(1+\frac{3}{125}\right), \\ l10 = 10\cdot l\left(1+\frac{1}{4}\right)+3\cdot l\left(1+\frac{3}{125}\right); \end{cases}$$

und aus (8) und (9) des vorigen § ergiebt sich:

$$(3)\quad \frac{1}{2}\cdot l\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{1\cdot 9^1}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{(r-2)\cdot 9^{r-2}}+\frac{1}{r\cdot 9^r\cdot\left(1-\frac{1}{9^2}\frac{r+2\theta}{r+2}\right)},$$

$$(4)\quad \frac{1}{2}\,l\left(1+\frac{3}{125}\right)=\frac{3^1}{1\cdot 253^1}+\frac{3^3}{3\cdot 253^3}+\frac{3^5}{5\cdot 253^5}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{3^{r-2}}{(r-2)\cdot 253^{r-2}}+\frac{3^r}{r\cdot 253^r\left(1-\frac{3^2}{253^2}\cdot\frac{r+2\theta}{r+2}\right)}.$$

In diesen Gleichungen sind die letzten Summanden nicht völlig bestimmbar, weil man von der Grösse θ nur weiss, dass ihr Werth zwischen 0 und 1 liegt; weshalb man von dem Bruche $\frac{r+2\theta}{r+2}$ nur weiss, dass er zwischen $\frac{r}{r+2}$ und 1 liegt. Dies hindert aber augenscheinlich nicht die Anwendung der obigen Formeln bei Näherungsrechnungen. Wir rechnen zunächst nach (4) und finden, wenn wir bei der numerischen Auswerthung der einzelnen Glieder auf die Identität

$$\frac{3^2}{253^2}=\frac{10}{64009}-\frac{1}{64009}$$

Obacht geben, mit verhältnissmässig geringer Mühe die folgenden Werthe, in denen der bequemeren Bezeichnung wegen $\frac{3}{253}=t$ gesetzt ist:

$t = 0,011\,857\,707\,509\,881\,422\,925$	$t = 0,011\,857\,707\,509\,881\,422\,925$
$t^3 = 0,000\,001\,667\,255\,660\,749\,782$	$\frac{1}{3}t^3 = 0,000\,000\,555\,751\,886\,916\,594$
$t^5 = 0,000\,000\,000\,234\,424\,861\,297$	$\frac{1}{5}t^5 = 0,000\,000\,000\,046\,884\,972\,259$
$t^7 = 0,000\,000\,000\,000\,032\,961\,361$	$\frac{1}{7}t^7 = 0,000\,000\,000\,000\,004\,708\,766$
$t^9 = 0,000\,000\,000\,000\,000\,004\,635$	$\frac{1}{9}t^9 = 0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,515$

Damit die Summe der in unserer zweiten Columne geschriebenen Zahlen $=\frac{1}{2}\,l\left(1+\frac{3}{125}\right)$ sei, muss $\frac{1}{9}t^9$ nach Gleichung (4) zuvor noch durch

$$1-\frac{9+2\theta}{11}\cdot t^2 = 1-\frac{9+2\theta}{11}\cdot\frac{9}{64009}$$

dividirt werden. Dies ändert aber nichts an der 5 in der 21[ten] Decimalstelle von $\frac{1}{9}t^9$. Und es ist deshalb nach (4):

$$\frac{1}{2}\cdot l\left(1+\frac{3}{125}\right) = 0,011\,858\,263\,308\,658\,021\,059$$

mit einem in der 21[ten] Decimalstelle noch nicht sichtbaren Fehler.

Durch eine ähnliche Rechnung findet man aus (3):

$$\frac{1}{2}\cdot l\left(1+\frac{1}{4}\right) = 0,111\,571\,775\,657\,104\,877\,883,$$

wo die 21[ste] Decimalstelle etwa um $\frac{1}{10}$ ihres Stellenwerthes zu gross ist.

Aus (2) ergiebt sich daher:

$$l2 = 0,693\,147\,180\,559\,945\,309\,417,$$
$$l5 = 1,609\,437\,912\,434\,100\,374\,601,$$
$$l10 = 2,302\,585\,092\,994\,045\,684\,018;$$

und demnach aus (1):

$$M = \frac{1}{l10} = \frac{le}{10} = 0,434\,294\,481\,903\,251\,827\,651.$$

Übrigens kann man auch die Gleichung (17) des § 42 mit gutem Erfolg zur Berechnung von M benutzen.

§ 44.

Einmalige Differentiation und Integration der Exponentialfunctionen und Logarithmen.

Aus § 40, (5) u. (6) ergiebt sich für $r = 1$, wenn man zugleich $(-x)$ für x schreibt:

$$e^{-x} = 1 - x e^{-x} \int_0^1 e^{+xv} dv,$$

$$e^x - 1 = x \int_0^1 e^{xv} dv = \int_0^x e^u du;$$

— das Letztere vermittelst der Substitution $xv = u$, $x dv = du$.

Differentiirt man die letzte Gleichung nach x, so folgt ferner:

$$\frac{d \cdot e^x}{dx} = e^x.$$

Diese Gleichung kann man, wenn $e^x = y$, also $x = l y$ gesetzt wird, auch so schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}, \quad \frac{d. l y}{dy} = \frac{1}{y};$$

d. i., wenn man noch in der letzten Gleichung x für y schreibt:

$$\frac{d \cdot l x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Hieraus fliesst durch einmalige Integration:

$$\int \frac{dx}{x} = l x + C, \quad \int_a^z \frac{dx}{x} = l z - l a = l \frac{z}{a}, \text{ [1]}$$

oder bei einem negativen x, weil $\frac{dx}{x} = \frac{d(-x)}{-x}$ ist:

---

[1]) Hiermit ist der Ausnahmefall des § 24 bei der Auswerthung von $\int x^n dx$ erledigt.

$$\int \frac{dx}{x} = l(-x) + C, \quad \int_a^z \frac{dx}{x} = l(-z) - l(-a) = l\frac{z}{a}.$$

Ferner erhält man durch partielle Integration:

$$\int l x \, dx = l x \int dx - \int \left(\frac{dx}{x} \int dx \right) = x\, l x - x + C,$$

$$\int_a^z l x \, dx = z(l z - 1) - a(l a - 1).$$

Ist die Basis der Exponentialfunctionen und Logarithmen von e verschieden, so erledigt sich die Aufgabe ihrer Differentiation und Integration durch die Benutzung der Identitäten:

$$a^x = (e^{la})^x = e^{x la}, \quad \overset{a}{l} x = \frac{l x}{l a},$$

da man mittelst derselben im Stande ist, geeignete Mittelfunctionen einzuführen; denn man braucht bei a^x nur $x \cdot la = y$ zu setzen und bei $\overset{a}{l} x$ den constanten Factor $\frac{1}{la}$ abzusondern.

Demnach ergiebt sich ohne Weiteres der folgende

Lehrsatz.

Ist die Basis einer Potenz oder eines Logarithmus constant, so geschieht die Differentiation nach den Formeln:

(1) $$\frac{d \cdot e^x}{dx} = e^x,$$

(2) $$\frac{d \cdot a^x}{dx} = a^x \cdot la;$$

(3) $$\frac{d \cdot l x}{dx} = \frac{1}{x},$$

(4) $$\frac{d . \overset{a}{l} x}{dx} = \frac{1}{x \cdot la}.$$

Bei der Integration hat man:

(5) $\int_0^z e^x dx = e^z - 1, \quad \int e^x dx = e^x + C,$

(6) $\int_0^z a^x dx = \frac{a^z - 1}{la}, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{la} + C;$

(7) $\int_a^z \frac{dx}{x} = l\frac{z}{a}, \quad \int \frac{dx}{x} = lx + C = l(-x) + C = \frac{1}{2}l(x^2) + C;$

(8) $\int_a^z lx\, dx = z(lz - 1) - a(la - 1), \quad \int lx\, dx = x(lx - 1) + C$

$$= xl\frac{x}{e} + C.$$

In dem unbestimmten Integral (7) muss, wenn man nicht $\frac{1}{2}l(x^2)$ schreiben will, rechts das Vorzeichen von x so gewählt werden, dass der Numerus positiv ist.[1])

§ 45.

Wiederholte Differentiation und Integration der Exponentialfunctionen und Logarithmen.

Aus den Gleichungen (1) bis (4) des vorigen § folgt ohne Weiteres:

(1) $$\frac{d^r \cdot e^x}{dx^r} = e^x,$$

(2) $$\frac{d^r \cdot a^x}{dx^r} = a^x \cdot (la)^r;$$

---

[1]) Nach der Einführung der complexen Zahlen wird es sich zeigen, dass man nach Belieben ohne alle Einschränkung sowohl lx als $l(-x)$ schreiben darf, weil beide Logarithmen eine constante Differenz haben. In dem bestimmten Integral findet nach dem Obigen ohnehin kein Unterschied statt.

(3) $$\frac{d^r \cdot l x}{d x^r} = (-1)^{r-1} \cdot \frac{(r-1)!}{x^r},$$

(4) $$\frac{d^r \cdot \frac{l x}{a}}{d x^r} = (-1)^{r-1} \cdot \frac{(r-1)!}{x^r \cdot l a}.$$

Diejenigen Fälle, in denen die Basis a von e abweicht, geben also Resultate, welche aus den Resultaten für $a = e$ durch Hinzufügung eines constanten Factors entstehn und daher leicht auf diese zurückgeführt werden.

Was nun die wiederholte Integration angeht, so setzen wir in § 35, (6) zunächst $f(x) = c^x$ und erhalten dadurch, indem wir noch $(r-1)$ für r schreiben:

$$\int_a^{u,z} c^x dx \cdot du^{r-1} = \frac{1}{(r-1)!} \cdot \int_a^z (z-x)^{r-1} c^x dx \cdot$$

Ein Weg, um dieses Integral durch die Operationen der sieben Rechnungsarten darzustellen, ist der, dass man in der Grundform des Taylorschen Satzes [§ 36, (2)] $f(x) = c^x$ setzt und die Gleichung für das in ihr vorkommende Integral auflöst. Da hierbei nach der obigen Gleichung (1) $f^{(r)}(x) = c^x \cdot (lc)^r$ ist, so ergiebt die fragliche Substitution sofort:

(5) $$\int_a^{x,z} c^x \cdot dx^r = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^z (z-x)^{r-1} c^x dx$$

$$= \frac{1}{(lc)^r} \cdot \left[c^z - c^a \left\{1 + \frac{(z-a)^1}{1!}(lc)^1 + \frac{(z-a)^2}{2!}(lc)^2 + \cdots \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdots + \frac{(z-a)^{r-1}}{(r-1)!}(lc)^{r-1}\right\}\right].$$

Macht man hier $z = 0$ und schreibt dann z für a, so ergiebt diese Gleichung:

$$(6)\int_0^z x^{r-1}c^x\,dx=(-1)^r\cdot\frac{(r-1)!}{(lc)^r}\Big[1-c^z\Big\{1-\frac{z^1}{1!}(lc)^1+\frac{z^2}{2!}(lc)^2-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{r-1}\frac{z^{r-1}}{(r-1)!}(lc)^{r-1}\Big\}\Big],$$

und wenn man noch z in $(-z)$ verwandelt (was links der Verwandlung von x in $(-x)$ gleichkommt) oder auch c^{-1} für c schreibt:

$$(7)\qquad \int_0^z x^{r-1}c^{-x}\,dx=\frac{(r-1)!}{(lc)^r}\Big[1-c^{-z}\Big\{1+\frac{z^1}{1!}(lc)^1+\frac{z^2}{2!}(lc)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{z^{r-1}}{(r-1)!}(lc)^{r-1}\Big\}\Big].$$

Für das r^{te} Integral des Logarithmus ergiebt sich aus § 35, (6) ferner:

$$\int_a^{x,z} lx\cdot dx^r=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^z (z-x)^{r-1}lx\cdot dx;$$

und hieraus durch partielle Integration:

$$\int(z-x)^{r-1}lx\,dx=lx\int(z-x)^{r-1}dx-\int\Big(\frac{dx}{x}\int(z-x)^{r-1}dx\Big)$$

$$=-\frac{(z-x)^r}{r}lx+\frac{1}{r}\int\frac{(z-x)^r}{x}dx;$$

$$(8)\qquad \int_a^{x,z} lx\cdot dx^r$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^z(z-x)^{r-1}lx\cdot dx=\frac{(z-a)^r}{r!}la+\frac{1}{r!}\int_a^z\frac{(z-x)^r}{x}dx.$$

Die einfachen Integrale, welche in dieser Gleichung noch enthalten sind, lassen sich durch Ausdrücke von verschiedener Form auswerthen, da eine grössere Anzahl von Transformationen der Differentiale zu integrirbaren Gebilden führt. U. a. ist:

$$\int_a^z \frac{(z-x)^r}{x} dx$$

$$= \int_a^z \left\{ \frac{z^r}{x} - \frac{z^r - (z-x)^r}{x} \right\} dx = \int_a^z \frac{z^r}{x} dx - \int_a^z \frac{z^r - (z-x)^r}{z-(z-x)} dx$$

$$= z^r(lz - la) - \int_a^z \left\{ z^{r-1} + z^{r-2}(z-x)^1 + z^{r-3}(z-x)^2 + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (z-x)^{r-1} \right\} dx$$

$$= z^r(lz - la) - \frac{1}{1} z^{r-1}(z-a)^1 - \frac{1}{2} z^{r-2}(z-a)^2 - \frac{1}{3} z^{r-3}(z-a)^3 - \cdots$$
$$\cdots - \frac{1}{r}(z-a)^r.$$

Durch die Substitution dieses Ausdrucks geht die Gleichung (8) über in:

$$(9) \qquad \int_a^{x,z} lx \cdot dx^r = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^z (z-x)^{r-1} lx \cdot dx$$

$$= \frac{z^r}{r!} \cdot lz - \frac{z^r - (z-a)^r}{r!} \cdot la - \frac{1}{r!} \left\{ \frac{1}{1} \cdot z^{r-1}(z-a)^1 + \frac{1}{2} z^{r-2}(z-a)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3} z^{r-3}(z-a)^3 + \cdots + \frac{1}{r}(z-a)^r \right\}.$$

Zu einer **zweiten** Form gelangt man durch die Entwickelung von $(z-x)^r$ nach dem binomischen Satz. Diese Transformation ergiebt:

$$\int_a^z \frac{(z-x)^r}{x} dx = \int_a^z \left\{ \frac{z^r}{x} - \binom{r}{1} z^{r-1} + \binom{r}{2} z^{r-2} x^1 - \binom{r}{3} z^{r-3} x^2 + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} x^{r-1} \right\} dx$$

$$= z^r(lz - la) - \left[\frac{1}{1}\binom{r}{1} - \frac{1}{2}\binom{r}{2} + \frac{1}{3}\binom{r}{3} - \cdots + (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{r}\binom{r}{r} \right] \cdot z^r$$

$$+ \frac{1}{1}\binom{r}{1} z^{r-1} a - \frac{1}{2}\binom{r}{2} z^{r-2} a^2 + \frac{1}{3}\binom{r}{3} z^{r-3} a^3 - \cdots + (-1)^{r-1} \frac{1}{r}\binom{r}{r} a^r;$$

also:

(10) $$\int_a^{z,z} lx \cdot dx^r = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^z (z-x)^{r-1}\, lx \cdot dx$$

$$= \frac{z^r}{r!}\cdot lz - \frac{z^r-(z-a)^r}{r!}\cdot la - \frac{1}{r!}\left[\frac{1}{1}\binom{r}{1} - \frac{1}{2}\binom{r}{2} + \frac{1}{3}\binom{r}{3} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{r}{r}\right]\cdot z^r$$
$$+ \frac{1}{r!}\left\{\frac{1}{1}\cdot\binom{r}{1} a z^{r-1} - \frac{1}{2}\binom{r}{2} a^2 z^{r-2} + \frac{1}{3}\binom{r}{3} a^3 z^{r-3} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{r}{r} a^r\right\}.$$

Die letzte Gleichung giebt den von Logarithmen freien Theil der rechten Seite nach Potenzen der Zahl z geordnet an. Entwickelt man daher den entsprechenden Theil des Ausdruckes (9) in gleicher Weise, so erhält man die identischen Gleichungen:

(11) $$\frac{1}{1}\binom{r}{1} - \frac{1}{2}\binom{r}{2} + \frac{1}{3}\binom{r}{1} - \cdots + (-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{r}{r}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{r},$$

(12) $$\frac{1}{n}\cdot\binom{r}{n} = \frac{1}{n}\cdot\binom{n}{n} + \frac{1}{n+1}\cdot\binom{n+1}{n} + \frac{1}{n+2}\cdot\binom{n+2}{n} + \cdots + \frac{1}{r}\cdot\binom{r}{n}.$$

Die letztere bietet übrigens nichts wesentlich Neues, da sie sich nach der Multiplication mit n in die bekannte Gleichung[1])

$$\binom{r}{n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \binom{n+1}{n-1} + \cdots + \binom{r-1}{n-1}$$

verwandelt.

Bei den obigen Entwickelungen für den Logarithmus waren die Werthe $z=0$ und $a=0$ auszuschliessen, weil das Symbol $l0$ keine Bedeutung hat.

Es kann sich aber darum handeln, zu entscheiden, ob die Integrale sich einem endlichen Grenzwerthe nähern, wenn z oder a sich der Null nähert, und welches der Grenzwerth sei.

---

[1]) § 30, (14).

Nun zeigt zunächst der letzte Ausdruck der Gleichung (8), dass für $\lim \cdot z = 0$ ein solcher Grenzwerth vorhanden ist — denn seine beiden Summanden sind an der Stelle $z = 0$ stetig — und ergiebt für denselben ohne irgend welche Schwierigkeit durch directe Auswerthung für $z = 0$:

$$(13) \quad \int_a^{x,0} lx \cdot dx^r = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \int_a^0 x^{r-1}\, lx \cdot dx = (-1)^r \cdot \frac{a^r}{r!}\left(la - \frac{1}{r}\right),$$

also, wenn man in den beiden letzten Ausdrücken noch a durch z ersetzt, u. a. auch:

$$(14) \quad \int_0^z x^{r-1} lx \cdot dx = \frac{z^r}{r} \cdot \left(lz - \frac{1}{r}\right).$$

Erwägt man ausserdem, dass die rechte Seite der Gleichung (9) sich ebenfalls dem in (13) ermittelten Grenzwerth nähern muss, und dass die Gleichung (9) zu dem letzteren noch den Summanden

$$\lim_{z=0} \cdot \frac{z^r}{r!}\, lz$$

hinzufügt, so ergiebt sich — weil $r = 1$ genommen werden darf — die ausserordentlich wichtige Gleichung:

$$\lim_{z=0} \cdot z\, lz = 0.$$

Dieselbe wird häufig in einer etwas veränderten Form gebraucht. Versteht man nämlich unter p irgend eine positive Constante, so wird nach der Substitution $z = x^p$ auch $x = 0$ für $z = 0$, während

$$z\, lz = p \cdot x^p\, lx$$

hervorgeht. Daher ist:

$$(15) \quad \lim_{x=0} \cdot x^p\, lx = 0, \quad (p > 0),$$

wo nun p nicht mehr eine ganze Zahl zu sein braucht, sondern eine ganz beliebige positive Constante ist.

Substituirt man ferner $lz = -\frac{u}{p}$, $z = e^{-\frac{u}{p}}$, so wächst nach

§ 39, L. I u positiv unendlich, wenn z unendlich klein ist, und es folgt aus der identischen Gleichung

$$z\,l z = -e^{-\frac{u}{p}} \cdot \frac{u}{p} = -\frac{1}{p} \cdot \left\{u^p \cdot e^{-u}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

in Verbindung mit dem Obigen auch die Relation:

(16) $$\lim_{x=+\infty} \cdot x^p e^{-x} = \lim_{x=+\infty} \cdot \frac{x^p}{e^x} = 0,$$

bei welcher man die Bedingung, dass die Constante $p > 0$ sei, offenbar nicht festzuhalten braucht.

Mit Hülfe des Grenzwerthes (15) erlangt man schliesslich aus (9) noch die Gleichung:

(17) $$\int_0^{x,z} l x \cdot dx^r = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^z (z-x)^{r-1} l x \cdot dx$$

$$= \frac{1}{r!}\left\{z^r l z - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{r}\right) z^r\right\};$$

denn der Ausdruck

$$\left[z^r - (z-a)^r\right] l a = \left[z^{r-1} + z^{r-2}(z-a) + z^{r-3}(z-a)^2 + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + (z-a)^{r-1}\right] \cdot a\,l a$$

nähert sich nach (15) dem Grenzwerthe 0, wenn a als unendlich klein angenommen wird.

§ 46.

Beispiele für die Differentiation der Functionen von Exponentialfunctionen und Logarithmen.

I. $$\frac{d \cdot a^{b^x}}{dx} = a^{b^x} \cdot b^x \cdot l a \cdot l b;$$

denn setzt man $b^x = u$, so ist nach § 8:

$$\frac{d \cdot a^{b^x}}{dx} = \frac{d \cdot a^u}{du} \cdot \frac{d . b^x}{dx} = a^u l a \cdot b^x l b.$$

II. $\frac{d \cdot x^x}{dx} = x^x(lx + 1);$

denn setzt man im Exponenten $x = u$, so hat man nach § 9:

$$\frac{d \cdot x^x}{dx} = \frac{d \cdot x^u}{dx} = x^u lx \cdot \frac{du}{dx} + u x^{u-1} \cdot \frac{dx}{dx} = x^x lx + x^x.$$

III. $\frac{d \cdot x^{lx}}{dx} = 2 x^{lx-1} \cdot lx;$

denn setzt man $lx = u$, so folgt:

$$\frac{d \cdot x^u}{dx} = x^u \cdot lx \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot x^{u-1} \cdot \frac{dx}{dx} = x^{lx} \cdot lx \cdot \frac{1}{x} + lx \cdot x^{lx-1} \cdot 1 \cdot$$

IV. $\frac{d \cdot (lx)^n}{dx} = \frac{n\,(lx)^{n-1}}{x}.$

V. $\frac{d \cdot (lx)^x}{dx} = (lx)^{x-1} + (lx)^x \cdot l\,(lx) \cdot$

VI. $$\frac{d}{dx} \cdot l \left\{ (x - a_1)^{\alpha_1} \cdot (x - a_2)^{\alpha_2} \cdot (x - a_3)^{\alpha_3} \cdots (x - a_n)^{\alpha_n} \right\}$$
$$= \frac{\alpha_1}{x - a_1} + \frac{\alpha_2}{x - a_2} + \frac{\alpha_3}{x - a_3} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x - a_n} \cdot$$

VII. $\frac{d \cdot l(a + \sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\,(a + \sqrt{x})\sqrt{x}}.$

VIII. $\frac{d \cdot l\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$

IX. $\frac{d \cdot l\left(x - a + \sqrt{x^2 - 2ax + b}\right)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2ax + b}}.$

X. Man bezeichnet:

$$lx = l^1 x,$$
$$l\,(lx) = l^2 x, \text{ [1]}$$
$$l\left\{l\,(lx)\right\} = l\left(l^2 x\right) = l^3 x,$$

---

[1]) Es bedeutet also die Gleichung $u = l^2 x$ so viel, wie

$$x = e^{e^u}.$$

überhaupt:

$$l\left(l^{n-1}x\right)=l^{n}x.$$

Durch Differentiation ergiebt sich:

$$\frac{d\cdot\left(l^{n}x\right)^{\mu}}{dx}=\mu\cdot\frac{\left(l^{n}x\right)^{\mu-1}}{x\cdot lx\cdot l^{2}x\cdot l^{3}x\cdots l^{n-1}x};$$

denn es ist:

$$\frac{d\cdot l^{n}x}{dx}=\frac{d\cdot l\left(l^{n-1}x\right)}{d\cdot l^{n-1}x}\cdot\frac{d\cdot l^{n-1}x}{dx}=\frac{1}{l^{n-1}x}\cdot\frac{d\cdot l^{n-1}x}{dx}.$$

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass $l^{n}x$ mit x zugleich positiv unendlich wächst, weil $l^{1}x$, also auch $l^{2}x$, u. s. w. diese Eigenschaft besitzt. Und zwar geschieht dies nach § 45, (15) in der Weise, dass

$$\lim_{x=+\infty}\cdot\frac{l^{n}x}{\left(l^{n-1}x\right)^{p}}=0,\quad(p>0)$$

hervorgeht.

§ 47.

Beispiele für die Integration der Functionen von Exponentialfunctionen und Logarithmen.

Macht man $e^{x}=y$, $x=ly$; $e^{a}=b$, $a=lb$; $e^{z}=u$, $z=lu$; also $e^{x}dx=dy$, $dx=\frac{dy}{y}$, so ist

$$(1)\qquad\int_{a}^{z}f(x,e^{x})\,dx=\int_{b}^{u}f(ly,y)\frac{dy}{y}=\int_{b}^{u}\frac{f(lx,x)}{x}dx$$

eine identische Gleichung. Die in ihr ausgesprochene Vorschrift, um Integrale von Differentialen mit Exponentialfunctionen oder Logarithmen aus einander abzuleiten, führt bei ihrer Anwendung auf die Resultate des § 45 zu den folgenden Ausdrücken, welche nur noch die Verwandlung erfahren haben, dass c für lc und

schliesslich wieder a für b, z für u geschrieben, theilweise auch r um 1 erhöht ist:

I. $$\int_a^z x^{c-1}\left(l\frac{z}{x}\right)^r dx$$

$$=\frac{r!}{c^{r+1}}\left\{z^c-a^c\left[1+\frac{cl\frac{z}{a}}{1!}+\frac{c^2\left(l\frac{z}{a}\right)^2}{2!}+\cdots+\frac{c^r\left(l\frac{z}{a}\right)^r}{r!}\right]\right\}\cdots(5).$$

II. $$\int_1^z\frac{(lx)^r}{x^{c+1}}dx$$

$$=\frac{r!}{c^{r+1}}\cdot\left\{1-z^{-c}\left[1+\frac{clz}{1!}+\frac{c^2(lz)^2}{2!}+\cdots+\frac{c^r(lz)^r}{r!}\right]\right\}\cdots\text{I oder }(6).$$

III. $$r\cdot\int_a^z\left(e^z-e^x\right)^{r-1}e^x x\,dx\cdots\cdots\cdots(9)\text{ u. }(10).$$

$$=ze^{rz}-a\left[e^{rz}-\left(e^z-e^a\right)^r\right]-\frac{1}{1}\cdot e^{(r-1)z}\left(e^z-e^a\right)^1-\frac{1}{2}\cdot e^{(r-2)z}\left(e^z-e^a\right)^2-\cdots$$

$$\cdots-\frac{1}{r}\left(e^z-e^a\right)^r$$

$$=ze^{rz}-a\left[e^{rz}-\left(e^z-e^a\right)^r\right]-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{r}\right)\cdot e^{rz}$$

$$+\frac{1}{1}\cdot\binom{r}{1}e^{(r-1)z+a}-\frac{1}{2}\cdot\binom{r}{2}e^{(r-2)z+2a}+\frac{1}{3}\cdot\binom{r}{3}e^{(r-3)z+3a}$$

$$-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{r}{r}e^{ra}.$$

IV. $$\int_{-\infty}^z e^{rx}x\,dx=\frac{1}{r}e^z\left(z-\frac{1}{r}\right),\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

was sich durch partielle Integration mit Benutzung von § 45, (16) ebenfalls leicht ergiebt.

$$\text{V.}\quad \int_{-\infty}^{z} (e^z - e^x)^{r-1} e^x x\,dx = \frac{e^{rz}}{r} \cdot \left\{ z - \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r} \right] \right\}, \cdot\cdot (17)$$

mit dem Specialwerthe, welcher für $z = 0$ bei der Substitution von $(-x)$ für x entsteht:

$$\text{VI.}\quad \int_0^{\infty} (1 - e^{-x})^{r-1} e^{-x} x\,dx = \frac{1}{r} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r} \right].$$

Andere Integrale ergeben sich durch Inversion der Beispiele des vorigen §. Unter diesen verdienen besonders die folgenden der Beachtung:

$$\text{VII.}\quad \int \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)x - (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1)}{(x - a_1)(x - a_2)} dx$$

$$= l \left\{ (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \right\} + C \cdots\cdots\cdots\cdots \text{VI.}$$

$$\text{VIII.}\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2ax + b}} = l(x - a + \sqrt{x^2 - 2ax + b}) + C \cdots \text{IX.}$$

$$\text{IX.}\quad \int_a^z \frac{(l^n x)^{\mu - 1}}{l^0 x\, l^1 x\, l^2 x\, l^3 x \cdots l^{n-1} x} dx = \frac{1}{\mu} \left\{ (l^n z)^{\mu} - (l^n a)^{\mu} \right\} {}^{1)} \cdots\cdot \text{X.}$$

Die letzte Gleichung ist namentlich deshalb wichtig, weil sie, wenn $p = -\mu$ irgend eine positive Zahl bedeutet, als Resultat einen endlichen Werth

$$\text{X.}\quad \int_a^{\infty} \frac{dx}{l^0 x\, l^1 x\, l^2 x \cdots l^{n-1} x\, (l^n x)^{1+p}} = \frac{1}{p (l^n a)^p}, \quad (p > 0)$$

ergiebt, während das Integral IX bei einem positiven Werthe von μ mit seiner oberen Grenze zugleich unendlich wächst, und ein Gleiches auch von dem für $\mu = 0$ entstehenden Integral

$$\text{XI.}\quad \int_a^z \frac{dx}{l^0 x\, l^1 x\, l^2 x \cdots l^{n-1} x \cdot l^n x} = l^{n+1} z - l^{n+1} a$$

gilt.

[1]) Es bedeutet hier und später $l^0 x = x$.

Durch partielle Integration erhält man:

XII. $$\int \frac{c^x}{x^{n+1}} dx = -\frac{c^x}{nx^n} + \frac{lc}{n} \cdot \int \frac{c^x}{x^n} dx,$$

XIII. $$\int \frac{dx}{(lx)^{n+1}} = -\frac{x}{n(lx)^n} + \frac{1}{n} \int \frac{dx}{l(x)^n};$$

so dass man das n schrittweise um 1 vermindern oder auch vermehren kann.

Die genauere Beschäftigung mit den beiden letzten Integralen, welche übrigens durch die zu Anfang dieses § angezeigte Transformation in einander übergehn, würde uns hier zu weit führen. Es werde deshalb nur noch angemerkt, dass die im Wesentlichen äquivalenten Integrale

$$\int \frac{c^x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{lx},$$

zu welchen XII und XIII bei wiederholter Anwendung auf sich selbst bei einem ganzen positiven n führen, durch die sieben Rechnungsarten in geschlossenen Ausdrücken nicht dargestellt werden können[1]); und dass

XIV. $$\int \frac{x^{m-1}}{(lx)^{n+1}} dx = m^n \cdot \int \frac{dy}{(ly)^{n+1}}$$

durch die Substitution von $x^m = y$ hervorgeht. — Der Ausnahmefall dieser Gleichung, dass $m = 0$ sei, ist durch X u. XI erledigt.

§ 48.

Graduirung der Function $\varphi(x,n,p) = l^0 x\, l^1 x\, l^2 x \cdots l^{n-1} x \left(l^n x\right)^{1+p}$ für ein positiv unendliches x.

Wir wollen durch die Bezeichnungen

$$\psi(x) \succ \chi(x), \quad \chi(x) \prec \psi(x)$$

[1]) Vergl. § 103.

hier und in Zukunft anzeigen, dass

$$\lim_{x=\infty} \cdot \frac{\psi(x)}{\chi(x)} = \infty, \quad \lim_{x=\infty} \cdot \frac{\chi(x)}{\psi(x)} = 0$$

sei. Man spricht dies so aus, dass $\chi(x)$ von niedrigerer Ordnung unendlich sei, als $\psi(x)$.

Für den absoluten Werth von p wollen wir das Zeichen ϖ, also

$$\varpi = \text{abs} \cdot p,$$

gebrauchen.

Nun ist:

$$\frac{\varphi(x, n, p)}{\varphi(x, n, 0)} = (l^n x)^p,$$

also, weil $l^n x$ zugleich mit x unendlich wächst (§ 46, X):

$$\text{(1)} \qquad \varphi(x, n, +\varpi) \succ \varphi(x, n, 0) \succ \varphi(x, n, -\varpi).$$

Beachten wir ferner, dass nach der Definition von φ

$$\varphi(x, n, -1) = \varphi(x, n-1, 0)$$

ist, und dass

$$\frac{\varphi(x, n+1, \varpi')}{\varphi(x, n, \varpi)} = \frac{(l \cdot l^n x)^{1+\varpi'}}{(l^n x)^{\varpi}} = \left\{ \frac{l \cdot l^n x}{(l^n x)^{\frac{\varpi}{1+\varpi'}}} \right\}^{1+\varpi'}$$

nach § 45, (15) für ein unendlich grosses $l^n x = u$ verschwindet, so erhalten wir aus (1) die Scala:

$$\text{(2)} \qquad \varphi(x, n, +\varpi) \succ \varphi(x, n+1, +\varpi') \succ \varphi(x, n+1, 0) \succ \varphi(x, n+1, -\varpi'') \succ \varphi(x, n, 0). \quad \{0 < \varpi'' < 1\}.$$

Hierin ist für $n = 0$ die Scala enthalten:

$$\text{(3)} \qquad x^{1+\varpi} \succ x(lx)^{1+\varpi'} \succ x\,lx \succ x(lx)^{1-\varpi''} \succ x, \quad \{0 < \varpi'' < 1\}$$

und daher für $n > 0$ die Scala:

$$\text{(4)} \qquad x^{1+\varpi} \succ \varphi(x, n, \pm\varpi') \succ x.$$

Diese Betrachtungen geben den Anlass zu folgendem

Lehrsatz.

Bezeichnet man

$$\overset{0}{l}x\,\overset{1}{l}x\,\overset{2}{l}x\cdots\overset{n-1}{l}x\left(\overset{n}{l}x\right)^{1+p}=\varphi(x,n,p),$$

wo p eine Constante bedeuten soll, deren absoluter Werth ϖ, wenn sie negativ ist, die 1 nicht übersteigt, so ist für ein unendlich wachsendes x, wie klein das ϖ auch angenommen werden mag:

$$x^{1+\varpi}\succ\varphi(x,n,p)\succ x.$$

Im Übrigen erhält man eine stetige Folge von Functionen, welche von immer höherer Ordnung unendlich werden, wenn man, mit $\varphi(x,1,-1)=x$ beginnend, das p in $\varphi(x,1,p)=x(lx)^{1+p}$ von -1 bis 0 wachsen lässt, dann $\varphi(x,1,0)$ mit $\varphi(x,2,-1)$ vertauscht, welches denselben Werth $x\,lx$ besitzt, und in $\varphi(x,2,p)=x\,lx\,(\overset{2}{l}x)^{1+p}$ das p wieder von -1 bis 0 wachsen lässt, hierauf in gleicher Weise mit $\varphi(x,3,p)=x\,lx\,\overset{2}{l}x\left(\overset{3}{l}x\right)^{1+p}$ verfährt, u. s. f.

Setzt man in den obigen Scalen $\frac{1}{x}$ für x und multiplicirt mit x^2, so bleiben die sämmtlichen Folgerungen bestehn, nur dass das neue x sich aus dem positiven Gebiete her der Null nähert. — Daher der

Zusatz.

Für ein unendlich abnehmendes positives x ist

$$x^{1-\varpi}\succ x^2\cdot\varphi(x,n,p)\succ x,$$

wie klein man auch das ϖ annehmen mag; und es bilden die Functionen

$$x^2\cdot\varphi\left(\frac{1}{x},0,p\right)=x^2\cdot\left(l^0\frac{1}{x}\right)^{1+p}=x^{1-p},$$

$$x^2\cdot\varphi\left(\frac{1}{x},1,p\right)=x^2\cdot l^0\frac{1}{x}\left(l^1\frac{1}{x}\right)^{1+p}=x\left(l\frac{1}{x}\right)^{1+p},$$

$$x^2\cdot\varphi\left(\frac{1}{x},2,p\right)=x\,l\frac{1}{x}\left(l^2\frac{1}{x}\right)^{1+p},\ldots$$

u. s. w.

$$x^2 \cdot \varphi\left(\frac{1}{x}, n, p\right) = x\, l\frac{1}{x}\, l^2\frac{1}{x} \cdots l^{n-1}\frac{1}{x}\left(l^n\frac{1}{x}\right)^{1+p}$$

eine Reihe von Functionen, welche sich sämmtlich zugleich mit x dem Grenzwerthe Null nähern, unter der Beschränkung für die erste, nämlich für x^{1-p}, dass in ihr $1-p>0$ sein müsse.

Im Übrigen nähert sich jede von ihnen der Null langsamer, als die vorhergehende, falls der absolute Werth ϖ eines negativen p die 1 nicht erreicht. Für $p=-1$ verwandelt sich jede von diesen Functionen in einen besondern Fall der vorhergehenden:

$$x^2 \cdot \varphi\left(\frac{1}{x}, n, -1\right) = x^2 \cdot \varphi\left(\frac{1}{x}, n-1, 0\right).$$

Capitel IX.

Endlichkeit der Integrale mit unendlichem Integrationsintervall oder unendlichem Differential; Convergenz unendlicher Summen und Producte.

§ 49.

Integrale mit unendlichem Integrationsintervall.

Es sei C eine positive Constante, und $\varphi(x)$ eine Function, von welcher man weiss, dass $C \cdot \varphi(x)$ von $x=a$ bis $x=z$ positive Werthe besitzt, welche von den absoluten Werthen der Function $f(x)$ in diesem Intervall nicht überschritten werden. Dann folgt aus dem Begriff des bestimmten Integrals — was schon einmal, nämlich in § 20, benutzt wurde — dass

$$C \cdot \int_a^z \varphi(x)\,dx \leqq \text{abs} \cdot \int_a^z f(x)\,dx$$

ist.

Bleibt daher das Integral auf der linken Seite dieser Ungleichung bei unendlich wachsendem z endlich, so thut es auch

die rechte; und nähert sich die linke Seite hierbei einem bestimmten Grenzwerth, so muss die rechte Seite ebenfalls diese Eigenschaft besitzen. Um die zuletzt ausgesprochene Behauptung zu erhärten, widerlegen wir die entgegenstehende Hypothese, dass bei der Zerlegung

$$\int_a^z f(x)\,dx = \int_a^u f(x)\,dx + \int_u^z f(x)\,dx, \quad (a < u < z)$$

das Integral $\int_u^z f(x)\,dx$, welches zu dem völlig bestimmten Werth von $\int_a^u f(x)\,dx$ hinzukommt, seinem absoluten Betrage nach unter einen von Null verschiedenen Werth ε nicht herabzugehn brauche, wie gross man auch das u annehmen möge. Diese Hypothese ist nämlich deshalb nicht stichhaltig, weil nach der Voraussetzung das u gross genug angenommen werden kann, um den Werth von $C \cdot \int_u^\infty \varphi(x)\,dx$, welcher $> \text{abs} \cdot \int_u^z f(x)\,dx$ ist, kleiner als ε zu machen.

Die Voraussetzung, dass $C \cdot \varphi(x) > \text{abs} \cdot f(x)$ sei, lässt sich auch so aussprechen, dass der Quotient $f(x) : \varphi(x)$ endlich bleibe, wenn x das Intervall (a, z) durchläuft, und diese Eigenschaft bei unendlich wachsendem z behalte; denn es lässt sich dann stets eine positive Constante C so bestimmen, dass jener Ungleichung Genüge geschieht.

Wir setzen jetzt

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x),$$

und machen die Voraussetzung, dass bei unendlich wachsendem z ein endlicher Werth für

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

bestehn bleibe. Dann ist nach dem Begriff des Integrals:

$$\int_a^z f(x)\,dx = \Psi \cdot \int_a^z \varphi(x)\,dx,$$

wo Ψ eine zwischen dem grössten und dem kleinsten Werth von $\psi(x)$ im Intervall (a, z) liegende Zahl bedeutet. — Denn die Summe, deren Grenzwerth durch

$$\int_a^z \varphi(x) \cdot \psi(x)\, dx$$

bezeichnet wird, vergrössert sich, weil $\varphi(x)$ nur positive Werthe hat, wenn man $\psi(x)$ in jedem Summanden vergrössert, und verkleinert sich im umgekehrten Falle.

Mithin folgt, dass der Quotient

$$\int_a^\infty f(x)\, dx : \int_a^\infty \varphi(x)\, dx = \Psi$$

einen endlichen Werth hat, welcher zwischen dem grössten und dem kleinsten Werth von $\psi(x)$ im Intervall (a, ∞) liegt und daher, falls $\psi(\infty)$ eine völlig bestimmte Grösse ist, dieser desto genauer gleichkommt, je grösser a angenommen wurde.

Setzen wir nun ausserdem noch voraus, dass das Integral $\int_a^z \varphi(x)\, dx$ mit z zugleich unendlich wächst, so thut dies auch das zweite Integral auf der rechten Seite der Gleichung

$$\int_a^z \varphi(x)\, dx = \int_a^u \varphi(x)\, dx + \int_u^z \varphi(x)\, dx, \quad (a < u < z),$$

während das erste einen endlichen constanten Werth hat, wie gross auch die constante Zahl u angenommen sein mag. Und es folgt aus der Gleichung

$$\int_u^z f(x)\, dx : \int_u^z \varphi(x)\, dx$$

$$= \left\{ \int_a^z f(x)\, dx - \int_a^u f(x)\, dx \right\} : \left\{ \int_a^z \varphi(x)\, dx - \int_a^u \varphi(x)\, dx \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\int_a^z f(x)\, dx}{\int_a^z \varphi(x)\, dx} - \frac{\int_a^u f(x)\, dx}{\int_a^z \varphi(x)\, dx} \right\} : \left\{ 1 - \frac{\int_a^u \varphi(x)\, dx}{\int_a^z \varphi(x)\, dx} \right\} = \Psi,$$

wenn man in ihr das z unendlich wachsen lässt:

$$\int_a^\infty f(x)\, dx : \int_a^\infty \varphi(x)\, dx = \Psi,$$

wo nun Ψ im Gegensatz zu oben nicht zwischen $\psi(a)$ und $\psi(\infty)$, sondern nur zwischen $\psi(u)$ und $\psi(\infty)$ eingeschlossen ist. Daher ist in diesem Falle Ψ mit $\psi(\infty)$ identisch; denn wollte Jemand annehmen, es sei Ψ um ε von $\psi(\infty)$ verschieden, so könnte man, um ihn zu widerlegen, das u so gross machen, dass $\text{abs}\cdot\{\psi(u) - \psi(\infty)\}$ weniger beträgt, als die Constante ε.

Macht man schliesslich über die Function $\psi(x)$ die Voraussetzung, dass sie mit x zugleich unendlich wachse, so kann man auf eine den letzten Betrachtungen ganz analoge Weise zeigen, dass auch Ψ unendlich sein müsse.

Das Resultat dieser Untersuchung ist folgendes:

Lehrsatz.

Es sei $\varphi(x)$ eine zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=z$ integrirbare Function, welche, wenn z unendlich wächst, schliesslich ihr Vorzeichen bewahrt, und $f(x)$ irgend eine zweite Function von x. Es werde ferner

$$(1)\qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \psi(x), \quad \int_a^z \varphi(x)\,dx = \Phi(z), \quad \int_a^z f(x)\,dx = F(z)$$

bezeichnet.

Ist dann $\psi(x)$ im Intervall (a, z) endlich und zugleich $\Phi(z)$ endlich, so gilt ein Gleiches von $F(z)$; und wenn ausserdem auch $\psi(\infty)$ und $\Phi(\infty)$ endliche Werthe haben, so besitzt $F(\infty)$ ebenfalls einen solchen. Derselbe ist völlig bestimmt, falls der Werth von $\psi(\infty)$ endlich und derjenige von $\Phi(\infty)$ völlig bestimmt ist.

Wächst dagegen $\Phi(z)$ bei unendlich wachsendem z ebenfalls unendlich, so ist

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lim_{z=\infty}\cdot \frac{F(z)}{\Phi(z)} = \lim_{z=\infty}\cdot \psi(z); \\ &\lim_{z=\infty}\cdot \frac{\int_a^z f(z)\,dx}{\int_a^z \varphi(z)\,dx} = \lim_{z=\infty}\cdot \frac{f(z)}{\varphi(z)}. \end{aligned}\right.$$

Es lässt sich also in diesem Falle der Grenzwerth des Verhältnisses der Integrale aus demjenigen der Differentiale beurtheilen; und zwar ist er dem letzteren gleich, falls dieser einen völlig bestimmten Werth $\psi(\infty)$ hat, oder mit ihm zugleich unendlich gross.

Zum Zwecke der Beurtheilung der Endlichkeit oder des unendlichen Wachsens eines Integrals, darf man im Differential jeden Factor weglassen, welcher sich einem von Null verschiedenen Grenzwerthe nähert.

Ist $f(\infty)$ nicht $=0$, so kann $F(\infty)$ nicht einen bestimmten endlichen Werth haben.

Nimmt man für $\varphi(x)$ die in § 47 unter IX, X und XI integrirte und im vorigen § näher untersuchte Function[1]), so erhält man den

Zusatz.

Giebt das Product

(3) $$\overset{0}{l}x\,\overset{1}{l}x\,\overset{2}{l}x\,\overset{3}{l}x\cdots\overset{n-1}{l}x\left(\overset{n}{l}x\right)^{1+p}\cdot f(x)=\psi(x)$$

bei irgend einer Nummer n für $x=\infty$ einen endlichen (bestimmten oder unbestimmten) Werth $\psi(\infty)$, so ist der Werth des Integrals

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=F(\infty)$$

für $p>0$ endlich und völlig bestimmt, für $p\overline{\gtrless}0$ aber, wenn wenigstens das Vorzeichen von $\psi(\infty)$ bestimmt ist, unendlich gross; und zwar ergiebt sich im letztgedachten Falle:

(4) $$\lim_{z=\infty}\cdot\frac{F(z)}{\overset{n+1}{l}z}=\psi(\infty),\quad (p=0),$$

---

[1]) Der Beweis dafür, dass es keine Function $\varphi(x)$ giebt, welche zur Abgrenzung der endlichen und unendlichen Integralwerthe $F(\infty)$ in obiger Weise unter allen Umständen ausreicht, habe ich in meiner Schrift „Über die Endlichkeit bestimmter Integrale u. s. w.“ 1867 geliefert. Die hier gewählte Function wird übrigens von keiner andern an Wirksamkeit übertroffen.

$$(5)\qquad \lim_{z=\infty} \cdot \left(l^n z\right)^p F(z) = \frac{\psi(\infty)}{-p}, \quad (p < 0).$$

Wächst $\psi(x)$ unendlich, so behalten die Gleichungen (4) und (5) ihre Bedeutung in der Gestalt:

$$(4')\qquad \lim_{z=\infty} \cdot \frac{F(z)}{l^0 z\, l^1 z \cdots l^n z\, l^{n+1} z \cdot f(z)} = 1,$$

$$(5')\qquad \lim_{z=\infty} \cdot \frac{-p \cdot F(z)}{l^0 z\, l^1 z \cdots l^{n-1} z\, l^n z \cdot f(z)} = 1.$$

Die einfachsten Formen des Kriteriums (3) sind:

$$(6)\qquad x^{1+p} \cdot f(x) = \psi(x),$$

$$(7)\qquad x(lx)^{1+p} \cdot f(x) = \psi(x),$$

$$(8)\qquad x\,lx\,(llx)^{1+p} \cdot f(x) = \psi(x).$$

u. s. w.

Die Integrirbarkeit der Function $f(x)$ in dem endlichen Intervall (a,z) ist oben als selbstverständlich vorausgesetzt.

Beispiele.

I. Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx,$$

dessen $f(x) = \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}$ innerhalb des Integrationsintervalls überall endlich und stetig ist, hat einen bestimmten endlichen Werth, so lange $(n-m) > 0$ angenommen wird. Denn es ergiebt sich bei der Verwendung der Form (6) unseres Kriteriums, dass positive Werthe von p gefunden werden können, für welche der Ausdruck

$$\psi(x) = x^{1+p} \cdot \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} = \frac{1}{x^{n-m-p}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^n}$$

sich bei unendlich wachsendem x einem endlichen Grenzwerthe nähert.

Man findet nämlich $\psi(\infty)=1$ für $p=(n-m)$ und $\psi(\infty)=0$ für $(n-m)>p>0$.

Ist $(n-m)=0$, so folgt für $p=0$:

$$\lim_{x=\infty} \cdot \psi(x) = \lim_{x=\infty} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^n} = 1 .$$

Daher ergiebt sich aus (4):

$$\lim_{z=\infty} \cdot \frac{\int_1^z \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx}{lz} = 1 ,$$

so dass das Integral logarithmisch unendlich wächst.

Ist endlich $(n-m)<0$, also $(m-n)>0$, so wird für $p=(n-m)$ ebenfalls $\psi(\infty)=1$ erhalten, weshalb nach (5)

$$\lim_{z=\infty} \cdot \frac{\int_1^z \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx}{z^{m-n}} = \frac{1}{m-n}$$

hervorgeht. Das Integral wächst daher schliesslich proportional der Potenz z^{m-n}.

II. Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$$

hat einen bestimmten endlichen Werth, sobald $n>1$ ist. — Denn es ist dann für jedes zwischen $(n-1)$ und 0 angenommene p das aus (6) berechnete

$$\lim_{x=\infty} \cdot \psi(x) = \lim \cdot \frac{x^{1+p}}{1+x^n} = \lim \cdot \frac{1}{x^{(n-1)-p}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1} = 0 \cdot$$

Für $n=1$ wächst das Integral nach (4) proportional dem Logarithmus und für $n<1$ nach (5) proportional der $(1-n)^{\text{ton}}$ Potenz der oberen Grenze.

III. Das Integral

$$\int_1^{\infty} x^{n-1}\, e^{-x}\, dx$$

hat einen bestimmten endlichen Werth ohne alle Einschränkung. Denn die Grösse

$$x^{1+p} \cdot x^{n-1} e^{-x} = \frac{x^{n+p}}{e^x}$$

nähert sich nach § 45, (16) bei unendlich wachsendem x stets der Null als Grenze.

§ 50.

Integrale von Functionen, welche bei einem endlichen Werthe der Integrationsvariablen unendlich oder unbestimmt werden.

Substituirt man für das x des vorigen § $\frac{1}{c-y}$, so wird $y = c$ für $x = \infty$ und $dx = \frac{dy}{(c-y)^2}$. Daher sind die dortigen Resultate hier sofort zu verwenden, um die in § 20 schon einmal berührte Frage vollständiger zu beantworten, als es damals geschehen konnte.

Wir wollen, weil der Satz des vorigen § in seiner allgemeinsten Gestalt ein geringeres praktisches Interesse bietet, als in der Form des Zusatzes, nur auf diese Rücksicht nehmen, dürfen dann aber nicht ausser Acht lassen, dass

$$f(x)\, dx = \frac{f\left(\frac{1}{c-y}\right)}{(c-y)^2}\, dy = \chi(y)\, dy\,,$$

hervorgeht, wo es uns auf den Werth von

$$\int_{\alpha}^{c} \chi(y)\, dy$$

ankommt. Wir haben demnach in (3)

$$f(x) = (c-y)^2 \cdot \chi(y)$$

zu substituiren und

$$\psi(y)=\frac{1}{c-y}\cdot l\frac{1}{c-y}\cdot l^2\frac{1}{c-y}\cdots l^{n-1}\frac{1}{c-y}\cdot\left(l^n\frac{1}{c-y}\right)^{1+p}\cdot(c-y)^2\chi(y)$$

zu setzen, wo noch der erste und der vorletzte Factor in den einen $(c-y)^{+1}$ zusammengezogen werden können.

Schreiben wir endlich x für y und f für χ, so lautet das Resultat:

Lehrsatz.

Besitzt das Product

$$(1)\ l^0(c-x)\cdot l^1\frac{1}{c-x}\cdot l^2\frac{1}{c-x}\cdots l^{n-1}\frac{1}{c-x}\cdot\left(l^n\frac{1}{c-x}\right)^{1+p}\cdot f(x)=\psi(x)$$

bei irgend einer Nummer n einen bestimmten endlichen Grenzwerth $\lim_{x=c}\cdot\psi(x)=\psi(c)$[1], so ist der Werth von

$$\lim_{z=c}\cdot\int_a^z f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$$

für $p>0$ endlich und völlig bestimmt, für $p\overline{\lessgtr}0$ aber unendlich gross; und zwar ergiebt sich im letzteren Falle:

$$(2)\qquad \lim_{z=c}\cdot\frac{\int_a^z f(x)\,dx}{l^{n+1}\frac{1}{c-z}}=\psi(c),\quad (p=0),$$

$$(3)\qquad \lim_{z=c}\cdot\frac{\int_a^z f(x)\,dx}{\left(l^n\frac{1}{c-z}\right)^{-p}}=\frac{\psi(c)}{-p},\quad (p<0).$$

Nähert sich $\psi(x)$ bei der unendlichen Annäherung von x an c nicht einem bestimmten Grenzwerth, ohne jedoch das endliche Gebiet[2]) zu verlassen, so besitzt

---

[1]) Damit $\psi(c)$ hierbei von Null verschieden sei, muss $f(x)$ bei der Annäherung von x an c generell unendlich wachsen, weil der andere Factor der linken Seite in (1) nach § 48 unendlich klein ist.

[2]) ein durch constante Werthe begrenztes Gebiet.

das Integral $\int_a^z f(x)\,dx$ bei der unendlichen Annäherung von z an c für $p > 0$ ebenfalls einen bestimmten endlichen Grenzwerth und ist für $p \overline{\lessgtr} 0$, wenn wenigstens das Vorzeichen von $\psi(c)$ bestimmt ist, in der Weise unendlich, wie es die Relationen (2) und (3) anzeigen, wenn man unter $\psi(c)$ eine im Endlichen unbestimmte Grösse versteht. Diese Relationen gelten auch dann noch, wenn $\lim_{z=c} \cdot \psi(z) = \infty$ ist.

Die einfachsten Formen des Kriteriums (1) sind:

(4) $$(c-x)^{1-p} \cdot f(x) = \psi(x),\ ^{1)}$$

(5) $$(c-x)\left(l \frac{1}{c-x}\right)^{1+p} \cdot f(x) = \psi(x),$$

(6) $$(c-x)\, l \frac{1}{c-x}\left(ll \frac{1}{c-x}\right)^{1+p} \cdot f(x) = \psi(x),$$

u. s. w.

Nimmt x im Intervall (a, c) von $x = a$ bis $x = c$ ab, so muss man oben überall $(x - c)$ für $(c - x)$ setzen. (Denn es soll $f(x)$ durch (1) mit einer positiven Function verglichen werden.)

Jeden Factor in $f(x)$, welcher sich einem von Null verschiedenen endlichen Grenzwerthe nähert, darf man bei der Untersuchung über die Endlichkeit oder Unendlichkeit des Grenzwerthes des Integrals weglassen, so wie auch einen solchen hinzufügen.

---

[1]) Für $n = 0$ gilt nämlich der Ausdruck (1), wie seine Ableitung zeigt, zunächst in der Form

$$\left(l^0 \frac{1}{c-x}\right)^{1+p} \cdot (c-x)^2 f(x) = \left(\frac{1}{c-x}\right)^{1+p} \cdot (c-x)^2 f(x),$$

was in (4) das negative Vorzeichen vor p bewirkt. (Vergl. § 48.)

Beispiele.

I. In § 48, I haben wir gesehn, dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx$$

in Folge der Unendlichkeit des Integrationsintervalls nur dann einen bestimmten endlichen Werth besitzt, wenn $n - m > 0$ ist. Mit welchen Vorzeichen im Übrigen m und n einzeln behaftet sein mögen, blieb gleichgültig.

Nun ist aber hier die untere Grenze des Integrals $= 0$, weshalb das Differential bei ihr unendlich wird, wenn $(m - 1)$ einen negativen Werth hat. Jedoch hat das Integral nach (4) dennoch einen bestimmten endlichen Werth, sobald

$$\psi(0) = \lim_{x=0} \cdot x^{1-p} \cdot \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} = \lim_{x=0} \cdot \frac{x^{m-p}}{(1+x)^n}$$

für irgend ein die Null übertreffendes p endlich und bestimmt ist. Für $p = m$ ist jederzeit $\lim_{x=0} \cdot \psi(x) = 1$.

Daher ist der Werth unseres Integrals bei der unteren Grenze endlich und bestimmt für $m > 0$, logarithmisch unendlich für $m = 0$ (nach (2)) und unendlich, wie eine Potenz, für $m < 0$ (nach (3)).

Das Integral hat demnach trotz seiner beiden kritischen Grenzen dann, aber auch nur dann, einen bestimmten endlichen Werth, wenn

$$n > m > 0$$

ist.

II. Von Legendre[1]) ist

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = (m, n)$$

bezeichnet und als Eulersches[2]) Integral erster Gattung benannt worden.

---

[1]) Legendre, 1752—1833.

[2]) Euler, 1707—1783.

Nach der im obigen Lehrsatz zuletzt ausgesprochenen Bemerkung ist das Integral bei der unteren Grenze endlich oder unendlich, wie

$$\int_x^1 x^{m-1} dx = \frac{1}{m}\left[1 - x^m\right],$$

und bei der oberen, wie

$$\int_0^x (1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{n}\left[1 - (1-x)^n\right].$$

Daher hat das Eulersche Integral erster Gattung nur für $m > 0$ und $n > 0$ endliche völlig bestimmte Werthe.

III. Als Eulersches Integral zweiter Gattung bezeichnet Legendre

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} dx = \Gamma(\mu).$$

Um zu sehn, wie sich das Integral bei seiner unteren Grenze verhält, bilden wir nach Anleitung von (5):

$$\psi(x) = x\left(l\frac{1}{x}\right)^{1+p} \cdot \left(l\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} = x\left(l\frac{1}{x}\right)^{p+\mu} = \left\{- x^{\frac{1}{p+\mu}} l x\right\}^{p+\mu}.$$

Dieser Ausdruck hat nach § 45, (15) die Null zum Grenzwerth, sobald $p + \mu > 0$ genommen wird. Dies ist bei jedem Werthe von μ möglich. Also hindert die untere Grenze 0 des Integrals seine endliche Bestimmtheit in keinem Falle.

Um das Verhalten des Integrals bei seiner oberen Grenze zu beurtheilen, fügen wir zu dem Differentiale den Factor $\left(-\frac{1}{x}\right)$ hinzu, was nach unserm Lehrsatz geschehn darf, weil der Grenzwerth (-1) dieses Factors endlich bestimmt und von Null verschieden ist. Es handelt sich dann um das Verhalten der Function

$$\int \left(l\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} \frac{dx}{-x} = \int \left(l\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} d\left(l\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\mu}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\mu} + C, \quad (\mu \gtrless 0)$$

oder der Function

$$\int\left(l\frac{1}{x}\right)^{-1} d\left(l\frac{1}{x}\right) = l^2\frac{1}{x}, \quad (\mu = 0)$$

an der Stelle $x = 1$: Es ist $l1 = 0$, $\lim_{x=1} \cdot l^2 x = -\infty$.

Daher hat das Eulersche Integral zweiter Gattung dann, aber auch nur dann, einen bestimmten endlichen Werth, wenn $\mu > 0$ ist.

Es sei noch bemerkt, dass durch Einführung von $l\frac{1}{x} = u$ als neue Integrationsvariable die Form

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty u^{\mu-1} e^{-u} du$$

für unser Integral gewonnen wird. Die obere Grenze ist schon im vorigen § unter III beurtheilt. Bei der Betrachtung der unteren darf e^{-u} weggelassen werden.

§ 51.

Integrale von unbestimmtem Werthe. Der Hauptwerth.

Liegt innerhalb des Integrationsintervalles (a, z) des Integrals $\int_a^z f(x)\,dx$ eine Stelle $x = c$ von der Beschaffenheit, dass entweder die beiden Integrale

$$\int_a^{c-\mu\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \int_{c+\nu\varepsilon}^z f(x)\,dx,$$

oder das eine von ihnen, aufhören, bei einem unendlich kleinen ε und constanten Werthen von μ und ν einen bestimmten endlichen Grenzwerth zu besitzen, so kann

$$\int_a^z f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \cdot \left\{\int_a^{c-\mu\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\nu\varepsilon}^z f(x)\,dx\right\},$$

je nach den besonderen Eigenthümlichkeiten von $f(x)$, endlich und bestimmt, oder auch unbestimmt oder unendlich sein.

In einigen Fällen erhält man einen bestimmten endlichen Grenzwerth, welcher von den willkürlichen Constanten μ und ν abhängt. Macht man in ihm $\mu = \nu$, so ergiebt sich das, was Cauchy das **Hauptintegral** (intégrale principale) oder den **Hauptwerth** (valeur principale) des Integrals nennt.

Z. B. ist nach § 44, (7):

$$\int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} = l(\mu\varepsilon), \quad \int_{+\nu\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x} = l\frac{1}{\nu\varepsilon},$$

also:

$$\int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\nu\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x} = l(\mu\varepsilon) + l\frac{1}{\nu\varepsilon} = l\frac{\mu}{\nu}.$$

Will man daher die Bezeichnung

$$\lim_{\varepsilon = 0} \cdot \left\{ \int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\nu\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x} \right\} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$$

zur Anwendung bringen, so ist der Werth $l\frac{\mu}{\nu}$ dieses Integrals völlig willkürlich, je nach der Wahl von μ und ν, der **Hauptwerth** aber $= l\,1 = 0$.

In analoger Weise ergiebt sich:

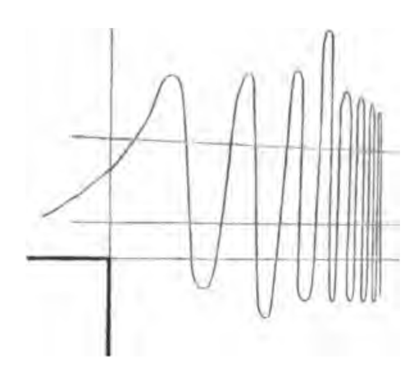
$$\int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{+\nu\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}\right),$$

so dass der Hauptwerth des Integrals $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3} = 0$ ist, während es für jedes von μ verschiedene ν unendlich ist.

Man erkennt übrigens leicht, dass bei diesem Gegenstande häufig — wie in den obigen Beispielen — eine gewaltsame Dehnung des Begriffs des Integrals vorliegt, weshalb dieselben genügen mögen, darauf aufmerksam zu machen.

Etwas Anderes ist es, wenn das Integral verschiedene Grenzwerthe erlangt, sobald sich nach verschiedenen Gesetzen der Veränderung die Grösse des Integrationsintervalls einem endlichen

Grenzwerthe nähert oder unendlich wächst. Veranschaulicht man den Verlauf solcher Integrale $y = \int_a^x f(u)\,du$ dadurch, dass man x und y als Coordinaten einer ebenen Curve verzeichnet, so stellt sich die letztere als eine wellenförmige Linie dar, bei welcher die Höhendifferenz der Bergkuppen und Thalsohlen nicht unter einen endlichen Werth herabsteigt, während die Anzahl derselben bei der unendlichen Annäherung von x an c oder beim unendlichen Wachsen von x ebenfalls unendlich wächst. Wir werden später solche Integrale analytisch darstellen. Für den Augenblick genügt es, sich die Anschauung davon zu verschaffen, dass man die Wellenlinie durch eine andere Linie schneiden kann, deren Ordinaten sich einer in einem gewissen Spielraum beliebigen Grösse als Grenze nähern, und dass dann diese Grösse auch der Grenzwerth von $y = \int_a^x f(u)\,du$ sein wird, wenn man für x die Abscissen der auf einander folgenden Schnittpunkte setzt. Bei einer andern schneidenden Linie erhält man einen andern Grenzwerth.



§ 52.

Die Convergenz unendlicher Reihen mit beliebig positiven und negativen Gliedern.

Die Anwendung des Taylorschen Satzes auf die Entwickelung von $(1+x)^n$, e^x, $l(1+x)$ ergab Summen, welche sich bei unendlich wachsender Summandenzahl diesen Functionen als ihren Grenzwerthen nähern. Wir erkannten die Existenz und die Grösse des Grenzwerthes durch die Beurtheilung des Restes der Entwickelung.

Nun kann es aber vorkommen, dass uns eine Reihe ohne das Restglied gegeben, und die Aufgabe gestellt wird, die Existenz des Grenzwerthes der Reihensumme nebst gewissen Eigenschaften desselben bezüglich einer in den Gliedern vorhandenen Variabeln zu ermitteln. Diese Aufgabe ist in ihrem ersten Theil im Wesentlichen mit dem in § 49 behandelten Gegenstande identisch, wie sich sogleich zeigen wird.

Definition.

Unter einer **unendlichen** Reihe versteht man eine solche, deren **Gliederanzahl** unendlich wächst.

Eine Reihe, deren Summe bei unendlich wachsender Gliederanzahl sich einem bestimmten endlichen Grenzwerthe nähert, heisst **convergent**. Man schreibt

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots$$

für

$$s = \lim_{r=\infty} \cdot \{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots + t_r\}$$

so dass die Punkte am Ende des ersten Ausdrucks die umständlichere Angabe $\lim\limits_{r=\infty} \cdot$ sammt dem Gliede $+t_r$ des zweiten Ausdrucks ersetzen.

Existirt ein solcher Grenzwerth nicht, so heisst die unendliche Reihe **divergent**. Hierbei unterscheidet man oft noch den Fall, dass die Reihensumme bei unendlicher Vermehrung der Summandenzahl zwischen endlichen Grenzen hin und her schwankt, als das **Oscilliren** der Reihe.

Eine Summe

$$s_r = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_r$$

lässt sich auffassen als ein bestimmtes Integral

$$s_r = \int_0^r f(x)\,dx,$$

bei welchem die Function $f(x)$ sich sprungweise von einem Gliede t_{m-1} zum nächsten t_m ändert, sobald x den Werth des Index m erreicht hat; denn es ist wegen der Constanz des Werthes von $f(x) = t_m$ im Intervall $(m-1, m)$;

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 t_1\,dx = t_1, \quad \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 t_2\,dx = t_2, \ldots,$$

$$\int_{r-1}^{r} f(x)\,dx = \int_{r-1}^{r} t_r\,dx = t_r;$$

und daher:

$$\int_0^r f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \cdots + \int_{r-1}^{r} f(x)\,dx$$
$$= t_1 \qquad + t_2 \qquad + \cdots + t_r.$$

Mithin unterliegt die Convergenz der unendlichen Reihen den in § 49 besprochenen Bedingungen für einen bestimmten endlichen Grenzwerth der Integrale mit unendlichem Integrationsintervall; und es ergiebt sich der

Lehrsatz.

Die Reihensumme

$$s_r = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots + t_r$$

convergirt zu einem endlichen völlig bestimmten Grenzwerth, sobald das Product

$$(1) \qquad \overset{0}{l}r \cdot \overset{1}{l}r \cdot \overset{2}{l}r \cdots \overset{n-1}{l}r \left(\overset{n}{l}r\right)^{1+p} \cdot t_r = \psi(r)$$

bei irgend einer Nummer n und einem **positiven** p einen endlichen bestimmten oder unbestimmten Werth $\psi(\infty)$ ergiebt.

Hat $\psi(\infty)$ dagegen bei einem p, welches < 0 ist, einen bestimmten Werth, oder wächst $\psi(r)$ bei einem solchen p unendlich, so divergirt die Reihe in der Weise, dass

$$(2) \quad \begin{cases} \lim\limits_{r=\infty} \cdot \dfrac{s_r}{\overset{n+1}{l}r} = \psi(\infty), \\[2ex] \lim\limits_{r=\infty} \cdot \dfrac{s_r}{\psi(r)\overset{n+1}{l}r} = \lim\limits_{r=\infty} \cdot \dfrac{s_r}{\overset{0}{l}r\,\overset{1}{l}r \cdots \overset{n}{l}r\,\overset{n+1}{l}r \cdot t_r} = 1, \; (p=0) \end{cases}$$

$$(3)\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{r=\infty} \cdot \dfrac{s_r}{(l^n r)^{-p}} = \dfrac{\psi(\infty)}{-p}, \\ \lim\limits_{r=\infty} \cdot \dfrac{-p \cdot s_r}{\psi(r)(l^n r)^{-p}} = \lim\limits_{r=\infty} \cdot \dfrac{-p \cdot s_r}{l^0 r l^1 r \cdots l^{n-1} r l^n r \cdot t_r} = 1, (p<0) \end{array}\right.$$

hervorgeht.

Die einfachsten Formen des Ausdruckes (1) sind:

$$(4) \qquad r^{1+p} \cdot t_r = \psi(r),$$

$$(5) \qquad r(lr)^{1+p} \cdot t_r = \psi(r),$$

$$(6) \qquad r\,lr(llr)^{1+p} \cdot t_r = \psi(r),$$

u. s. w.

Ist nicht $\lim\limits_{r=\infty} \cdot rt_r = 0$, so kann die Reihe mit beliebig positiven und negativen Gliedern nicht convergiren.[1])

Sind die Glieder einer convergenten Reihe von einer gewissen Nummer an sämmtlich mit einerlei Vorzeichen versehn und dem absoluten Betrage nach nicht kleiner als diejenigen einer zweiten Reihe, so convergirt die letztere ebenfalls.

Bei der Mehrzahl derjenigen Reihen, welche zur Betrachtung zu kommen pflegen, reicht die Form (4) oder höchstens (5) zur Beurtheilung der Convergenz aus. Übrigens greifen die obigen Formeln sämmtlich auf das zuletzt noch einmal in Worte gefasste Kriterium über die Vergleichung einer Reihe mit einer andern zurück, welches im Wesentlichen auch die Grundlage unserer Untersuchung in § 49 bildete; sie verlangen sämmtlich, dass man einige Reihen im Gedächtniss behält, von denen man erkannt hat, dass sie convergiren.

Als besonders fruchtbar in dieser Beziehung zeigt sich auch die oben nicht direct aufgeführte geometrische Reihe, bei welcher man noch den Vortheil geniesst, dass man ihre Summe

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{r-1} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^r$$

[1]) Denn dann kann der Grenzwerth von $\psi(r)$ in (1) nicht endlich sein.

von den Elementen her kennt; man schliesst aus dem Verschwinden von $\lim_{r=\infty} \cdot q^r$ für $\text{abs} \cdot q < 1$ ohne Weiteres, dass die Reihensumme

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots \text{ für } -1 < q < +1$$

zu einem Grenzwerthe $\frac{a}{1-q}$ convergirt. Übrigens ist dieses Resultat auch schon bei dem binomischen Satz gewonnen (§ 39 (13)), so wie es sich leicht aus (4) ergiebt, wenn man dort $t_r = aq^r$ einführt. Es wird nämlich auf dem letzten Wege

$$\psi(r) = r^{1+p} \cdot aq^r = a \cdot r^{1+p} e^{r l q}$$

erhalten, so dass nach § 45, (15) $\psi(\infty)$ nur dann einen endlichen Werth hat, wenn $lq < 0$, $q < 1$ ist.

Durch eine analoge Schlussweise oder einfacher durch die Vergleichung der Glieder mit denjenigen der geometrischen Reihe überzeugt man sich u. a. von der Convergenz der folgenden Reihen für $q < 1$:

$$\theta(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \cdots,$$

$$\theta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + 2q^{\frac{49}{4}} + \cdots,$$

$$\theta_3(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots,$$

welche zur Berechnung besonderer Werthe der sogenannten Thetafunctionen dienen. Auch kann man die Convergenz der Reihen, in welche $(1+x)^n$ und $l(1+x)$ im vorigen Capitel entwickelt sind, für $\text{abs} \cdot x < 1$ und die unbeschränkte Convergenz der Reihenentwickelung von e^x durch Vergleichung mit der convergenten geometrischen Reihe ziemlich leicht beweisen.

Bei Reihen, welche langsamer convergiren, als die geometrische, führt oft die Vergleichung mit der folgenden zum Zweck:

$$\frac{1}{1^{1+m}} + \frac{1}{2^{1+m}} + \frac{1}{3^{1+m}} + \frac{1}{4^{1+m}} + \cdots$$

Dieselbe convergirt, wenn $m > 0$ ist, und divergirt, wenn $m \overline{\overline{<}} 0$ ist. — Denn substituirt man in (4) $t_r = \frac{1}{r^{1+m}}$, so ergiebt sich:

$$\psi(r) = r^{1+p} \cdot \frac{1}{r^{1+m}} = r^{p-m},$$

d. i.: $\psi(r) = 1$ für $p = m$. Unsere Reihe ist also genau diejenige, welche die Formel (4) zur Vergleichung stellt. Ausserdem ergeben die Relationen (2) und (3), wenn man

$$\frac{1}{1^{1-m}} + \frac{1}{2^{1-m}} + \frac{1}{3^{1-m}} + \cdots + \frac{1}{r^{1-m}} = s_r^{(m)}$$

bezeichnet, dass

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{s_r^{(0)}}{l r} = 1, \quad \lim_{r=\infty} \cdot \frac{s_r^{(m)}}{r^m} = \frac{1}{m}$$

ist.

— Die Divergenz der Reihensummen $s_r^{(m)}$ für $m \gtreqless 0$ folgt übrigens schon daraus, dass bei ihnen $\lim_{r=\infty} \cdot r t_r = \lim_{r=\infty} \cdot r^m$ nicht $= 0$ ist.

Um noch an einem andern Beispiel die Wirksamkeit des oben aufgestellten Convergenzkriteriums zu illustriren, wählen wir die Reihensumme

$$l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^2 + l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(k+1)^2}\right)^2 + l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(k+2)^2}\right)^2 + \cdots,$$

deren allgemeines Glied die Form

$$t_r = l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^2$$

hat. Es ergiebt sich ein bestimmter endlicher Grenzwerth für jedes x^2, bei welchem die sämmtlichen Glieder einen Sinn haben, d. i. für jedes x^2, welches nicht zur Reihe

$$k^2, \ (k+1)^2, \ (k+2)^2, \ (k+3)^2, \ldots$$

gehört. — Denn die Formel (4) liefert, wenn man $p = +1$ setzt:

$$\psi(r) = r^2 \cdot l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^2 = l \cdot \left\{\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{r^2}\right\}^2,$$

also nach § 40, (3):

$$\lim_{r=\infty} \cdot \psi(r) = l \cdot \left\{e^{-x^2}\right\}^2 = -2x^2;$$

und dies ist eine bestimmte endliche Grösse.

§ 53.

Andere Formen des Convergenzkriteriums. Potenzreihen.

Bezeichnet man die absoluten Werthe der Glieder

$$t_1, \; t_2, \; t_3, \; t_4, \ldots, t_r, \ldots$$

beziehungsweise mit

$$\tau_1, \; \tau_2^2, \; \tau_3^3, \; \tau_4^4, \ldots, \tau_r^r, \ldots,$$

so convergirt die Summe der ersteren nach dem Lehrsatz des vorigen § zugleich mit der Summe der letzteren; und diese convergirt, wenn ihre Glieder von einer gewissen Stelle an kleiner sind, als die entsprechenden Glieder einer convergenten geometrischen Reihe

$$q^1, \; q^2, \; q^3, \; q^4, \ldots, q^r, \ldots$$

Hieraus folgt der

Lehrsatz I.

Besteht von einer gewissen Nummer r an die Scala

$$1 > q > \sqrt[r]{\text{abs} \cdot t_r},$$

indem q eine Constante bedeutet, so ist die Summe

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots$$

convergent.

Hierbei kann sich $\tau_r = \sqrt[r]{\text{abs} \cdot t_r}$ einem Grenzwerthe nähern, oder auch nicht. — Sollte derselbe $= 1$ sein (wie z. B. bei der im vorigen § behandelten Reihe, deren allgemeines Glied $t_r = r^{-(1+m)} = e^{-(1+m)\, lr}$ ist und das $\tau_r = e^{-(1+m)\frac{lr}{r}}$ ergiebt), so lässt sich unser Satz nicht mehr verwenden, weil eben keine Con-

stante q existirt, welche der Scala $1 > q > \tau_r$ für beliebig grosse r genügt. In der That divergirt ja auch die Reihe, an welche hier so eben erinnert wurde, für $m \overline{\gtrless} 0$, während sie für $m > 0$ convergirt, obgleich bei ihr für jedes m wegen der Relation § 45, (15) $\lim_{r=\infty} \cdot \tau_r = 1$ ist.

Zuweilen macht sich die Beurtheilung der Convergenz bequem aus dem Quotienten $t_{r+1} : t_r$. Ist nämlich von irgend einer Nummer r an

$$\text{abs} \cdot \frac{t_{r+1}}{t_r} < q, \quad \text{abs} \cdot t_{r+1} < \text{abs} \cdot q\, t_r,$$

wo q wieder eine Constante bedeuten soll, so ist:

$$\text{abs} \cdot t_{r+2} < \text{abs} \cdot q^2 t_r, \quad \text{abs} \cdot t_{r+3} < \text{abs} \cdot q^3 t_r, \text{ u. s. w.}$$

Also sind die Glieder der Reihe

$$t_r, \; t_{r+1}, \; t_{r+2}, \; t_{r+3}, \dots$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als diejenigen der Reihe

$$t_r, \; t_r \cdot q, \; t_r \cdot q^2, \; t_r \cdot q^3, \dots$$

Und da die letztere für $q < 1$ convergirt, so folgt der

Lehrsatz II.

Die Reihensumme

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots$$

convergirt, wenn von irgend einer Nummer r an stets

$$\text{abs} \cdot \frac{t_{r+1}}{t_r} < q < 1$$

ist, wo q eine Constante bedeutet.

Bei denjenigen Reihen, welche nach den steigenden ganzen Potenzen einer Zahl fortschreiten, den sogenannten „Potenzreihen“:

$$a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

hat man, weil das allgemeine Glied $t_r = a_r x^r$ ist:

$$\sqrt[r]{\text{abs}\cdot t_r} = \pm x \cdot \sqrt[r]{\text{abs}\cdot a_r}, \quad \frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{a_{r+1}}{a_r}\cdot x.$$

Bleibt also einer von den Ausdrücken

$$\sqrt[r]{\text{abs}\cdot a_r}, \quad \frac{a_{r+1}}{a_r}$$

bei unendlich wachsendem r endlich, so convergirt die Potenzreihe nach den obigen Sätzen für jedes x, welches klein genug ist, um mit jenem Ausdruck zusammen ein die 1 nicht erreichendes Product zu geben.

Daher gilt der

Lehrsatz III.

Bleibt bei unendlich wachsendem r einer von den Ausdrücken

$$\sqrt[r]{\text{abs}\cdot a_r}, \quad \text{abs}\cdot\frac{a_{r+1}}{a_r}$$

kleiner als eine bestimmte endliche Zahl α — sei es, dass er sich einem Grenzwerthe nähert, oder nicht — so convergirt die Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

für jedes x, welches seinem absoluten Betrage nach $< \frac{1}{\alpha}$ ist.

Gegenüber einer grösseren Anzahl von sonst vorzüglichen Werken, in welchen mittelst eines übersehenen Fehlschlusses die Identität der Grenzwerthe beider fraglichen Ausdrücke deducirt wird, dürfte die Widerlegung des Irrthums eine gewisse Wichtigkeit besitzen.

Wir wollen deshalb die Bedingung feststellen, unter welcher die Identität stattfindet, und einige Beispiele für das Gegentheil beibringen.

Zu dem Zwecke werde

$$\sqrt[r]{\text{abs}\cdot a_r} = \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon_r}{r}\right), \quad \text{abs}\cdot a_r = \alpha^r\cdot\left(1 + \frac{\varepsilon_r}{r}\right)^r$$

bezeichnet, wo, weil α den Grenzwerth von $\sqrt[r]{\text{abs}\cdot a_r}$ bedeuten soll, über ε_r nur vorausgesetzt wird, dass $\lim\limits_{r=\infty}\cdot\dfrac{\varepsilon_r}{r}=0$ sei.

Dann folgt:

$$\text{abs}\cdot\frac{a_{r+1}}{a_r}=\alpha\cdot\frac{\left(1+\frac{\varepsilon_{r+1}}{r+1}\right)^{r+1}}{\left(1+\frac{\varepsilon_r}{r}\right)^r},\quad \lim_{r=\infty}\cdot\text{abs}\cdot\frac{a_{r+1}}{a_r}=\alpha\cdot\lim_{r=\infty}\cdot e^{\varepsilon_{r+1}-\varepsilon_r}.$$

Mithin besitzen die Ausdrücke $\sqrt[r]{\text{abs}\cdot a_r}$ und $\text{abs}\cdot\dfrac{a_{r+1}}{a_r}$ dann, aber auch nur dann, einen gleichen Grenzwerth, wenn $\lim\limits_{r=\infty}\cdot(\varepsilon_{r+1}-\varepsilon_r)=0$ ist.

Dies braucht aber durchaus nicht der Fall zu sein.

Denn hat man z. B. die Reihe

$$(1)\quad \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 x^1+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 x^2+\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 x^3+\left(1-\frac{1}{4}\right)^4 x^4+\cdots,$$

in welcher

$$a_r=\left(1-\frac{(-1)^r}{r}\right)^r,\quad \varepsilon_r=-(-1)^r$$

ist, so ergiebt sich

$$\varepsilon_{r+1}-\varepsilon_r=2\cdot(-1)^r;\quad \alpha=\lim_{r=\infty}\cdot\sqrt[r]{a_r}=1,$$

während

$$\frac{a_{r+1}}{a_r}=\frac{\left(1-\frac{(-1)^{r+1}}{r+1}\right)^{r+1}}{\left(1-\frac{(-1)^r}{r}\right)^r}$$

ist und daher für grade und ungrade Nummern r die verschiedenen Grenzwerthe

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{a_{2r+1}}{a_{2r}} = e^{+2}, \quad \lim_{r=\infty} \cdot \frac{a_{2r}}{a_{2r-1}} = e^{-2}$$

liefert.

Urtheilt man daher nur nach dem letzten Kriterium, so ist man der Convergenz der Reihe (1) nur für $\text{abs} \cdot x < \frac{1}{e^2} = \frac{1}{7,389\cdots}$ sicher. Dagegen zeigt der Grenzwerth von $\sqrt[r]{a_r}$, dass die Reihe für $\text{abs} \cdot x < 1$ convergirt. — Für $\text{abs} \cdot x = 1$ kann die Reihe nicht mehr convergiren, weil dann $\lim \cdot t_r$ nicht mehr verschwindet.

Die Reihe

$$(2) \left(1 + \frac{l(n-1)}{1}\right)^1 x^1 + \left(1 + \frac{l(2n+2)}{2}\right)^2 x^2 + \left(1 + \frac{l(3n-3)}{3}\right)^3 x^3 + \cdots,$$

in welcher

$$a_r = \left\{1 + \frac{l\left[r\left(n + (-1)^r\right)\right]}{r}\right\}^r, \quad \varepsilon_r = l\left[r\left(n + (-1)^r\right)\right]$$

ist, ergiebt

$$\lim_{r=\infty} \cdot \sqrt[r]{a_r} = 1, \quad \lim_{r=\infty} \cdot \frac{a_{2r+1}}{a_{2r}} = \frac{n+1}{n-1}, \quad \lim_{r=\infty} \cdot \frac{a_{2r}}{a_{2r-1}} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Sie convergirt nach dem ersten Kriterium für $\text{abs} \cdot x < 1$, während das zweite Kriterium die Convergenz nur für $\text{abs} \cdot x < \frac{n-1}{n+1}$ nachweist, was ein desto kleinerer Spielraum ist, je weniger n die 1 übertrifft.

Die Reihe

$$(3) \left(1 - \frac{l(n-1)}{1}\right)^1 x^1 + \left(1 + \frac{l(2n+2)}{2}\right)^2 x^2 + \left(1 - \frac{l(3n-3)}{3}\right)^3 x^3 + \cdots$$

convergirt, weil $\lim \cdot \sqrt[r]{a_r} = 1$ ist, für $\text{abs} \cdot x < 1$. Durch den Bruch $\frac{a_{r+1}}{a_r}$ erkennt man überhaupt nicht, dass sie für irgend ein x convergirt, denn derselbe wächst bei den ungraden Werthen von r unendlich, wie $r(r+1)(n^2-1)$.

§ 54.

Reihen mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern. Bedingte und unbedingte Convergenz.

Lehrsatz I.

Nehmen die absoluten Werthe τ_r der Glieder einer Reihe von der Form

$$s_r = \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4 + \tau_5 - \tau_6 + \cdots + (-1)^{r-1} \tau_r$$

bei unendlich wachsendem r unausgesetzt und unendlich ab, so convergirt die unendliche Reihe

(1) $$s = \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4 + \tau_5 - \tau_6 + \tau_7 - \cdots;$$

und ihre Summe liegt zwischen den Zahlen τ_1 und $(\tau_1 - \tau_2)$.

Beweis. Giebt man der Reihe zunächst eine grade Gliederanzahl r, so ist ihre Summe

$$s_r = (\tau_1 - \tau_2) + (\tau_3 - \tau_4) + (\tau_5 - \tau_6) + \cdots + (\tau_{r-1} - \tau_r)$$

wegen der vorausgesetzten Scala

(2) $$\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \tau_4 > \tau_5 > \tau_6 > \cdots$$

offenbar positiv und $> (\tau_1 - \tau_2)$; auch wächst sie stets, sobald sich die Gliederanzahl um 2 vermehrt.

Da man dieselbe Summe (für ein grades r) aber auch so schreiben kann:

$$s_r = \tau_1 - (\tau_2 - \tau_3) - (\tau_4 - \tau_5) - \cdots - (\tau_{r-2} - \tau_{r-1}) - \tau_r,$$

so ist sie, immer wegen der vorausgesetzten Scala, stets $< \tau_1$, wie gross man auch die Nummer r wählen mag.

Hiermit ist bewiesen, dass s_r, wenn r als grade Zahl unendlich wächst, sich unausgesetzt wachsend einem völlig bestimmten Grenzwerthe nähert, welcher zwischen τ_1 und $(\tau_1 - \tau_2)$ liegt.

Vergleicht man ferner s_{r+1} mit s_r, wo r die Bedeutung einer graden Zahl beibehalten soll, und demnach $(r+1)$ ungrade ist, so hat man:

$$s_{r+1} = s_r + \tau_{r+1},$$

$$\lim_{r=\infty} \cdot s_{r+1} = \lim_{r=\infty} \cdot s_r + \lim_{r=\infty} \cdot \tau_{r+1}.$$

Da nun die mehrfach erwähnte Scala der τ dazu genügt, um dem Grenzwerthe $\lim \cdot \tau_{r+1}$ eine völlig bestimmte Grösse zu sichern, so zeigt die letzte Gleichung an, dass die Reihensumme sich auch dann einem völlig bestimmten Grenzwerth zwischen τ_1 und $(\tau_1 - \tau_2)$ nähert, wenn man die Gliederanzahl in ungraden Nummern unendlich wachsen lässt, dass jedoch $\lim \cdot s_{r+1}$ und $\lim \cdot s_r$ nur dann gleich gross sind, wenn $\lim \cdot \tau_{r+1} = 0$ ist.

Somit ist der Lehrsatz bewiesen.

Aus ihm geht u. A. hervor, dass gewisse unendliche Reihen, welche bei gleichen Vorzeichen der Glieder divergiren würden, noch convergiren, sobald die Vorzeichen abwechseln.

Z. B. divergirt nach § 52 die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^{1-m}} + \frac{1}{3^{1-m}} + \frac{1}{4^{1-m}} + \cdots,$$

sobald $m \gtreqless 0$ ist, während nach unserm letzten Lehrsatz die Reihe

$$1 - \frac{1}{2^{1-m}} + \frac{1}{3^{1-m}} - \frac{1}{4^{1-m}} + \cdots$$

noch convergirt, wenn nur $m < +1$ ist. Für $m = 0$ hat sie nach § 42, (6) den Werth

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = l2.$$

Desgleichen convergirt die binomische Reihe, d. i. die Potenzreihe für $(1+x)^n$, nach § 39 in manchen Fällen, für $x = +1$ (wobei die Vorzeichen ihrer Glieder abwechseln), während sie für $x = -1$ divergirt (wobei die Vorzeichen übereinstimmen).

Nachdem wir gesehen haben, dass die Scala (2) bei Reihen mit abwechselnden Vorzeichen einen Theil derjenigen Convergenzbedingungen ersetzt, auf welche man bei Reihen mit beliebigen Vorzeichen achten muss, wollen wir uns die Frage vorlegen, was mit dem Grenzwerthe s der Reihensumme (1) vorgeht, wenn man die Scala (2) nicht voraussetzt und nur die Bedingung beibehält, dass $\lim_{r=\infty} \cdot \tau_r = 0$ sei. Diese Frage ordnet sich theilweise unter diejenige unter, ob und was für eine Veränderung die Summe s einer convergenten Reihe

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots$$

erleidet, wenn man die Folge ihrer Glieder ändert.

Um die Antwort zu finden, bezeichnen wir:

$$s_r = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_r,$$

und

$$s'_{r+n} = t'_1 + t'_2 + t'_3 + \cdots + t'_{r+n},$$

wo die t' Glieder aus der Reihe der t in irgend welcher Folge sein, n aber einen so grossen Werth haben soll, dass s'_{r+n} jedes in s_r enthaltene Glied t besitzt und mit dem Gliede $t_r = t'_{r+n}$ schliesst.

Dann kann man setzen:

$$s'_{r+n} - s_r = t''_1 + t''_2 + t''_3 + \cdots + t''_n = s''_{r,n},$$

wo also unter den t'' diejenigen Glieder aus der Reihe s verstanden werden, welche bei ihr hinter t_r stehen, in s'_{r+n} aber dem t_r vorangehn.

Nun kann die Summe $s''_{r,n}$ der vor t_r vorgeschobenen Glieder bei unendlich wachsendem r je nach der Beschaffenheit der Reihe s und der Veränderung der Zahl n ein sehr verschiedenes Verhalten zeigen.

Es geht, in welchem Grade auch die Anzahl n der vorgeschobenen Glieder mit r zugleich wachsen möge, stets $\lim_{r=\infty} \cdot s''_{r,n} = 0$ hervor, sobald die Reihe s bei beliebigen Vorzeichen ihrer Glieder convergirt; denn dann ist, wenn wir die absoluten Werthe der t wieder durch τ bezeichnen:

$$\text{abs} \cdot s''_{r,n} < \tau_{r+1} + \tau_{r+2} + \tau_{r+3} + \cdots,$$

und da die Summe dieser τ sich bei unendlich wachsendem r der Null als Grenze nähert, so thut dies um so mehr $s''_{r,n}$. In diesem Falle nennt man die Reihe unbedingt convergent (§ 52 u. § 53).

Ferner ist $\lim_{r=\infty} \cdot s''_{r,n} = 0$, wenn die Anzahl n der vorgeschobenen Glieder nicht zugleich mit r unendlich wächst oder es so thut, dass $\lim_{r=\infty} \cdot n\tau'' = 0$ wird, wo τ'' den grössten Werth unter den Zahlen τ_{r+1}, τ_{r+2}, τ_{r+3}, ... bedeutet; denn es ist offenbar $\text{abs} \cdot s''_{r,n} < n\tau''$.

Wächst die Anzahl n der vorgeschobenen Glieder in stärkerem Maasse, so kann $\lim \cdot s''_{r,n}$ einen von Null verschiedenen Werth erhalten; was wir zunächst durch ein Beispiel illustriren wollen.

Wir wählen dazu die Reihe:

$$s = l\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Verändern wir die Folge der Glieder so, dass immer zwei positive Glieder vor einem negativen stehn, sonst aber die positiven sowohl, als auch die negativen unter sich der Grösse nach geordnet bleiben, bilden wir also die Reihe

$$s' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

so ist die Summe der vor $t_{2r} = -\frac{1}{2r}$ vorgeschobenen Glieder:

$$s''_{2r,n} = \frac{1}{2r+1} + \frac{1}{2r+3} + \frac{1}{2r+5} + \cdots + \frac{1}{4r-1}.$$

Beachtet man nun, dass der Bruch $\frac{1}{2x+1}$ vom Werthe $\frac{1}{2r+2m+1}$ zum Werthe $\frac{1}{2r+2m+3}$ stetig abnimmt, wenn x von $(r+m)$ bis $(r+m+1)$ stetig wächst, so erkennt man sofort die Richtigkeit der Scala

$$\int_{r+m-1}^{r+m} \frac{dx}{2x+1} > \frac{1}{2r+2m+1} > \int_{r+m}^{r+m+1} \frac{dx}{2x+1};$$

und aus dieser folgt durch Summation für $m = 0, 1, 2, 3, \cdots, (r-1)$ nach einem bekannten Satz über die Summation von Integralen:

$$\int_{r-1}^{2r-1} \frac{dx}{2x+1} > s''_{2r,n} > \int_{r}^{2r} \frac{dx}{2x+1};$$

d. i.:

$$\frac{1}{2} \cdot l \frac{4r-1}{2r-1} > s''_{2r,n} > \frac{1}{2} \cdot l \frac{4r+1}{2r+1},$$

oder:

$$\frac{1}{2} \cdot l\left(2 + \frac{1}{2r-1}\right) > s''_{2r,n} > \frac{1}{2} \cdot l\left(2 - \frac{1}{2r+1}\right).$$

Mithin ist:

$$\lim_{r=\infty} \cdot s''_{2r,n} = \frac{1}{2} \cdot l\,2,$$

also:

$$s' = s + \frac{1}{2} \cdot l\,2 = \frac{3}{2} \cdot l\,2.$$

Die Reihe s hat demnach durch die vorgenommene Veränderung der Gliederfolge einen Zuwachs um die Hälfte ihrer Summe erhalten.

Nun lässt sich aber ferner leicht zeigen, dass in einer bedingt convergenten Reihe, d. h. in einer solchen, bei welcher die Reihe der absoluten Werthe der Glieder nicht convergirt, die Folge der Glieder in geeigneter Weise verändert werden kann, um der Summe jeden beliebigen Werth zu ertheilen.

Um einen beliebig ausgewählten positiven Grenzwerth S zu erhalten, nehme man aus der Reihe der unausgesetzt und unendlich abnehmenden Glieder

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5, \ldots$$

zunächst die positiv grössten in solcher Anzahl, dass S um mehr überschritten wird, als der absolute Werth des grössten unter den übrigen Gliedern beträgt; — dies geht an, weil die Reihe der absoluten Werthe nicht convergirt. Zu der erhaltenen Summe $S + P_1$ füge man von den grössten negativen Gliedern so viele hinzu, dass die Summe $S + P_1 - N_1$ weiter unter S herabsinkt, als der grösste absolute Werth der einzelnen noch übrigen Glieder beträgt. Dann füge man wieder so viele von den übrig gebliebenen grössten positiven Gliedern hinzu, dass $P_1 - N_1 + P_2$ grösser wird als der grösste absolute Werth der hierauf noch disponiblen Glieder, füge ferner so viele von den übrigen negativen Gliedern hinzu, dass die Grösse $P_1 - N_1 + P_2 - N_2$ negativ wird und dem absoluten Betrage nach das grösste disponible Glied übertrifft, u. s. f.

Da die Glieder t_r unserer Reihe unendlich abnehmen, so werden die absoluten Werthe der abwechselnd positiven und negativen Grössen

$$P_1,\ P_1 - N_1,\ P_1 - N_1 + P_2,\ P_1 - N_1 + P_2 - N_2, \ldots,$$

falls man zur Bildung der einzelnen P und N nie mehr Glieder t_r

nimmt, als nöthig, desto kleiner, je weiter man bei der Aufrechnung der Reihe kommt, und nähern sich dem Grenzwerthe Null. Mithin ist S in der That der Grenzwerth der Reihensumme, wie verlangt wurde.

Wie man zu verfahren hat, um ein negatives S zu erhalten, ist nach dem Obigen selbstverständlich.

Wir resumiren:

Lehrsatz II.

Theilt man die convergenten Reihen in zwei Classen: die **bedingt** und die **unbedingt** convergenten, je nachdem die Reihe der absoluten Werthe der Glieder divergirt oder ebenfalls convergirt, so trifft man damit die Eintheilung in solche Reihen, denen man durch Veränderung der Folge der Glieder jede beliebige Summe geben kann[1]), und in solche, welche eine von der Gliederfolge unabhängige Summe besitzen.

Die Vermehrung, welche die Summe einer bedingt convergenten Reihe

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots + t_r + \cdots$$

dadurch erfährt, dass man nach einem gewissen Gesetz vor t_r Glieder mit höheren Indices vorschiebt, ist $= \lim\limits_{r=\infty} \cdot s_{r,n}$, wenn unter $s_{r,n}$ die Summe der vorgeschobenen n Glieder verstanden wird. Bezeichnet man mit τ_r den grössten absoluten Werth der vor t_r vorgeschobenen Glieder, so ändert die Veränderung der Gliederfolge jedenfalls dann Nichts an der Reihensumme, wenn $\lim\limits_{r=\infty} \cdot n\tau_r = 0$ ist, und im Besondern dann Nichts, wenn n bei unendlich wachsendem r endlich bleibt.

[1]) Der Begriff des Grenzwerthes einer Summe unendlich vieler Summanden deckt sich daher nicht mit demjenigen der Gesammtsumme der Summanden, wenn man die formale Unificirung der Subtraction mit der Addition aufrecht erhält, wie wir sie in Folge der Adoption der Vietaschen Erfindung der positiven und negativen Zahlen durchzuführen gewohnt sind.

Es ist ferner eine wichtige Frage diejenige nach dem Grenzwerthe einer unendlichen convergenten Reihe, deren Glieder t sich **sämmtlich** auf irgend eine Weise dem Grenzwerthe Null nähern, mögen sie dabei ihre Vorzeichen bewahren oder wechseln.

Bezeichnen wir

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{n-1} + f_n ,$$

wo also

$$f_n = t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \cdots$$

den Rest der Reihe bedeutet, so kann f_n bei einem constanten Werthe von n seine Grösse auf die mannichfaltigste Weise ändern (auch unendlich werden) wenigstens dann, wenn die Glieder t bei bedingt convergenten Reihen sich der Null als Grenze nähern, ohne ihr Vorzeichen zu bewahren, da in diesem Falle die Gewähr für die Convergenz der Reihe aufgehoben ist.[1]) Convergirt aber die Reihe der absoluten Werthe τ der Glieder t fortwährend, indem diese sich einzeln der Null nähern, so ist:

$$\text{abs} \cdot f_n < \tau_n + \tau_{n+1} + \tau_{n+2} + \cdots = \varphi_n$$

und:

$$\text{abs} \cdot (t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{n-1}) \overline{\overline{<}} \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_{n-1} .$$

Mithin ergiebt sich, weil wir n als eine endliche Nummer voraussetzen:

$$\text{abs} \cdot \lim \cdot s = \text{abs} \cdot \lim \cdot f_n \overline{\overline{<}} \lim \cdot \varphi_n$$

für ein endliches n bei unendlicher Abnahme der Glieder t.

Da nun φ_n, wenn man hinterher die Nummer n unendlich wachsen lässt, wegen der vorausgesetzten Convergenz der Reihe der τ sich dem Grenzwerthe Null nähert, so folgt der

Lehrsatz III.

Nähern sich die sämmtlichen Glieder einer Reihe, indem sie ihr Vorzeichen bewahren oder wechseln, in der Weise dem Grenzwerthe Null, das die Reihe **unbedingt** convergent bleibt, so nähert sich die Reihensumme ebenfalls dem Grenzwerthe Null. Geschieht jenes bei einer **bedingt** convergenten Reihe, so lässt sich dieselbe Behauptung nicht ohne Weiteres aufrecht erhalten.

[1]) Vergl. als Belag § 74, Beispiel II.

Anmerkung. Auch bei bedingt convergenten Reihen lassen sich Regeln für einen ähnlichen Schluss aufstellen. Die Verfolgung derselben würde uns aber hier zu weit führen. Es sei deshalb nur bemerkt, dass die Annäherung der Reihensumme an den Grenzwerth Null auch bei bedingt convergenten Reihen offenbar dann feststeht, wenn die absoluten Werthe der Glieder unausgesetzt eine abnehmende Scala bilden, und die Vorzeichen alternirend bleiben.

Lehrsatz IV.

Convergirt eine Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

für $x = c$ bedingt oder unbedingt, so ist sie für $abs \cdot x < abs \cdot c$ **unbedingt** convergent.

Denn da bei unserer Voraussetzung über x die geometrische Reihe

$$1 + \left(\frac{x}{c}\right)^1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2 + \left(\frac{x}{c}\right)^3 + \cdots$$

unbedingt convergirt, und $\lim\limits_{r=\infty} \cdot a_r \cdot c^r = 0$ ist, so convergirt nach § 52 L. ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Glieder auch diejenige, deren allgemeines Glied

$$= a_r c^r \cdot \left(\frac{x}{c}\right)^r = a_r x^r$$

ist.

§ 55.

Addition[1]) und Multiplication unendlicher Reihen.

Addirt man die beiden Summen

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{r-1} + f_r,$$
$$\sigma = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_{\varrho-1} + \varphi_\varrho,$$

[1]) Unter der „Summation“ unendlicher Reihen versteht man die Transformation der einzelnen Reihensumme in eine andere (analytische oder numerische) Form.

so erhält man u. a.:

$$s + \sigma = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{r+\varrho-2} + \left[f_r + \varphi_\varrho\right],$$

wo man unter den T die in irgend welcher Folge genommenen t und τ zu verstehen hat.

Sind nun f_r und φ_ϱ die mit t_r und τ_ϱ anhebenden Reste convergenter Reihen s und σ, so ist:

$$\lim_{r=\infty} \cdot f_r = 0, \quad \lim_{\varrho=\infty} \cdot \varphi_\varrho = 0,$$

also auch:

$$\lim_{r=\infty,\ \varrho=\infty} \cdot \left[f_r + \varphi_\varrho\right] = 0.$$

Wie gross ϱ bei irgend einem Werthe von r geworden sein mag, ist völlig gleichgültig. Jedoch darf man nicht ausser Acht lassen, dass das Permutiren der t unter sich und der τ unter sich, welches bei constanten Werthen von r und ϱ ebenfalls dem völligen Belieben anheimfällt, Beschränkungen unterliegt, wenn r und auch ϱ unendlich wachsen. Für solche Permutationen greift daher wieder der Lehrsatz II. des vorigen § platz.

Vergrössert man die Anzahl der zu einander zu addirenden Reihen, so bleibt unser Resultat offenbar so lange bestehn, wie es sich nicht um den Grenzwerth der Summe einer unendlich wachsenden Anzahl von Reihensummen handelt. Denn, wie gross die Anzahl der Reihen auch sein mag, so ist der Grenzwerth der Summe der Reste,

$$\Sigma f_r = f_r + \varphi_\varrho + \cdots,$$

stets $= 0$, wenn dies von den einzelnen Resten f_r, φ_ϱ, $\cdots$ gilt, so lange deren Anzahl endlich ist; im entgegengesetzten Fall aber kann $\lim \cdot \Sigma f_r$ sehr wohl von Null verschieden (auch unendlich) sein — wie man schon daraus sieht, dass die einzelnen f_r sich als die Differentialelemente eines Integrals darstellen, sobald ihre Anzahl n unendlich wächst, und dass in dem speciellen Fall der Gleichheit aller Reste f_r

$$\Sigma f_r = n \cdot f_r$$

hervorgeht.

Wir fixiren zunächst das Resultat durch den

Lehrsatz I.

Addirt man die Glieder einer endlichen Anzahl convergirender unendlicher Reihen in der Weise zu einander, dass die Gliederfolge in den einzelnen Reihen bestehen bleibt, während die Glieder der verschiedenen Reihen beliebig durch einander gemischt werden, so ist die neue Reihe wieder convergent und hat die Summe der Summen der einzelnen Reihen zur Summe.

Ist die Anzahl der addirten Reihen unendlich, so braucht dies nicht der Fall zu sein.

Was die Multiplication unendlicher Reihen betrifft, so ist es zunächst klar, dass aus der identischen Gleichung

$$a \cdot s = a \cdot \left(t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{r-1} + f_r\right)$$
$$= a t_1 + a t_2 + a t_3 + \cdots + a t_{r-1} + a f_r$$

das Resultat fliesst:

Lehrsatz II.

Anstatt die (berechnete) Summe einer convergenten Reihe mit einer Zahl zu multipliciren, darf man die einzelnen Glieder der Reihe mit derselben multipliciren und die Producte ihrer Folge nach summiren. — Denn da a selbstverständlich endlich ist, so folgt aus $\lim\limits_{r=\infty} \cdot f_r = 0$, dass auch $\lim\limits_{r=\infty} \cdot a f_r = 0$ sei.

Will man aber zwei unendliche Reihen gliedweise mit einander multipliciren, so kann, weil diese Operation mit der Addition einer unendlichen Anzahl unendlicher Reihen schliesst, nach den weiter oben angestellten Betrachtungen der Fall eintreten, dass das Additionsresultat von dem Producte der beiden berechneten Reihensummen endlich oder unendlich verschieden ist.

Geht man zum Zweck der näheren Untersuchung wieder von den beiden obigen Reihensummen s und σ aus, so erhält man u. a.:

$$
\begin{aligned}
s\sigma = & \left[t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{r-2} + t_{r-1} + f_r\right] \cdot \tau_1 \\
& + \left[t_1 + t_2 + \cdots + t_{r-3} + t_{r-2} + f_{r-1}\right] \cdot \tau_2 \\
& + \left[t_1 + \cdots + t_{r-4} + t_{r-3} + f_{r-2}\right] \cdot \tau_3 \\
& + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
& + \left[t_1 + f_2\right] \cdot \tau_{r-1} \\
& + f_1 \cdot \varphi_r,
\end{aligned}
$$

oder wenn man ausmultiplicirt und dann columnenweise summirt:

$$
\begin{aligned}
s \cdot \sigma = & \, t_1 \tau_1 + \left[t_2 \tau_1 + t_1 \tau_2\right] + \left[t_3 \tau_1 + t_2 \tau_2 + t_1 \tau_3\right] + \cdots \\
\cdots & + \left[t_n \tau_1 + t_{n-1} \tau_2 + t_{n-2} \tau_3 + \cdots + t_3 \tau_{n-2} + t_2 \tau_{n-1} + t_1 \tau_n\right] + \cdots \\
\cdots & + \left[f_r \tau_1 + f_{r-1} \tau_2 + f_{r-2} \tau_3 + \cdots + f_3 \tau_{r-2} + f_2 \tau_{r-1} + f_1 \varphi_r\right] \cdot
\end{aligned}
$$

Bei der hier vorgenommenen Gruppirung folgen die sämmtlichen Klammern einem übersichtlichen Bildungsgesetz aus den t und τ, von dem nur die letzte Klammer abweicht, da sie ausser den τ die Reste $f_1, f_2, \cdots f_r$ und φ_r enthält. Sie mag durch Φ_r bezeichnet werden.

Man bedenke nun, dass die Grössen $f_1 = s$, $f_2 = s - t_1$, f_3, $f_4, \ldots, f_r$ wegen der Convergenz der Reihe der t lauter bestimmte Werthe haben, welche eine gewisse Constante C nicht überschreiten, wie gross die Nummer r auch werden mag, und dass nach L. II wegen der Convergenz der Reihe der τ die Grösse Φ_r als convergirende unendliche Reihe

$$\Phi_r = f_r \tau_1 + f_{r-1} \tau_2 + \cdots + f_3 \tau_{r-2} + f_2 \tau_{r-1} + f_1 \tau_r + f_1 \tau_{r+1} + f_1 \tau_{r+2} + \cdots$$

dargestellt werden kann, deren Glieder ihrem absoluten Betrage nach diejenigen der convergenten Reihe

$$C \cdot \sigma = C\tau_1 + C\tau_2 + \cdots + C\tau_{r-2} + C\tau_{r-1} + C\tau_r + C\tau_{r+1} + C\tau_{r+2} + \cdots$$

nicht überschreiten.

Hierdurch erkennt man, dass $\lim_{r=\infty} \cdot \Phi_r$ einen bestimmten endlichen Werth besitzt, sobald die Reihenentwickelung von $C\sigma$, d. i. sobald die Reihenentwickelung von σ, unbedingt (unabhängig von Vorzeichenbedingungen) convergirt, während ein analoger Schluss nicht gemacht werden kann, sobald die Reihe für σ nur bedingt convergirt (§ 52).

Setzen wir daher die unbedingte Convergenz der letzteren und mithin der unendlichen Reihe für Φ_r voraus, so können wir nach § 54, L. III auch schliessen, dass $\lim_{r=\infty} \cdot \Phi_r = 0$ sei, weil die einzelnen Glieder von Φ_r sich dem Grenzwerthe Null nähern. (Ihre Vorzeichen werden dabei vielleicht unendlich oft geändert.)

Das Resultat fassen wir zusammen in dem folgenden

Lehrsatz III.

Ist mindestens eine von den beiden convergirenden Reihen

$$(1) \qquad \begin{cases} s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots, \\ \sigma = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \cdots, \end{cases}$$

unbedingt convergent, so lässt sich das Product $s\sigma$ jederzeit in der Form

$$(2) \qquad \begin{aligned} s\sigma = {} & t_1 \tau_1 \\ & + [t_2 \tau_1 + t_1 \tau_2] \\ & + [t_3 \tau_1 + t_2 \tau_2 + t_1 \tau_3] \\ & + [t_4 \tau_1 + t_3 \tau_2 + t_2 \tau_3 + t_1 \tau_4] \\ & + [t_5 \tau_1 + t_4 \tau_2 + t_3 \tau_3 + t_2 \tau_4 + t_1 \tau_5] \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

darstellen.

Sind s und σ im Besondern zwei Potenzreihen mit positiven Coefficienten:

$$(3) \qquad \begin{cases} s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \\ \sigma = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots, \end{cases}$$

von denen die eine für $-1 \leqq x \leqq +1$ (also für $\text{abs} \cdot x = 1$ noch unbedingt), die andere aber nur für $-1 \leqq x < +1$ (also für $\text{abs} \cdot x = 1$ nur noch bedingt) convergirt, so kann man mit Sicherheit generell nur behaupten, dass

$$(4) \qquad s\sigma = a_0\,\alpha_0 + \left[a_1\,\alpha_0 + a_0\,\alpha_1\right]\cdot x$$

$$+ \left[a_2\,\alpha_0 + a_1\,\alpha_1 + a_0\,\alpha_2\right] x^2 + \left[a_3\,\alpha_0 + a_2\,\alpha_1 + a_1\,\alpha_2 + a_0\,\alpha_3\right]\cdot x^3$$
$$+ \cdots$$

eine für $-1 \overline{\gtrless} x < +1$ convergirende, also für $\text{abs}\cdot x = 1$ eine bedingt convergirende Potenzreihe sei.

Als Beispiel möge uns die mit sich selbst zu multiplicirende Reihe

$$(5) \qquad s = \frac{1}{1^{1-m}} - \frac{1}{2^{1-m}} + \frac{1}{3^{1-m}} - \frac{1}{4^{1-m}} + \cdots$$

dienen, welche nach § 52 convergirt, so lange $1 > m$ ist. Sie gehört zur Classe der bedingt convergenten, so lange $m > 0$ angenommen wird, zur Classe der unbedingt convergenten aber, sobald m einen negativen Werth besitzt.

Im letzteren Falle ist nach der Formel (2) unzweifelhaft:

$$(6) \qquad s^2 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \cdots,$$

wenn

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{1}{(2\cdot 1)^{1-m}} + \frac{1}{(1\cdot 2)^{1-m}},$$

$$u_3 = \frac{1}{(3\cdot 1)^{1-m}} + \frac{1}{(2\cdot 2)^{1-m}} + \frac{1}{(1\cdot 3)^{1-m}},$$

u. s. w., d. i. wenn ganz allgemein

$$(7) \qquad u_{r-1} = \sum_{\mu=1}^{\mu=r-1} \frac{1}{\left[\mu\,(r-\mu)\right]^{1-m}}$$

genommen wird.

Es hört jedoch die Convergenz der Reihe für s^2 bei manchem m auf, bei welchem die Reihe für s noch convergirt.

Erwägt man nämlich, dass

$$\mu\,(r-\mu) = \left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{r}{2} - \mu\right)^2 < \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

ist, so überzeugt man sich, dass in der Entwickelung von s^2 das allgemeine Glied

$$u_{r-1} > (r-1)\left(\frac{2}{r}\right)^{2-2m} = \left(1-\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{4^{1-m}}{r^{1-2m}} = \left(1-\frac{1}{r}\right)\cdot 4^{1-m}\cdot r^{2m-1}$$

ist und daher mit r zugleich unendlich wächst, sobald der Werth von m zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ liegt, so wie dass es nicht unter $4^{1-\frac{1}{2}} = 2$ herabsinkt, wenn $m = \frac{1}{2}$ ist. Für $m \overline{\gtrless} \frac{1}{2}$ kann also s^2 nicht durch die rechte Seite von (6) dargestellt werden, obgleich s durch die rechte Seite von (5) bestimmt ist.

Nehmen wir noch im Besondern $m = 0$, also:

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

so ist nach (7):

$$u_{r-1} = \sum_{\mu=1}^{\mu=r-1} \frac{1}{\mu(r-\mu)} = \frac{1}{r}\sum_{\mu=1}^{\mu=r-1}\left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{r-\mu}\right] = \frac{2}{r}\sum_{\mu=1}^{\mu=r-1}\frac{1}{\mu},$$

oder, weil nach § 52 bei unendlich wachsendem r

$$\lim\cdot\left\{\frac{1}{lr}\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=r-1}\frac{1}{\mu}\right\} = 1$$

hervorgeht:

$$u_{r-1} = \theta_r \cdot 2\frac{lr}{r},$$

wo θ_r eine Zahl bedeutet, die sich bei zunehmendem r der Grenze 1 nähert. Wegen des Grenzwerthes $\lim_{r=\infty}\cdot\frac{lr}{r} = 0$ convergirt also die Reihe (6) noch, sobald $m = 0$ ist. Man erhält ganz correct:

$$(l2)^2 = 1 - \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) - \cdots.$$

— Übrigens trifft die Entwickelung (6) von s^2 für jedes m zu, welches $< \frac{1}{2}$ ist. Man findet nämlich, wenn man in (7) $u = rx$, also $dx = \frac{1}{r}$ setzt:

$$\lim_{r=\infty} \frac{u_r}{r^{2m-1}} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{m-1}\,dx,$$

was nach § 50, Beispiel II für $m > 0$ ein positiver endlicher Werth ε ist. Daher nimmt

$$u_r = \frac{\varepsilon_r}{r^{1-2m}}, \quad (\lim_{r=\infty} \cdot \varepsilon_r = \varepsilon),$$

für $0 < m < \frac{1}{2}$ schliesslich fortwährend ab, wenn r wächst, und nähert sich der Null als Grenze. Folglich convergirt die Reihe (6) für s^2 unter der obigen Bedingung.

§ 56.

Convergenz der Doppelsummen.

Sind die Glieder einer convergenten Reihensumme

(1) $$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots$$

selbst die Summen convergenter Reihen, und zwar

(2) $$\begin{cases} t_1 = u_{1,1} + u_{1,2} + u_{1,3} + u_{1,4} + \cdots, \\ t_2 = u_{2,1} + u_{2,2} + u_{2,3} + u_{2,4} + \cdots, \\ t_3 = u_{3,1} + u_{3,2} + u_{3,3} + u_{3,4} + \cdots, \end{cases}$$

u. s. w.,

so nennt man s eine „Doppelsumme“.

Die Doppelsumme hat demnach die Form:

(3) $$\begin{aligned} s = u_{1,1} &+ u_{1,2} + u_{1,3} + u_{1,4} + \cdots \\ + u_{2,1} &+ u_{2,2} + u_{2,3} + u_{2,4} + \cdots \\ + u_{3,1} &+ u_{3,2} + u_{3,3} + u_{3,4} + \cdots \\ + u_{4,1} &+ u_{4,2} + u_{4,3} + u_{4,4} + \cdots \\ \cdot \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \\ \cdot \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \\ \cdot \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots; \end{aligned}$$

und es ist vorausgesetzt, dass man den bestimmten Grenzwerth s erhält, wenn man zunächst die einzelnen Zeilen summirt und dann

die Summenwerthe t derselben in derjenigen Folge summirt, in welcher sie unter einander stehn.

Nun entsteht die Frage, ob — und eventuell unter welchen Bedingungen — derselbe Grenzwerth s erhalten wird, wenn man zuerst die Columnen summirt und dann die Columnensummen in derjenigen Folge summirt, in welcher sie neben einander stehn.[1])

Als erste unerlässliche Bedingung tritt uns daher die entgegen, dass jede einzelne Columne für sich eine convergente Reihe enthalten müsse. Und dass dies der Fall sei, geht aus unserer Voraussetzung nicht hervor; denn es verträgt sich mit ihr beispielsweise ganz gut, dass die rechten Seiten in (2) sämmtlich mit der Zahl 1 anfangen, wodurch die Summe der r ersten Glieder der ersten Columne in (3) den Werth r erhält und mit r zugleich unendlich wächst.

Convergirt aber jede Columne für sich, so sei:

$$(4)\qquad \begin{cases} c_1 = u_{1,1} + u_{2,1} + u_{3,1} + u_{4,1} + \cdots, \\ c_2 = u_{1,2} + u_{2,2} + u_{3,2} + u_{4,2} + \cdots, \\ c_3 = u_{1,3} + u_{2,3} + u_{3,3} + u_{4,3} + \cdots, \end{cases}$$

u. s. w.

Es fragt sich dann weiter, ob die Reihe der c convergirt, und ob, wenn dies der Fall ist, ihre Summe $= s$ wird.

Um hierüber zum Schluss zu kommen, wollen wir

$$(5)\qquad t_r = u_{r,1} + u_{r,2} + u_{r,3} + \cdots + u_{r,n-1} + \theta_{r,n},$$

$$(6)\qquad c_n = u_{1,n} + u_{2,n} + u_{3,n} + \cdots + u_{m-1,n} + \zeta_{m,n}$$

setzen.

Dann ist:

$$(7)\quad t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{r-1} - \left[\theta_{1,n} + \theta_{2,n} + \theta_{3,n} + \cdots + \theta_{r-1,n}\right]$$
$$= c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{n-1} - \left[\zeta_{r,1} + \zeta_{r,2} + \zeta_{r,3} + \cdots + \zeta_{r,n-1}\right].$$

Lässt man nun zunächst n unendlich wachsen, so nähern sich die einzelnen θ, welche in dieser Gleichung vorkommen, als Reste der convergenten Reihen (2), dem Grenzwerthe Null, mithin auch ihre Summe, weil nur eine endliche Anzahl $(r-1)$ von ihnen vorhanden

[1]) Das Analoge bei den Doppelintegralen ist in § 34 besprochen, wo es sich um die Umkehrung der Integrationsfolge handelt.

ist. Und die linke Seite unserer Gleichung (7) geht über in

$$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{r-1} = s_{r-1}.$$

Wenn hinterher r unendlich wächst, so ist nach (1) der Grenzwerth der linken Seite $= s$.

Betrachten wir ferner die gleichzeitigen Veränderungen der rechten Seite von (7), so finden wir zunächst:

$$s_{r-1} = \lim_{n=\infty} \cdot \left[\sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} c_\mu - \sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} \zeta_{r,\mu} \right].$$

Deshalb convergirt und divergirt freilich die Reihe der Columnen

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$$

gleichzeitig mit derjenigen ihrer Reste

$$Z_r = \zeta_{r,1} + \zeta_{r,2} + \zeta_{r,3} + \cdots;$$

aber es ist nicht die Berechtigung zu dem Schluss gewonnen, dass im Falle der Convergenz $C = s$ sei, weil bei unendlich wachsendem r der Grenzwerth $\lim_{r=\infty} \cdot Z_r$ nach § 54 von Null verschieden sein kann, obgleich sich die einzelnen ζ der Null als Grenze nähern.

Zu den bekannten Fällen, in denen $\lim_{r=\infty} \cdot Z_r = 0$ ist, gehört jedoch u. a. der, dass die Reihe Z_r bei einem hinreichend grossen r unbedingt convergirt; und dieser findet unzweifelhaft statt, wenn die Summe der Horizontalreihen in (3), d. i. wenn die Summe

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots$$

convergent bleibt, sobald man in den Horizontalreihen t_r von einer gewissen Nummer r ab alle Glieder u durch ihre absoluten Werthe ersetzt. Denn dann ist, wenn man diejenigen Werthe, in welche die t_r dadurch übergehn, durch τ_r bezeichnet, offenbar bei jedem n:

$$\text{abs} \cdot \left[\zeta_{r,1} + \zeta_{r,2} + \zeta_{r,3} + \cdots + \zeta_{r,n}\right] < \tau_r + \tau_{r+1} + \tau_{r+2} + \cdots;$$

und da die rechte Seite dieser Ungleichung bei unendlich wachsendem r sich der Grenze Null nähert, so thut es auch die linke. Auch folgt bei Doppelreihen von dieser Beschaffenheit die Convergenz der Verticalreihen von selbst, denn es ist bei ihnen offenbar:

$$\text{abs}\cdot\left[u_{r,n}+u_{r+1,n}+u_{r+2,n}+\cdots\right]<\tau_r+\tau_{r+1}+\tau_{r+2}+\cdots,$$

so dass man eine besondere Untersuchung über deren Convergenz in den Einzelfällen unterlassen darf, während eine solche Untersuchung bei Reihen von anderer Beschaffenheit nicht zu umgehen ist.

Sind die Horizontalreihen t_r nicht bloss einzeln unbedingt convergent, sondern bilden auch die τ_r eine convergente Reihe, so ergiebt sich noch aus § 54, dass man die sämmtlichen Elemente u der Gleichung (3) in einer ganz beliebigen Folge anordnen darf.

Die Resultate dieser Betrachtung lassen sich so zusammenfassen:

Lehrsatz.

Bleiben in einer Doppelreihe (3) nicht bloss die Zeilen, sondern auch die Columnen, convergent, sobald man ihre Elemente durch deren absolute Werthe ersetzt, so erhält man bei jeder beliebigen Anordnung der Elemente einen und denselben Grenzwerth s der Reihensumme. Ist die Reihe der Zeilensummen convergent in der Weise, dass aus ihr wieder eine convergente Reihe hervorgeht, wenn man von einer gewissen Zeilennummer ab alle Elemente der Zeilen durch ihre absoluten Werthe ersetzt, so convergiren die einzelnen Columnen ebenfalls, und ihre Summe convergirt zur Summe der Zeilensummen. In den hiervon abweichenden Fällen können die Summe der Columnensummen und diejenige der Zeilensummen, auch wenn sie beide convergiren, verschiedene Grenzwerthe haben, und es braucht die eine nicht zu convergiren, wenn es die andere thut.

Nachdem wir uns schon bei den bedingt convergenten einfachen Reihen durch Beispiele davon überzeugt haben, dass man durch die Veränderung der Summandenfolge zu verschiedenen Werthen der Reihensumme gelangen kann, wollen wir auch die mit den letzten Worten unseres Lehrsatzes ausgesprochene ganz analoge oder eigentlich identische Erscheinung bei den Doppelsummen durch ein Beispiel illustriren.

Die Doppelsumme laute:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{1}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{1}+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\cdots$$

$$+\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad\cdots$$

In ihr ist jede Zeilensumme $t_r = 0$; denn die Summe einer graden Anzahl von Gliedern ist identisch $= 0$, und die Summe einer ungraden Anzahl hat die Form

$$\frac{1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{r},$$

so dass sie sich bei unendlich wachsendem n der Null als Grenze nähert. Daher ist die Summe der Zeilensummen

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots$$

ebenfalls $= 0$.

Die Columnen dagegen sind convergirende geometrische Reihen mit den Summen

$$+\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ +\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ +\frac{3}{4},\ -\frac{3}{4},\cdots;$$

und deren Summe wird nur dann $= 0$, wenn man eine grade Anzahl Columnen summirt, während eine ungrade Anzahl der Columnen eine Summe von der Form

$$\frac{n-1}{n}$$

giebt, welche sich bei unendlich wachsendem n dem Grenzwerthe 1 nähert.

§ 57.

Convergenz der unendlichen Reihenproducte.

Lässt man die Anzahl r der Factoren eines Productes

(1) $$\varpi_r = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdots u_r$$

unendlich wachsen, so kann der Fall eintreten, dass man zu einem endlichen, völlig bestimmten Grenzwerthe $\lim_{r=\infty} \cdot \varpi_r = \varpi$ gelangt.

Soll derselbe von Null verschieden sein, so müssen die Factoren u_r von einer gewissen Nummer r an nothwendig positive Werthe haben, weshalb es keine Beschränkung ist, wenn wir sie sämmtlich als positiv voraussetzen. Dann hat aber auch $l\varpi$ einen bestimmten endlichen Werth; und es ist hierzu hinreichend und nothwendig, dass die unendliche Reihensumme

(2) $$l u_1 + l u_2 + l u_3 + l u_4 + \cdots$$

convergirt. — Diese Art von Convergenz des Productes kann daher nur eintreten, wenn

$$\lim_{r=\infty} \cdot l u_r = 0, \quad \lim_{r=\infty} \cdot u_r = 1$$

ist, erfordert aber selbstverständlich ausserdem die Erfüllung der Ansprüche an die Logarithmen der Factoren, welche zur Convergenz ihrer Summe sonst noch gemacht werden müssen.

Während in dem so eben besprochenen Falle zugleich mit ϖ_r auch das Product $\frac{1}{\varpi_r}$ der reciproken Werthe der Factoren u_r convergirt, so geschieht dieses nicht in demjenigen, in welchem $\lim_{r=\infty} \cdot \varpi_r = 0$ ist, und die Reihensumme (2) wächst hierbei negativ unendlich, anstatt zu convergiren. — Die Voraussetzung, dass sämmtliche Factoren u_r positiv seien, beschränkt auch hier die Allgemeinheit nicht, weil sich der Grenzwerth $\varpi = 0$ nicht ändert, wenn man die etwa vorhandenen negativen Factoren durch ihre absoluten Werthe ersetzt.

Ein Reihenproduct soll **echt** oder **unecht convergent** heissen, je nachdem sein Grenzwerth > 0 oder $= 0$ ist.

Die echt convergenten Producte können bedingt oder unbedingt convergiren, je nachdem es die Reihe (2) thut.

Bei bedingter Convergenz der Reihe (2) kann man durch eine geeignete Veränderung der Summandenfolge ihren Grenzwerth beliebig ändern (§ 54); also kann man das Analoge in Bezug auf $\lim \cdot \varpi_r$ durch Veränderung der Factorenfolge bewirken. In dem besondern Fall, in welchem die Glieder der Reihe (2) abwechselnde Vorzeichen bei unausgesetzt zur Null abnehmenden absoluten Werthen haben, besitzen die Glieder der Reihe

$$l\,u_1,\ l\frac{1}{u_2},\ l\,u_3,\ l\frac{1}{u_4},\ l\,u_5,\ l\frac{1}{u_6},\ \ldots$$

einerlei Vorzeichen und nehmen, weil $l\frac{1}{u_r} = -\,l\,u_r$ ist, ihrem absoluten Betrage nach unausgesetzt ab. Dies bedeutet für die Reihe der Numeri

$$u_1,\ \frac{1}{u_2},\ u_3,\ \frac{1}{u_4},\ u_5,\ \frac{1}{u_6},\ \ldots,$$

dass sie in dieser Folge eine der 1 zustrebende Scala bilden. Hiermit ist eine ausreichende, wenngleich nicht nothwendige Bedingung für die Convergenz des Productes (1) gewonnen, welche sich bequem handhaben lässt.

Für die unbedingt convergenten Producte ergiebt sich durch Anwendung von § 52 auf die Reihe (2) als ein ausreichendes Merkmal, dass das Product

$$l^0 r\, l^1 r \cdots l^{n-1} r \left(l^n r\right)^{1+p} \cdot l\,u_r = \psi(r)$$

bei irgend einer Nummer n für $p > 0$ endlich bleibe, wenn r unendlich wächst. Dasselbe gilt daher von der Potenz

$$u_r^{\,l^0 r\, l^1 r \cdots l^{n-1} r \left(l^n r\right)^{1+p}} = e^{\psi(r)} = \lambda(r)$$

mit Ausschluss des Grenzwerthes $\lim \cdot \lambda(r) = 0$.

Unecht convergent ist das Reihenproduct, wenn die Reihensumme (2) negativ unendlich wächst. Dies geschieht nach § 52 jedenfalls, wenn das obige $\psi(r)$ für $p \gtreqless 0$ einen endlichen oder unendlichen negativen Werth erlangt, oder — anders gesagt — wenn $1 > \lambda(r) \geqq 0$ hervorgeht. Hierzu gehört namentlich auch der Fall, dass u_r kleiner als eine die 1 nicht erreichende Constante bleibt, weil dann für $n = 0$ und $p = 0$ schon

$$u_r^{\,r} = \lambda(r)$$

sich der Grenze Null nähert.

Demnach gilt der folgende

Lehrsatz I.

Das Product

(1) $$\varpi = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdots u_r \cdots$$

ist **echt** aber **bedingt convergent,** wenn die Glieder der Reihe

(3) $$u_1, \frac{1}{u_2}, u_3, \frac{1}{u_4}, u_5, \frac{1}{u_6}, \cdots$$

eine der 1 zustrebende Scala bilden, dagegen **echt** und **unbedingt convergent,** wenn die Potenz

(4) $$u_r^{l^0{}_r\, l^1{}_r \ldots l^{n-1}{}_r (l^n{}_r)^{1+p}} = e^{\psi(r)} = \lambda(r)$$

bei irgend einer Nummer n für $p > 0$ endlich und von Null verschieden bleibt, sobald r unendlich wächst.

Gewinnt dagegen bei unendlich wachsendem r die Scala $1 > \lambda(r) \geqq 0$ Geltung für $p \overline{\gtrless} 0$, so ist das Product (1) **unecht convergent,** d. h. es ist dann $\lim \cdot \varpi_r = 0$, weshalb das reciproke Product divergirt.

Zuweilen ist eine andere Form der Convergenzbedingungen, welche durch die Anwendung von § 42 auf die Reihe (2) erhalten wird, bequemer. Setzt man nämlich $u = 1 + z$, so ist nach § 42 (3) und (4):

$$lu = l(1+z) = z - \frac{1}{2} z^2 \int_0^1 \frac{dv}{1 + z\sqrt{v}} = z - \frac{1}{2} z^2 : \left\{1 + z - \frac{z}{2 + \theta^z}\right\},$$
$$(0 < \theta < 1),$$

oder:

$$lu = l(1+z) = z - \frac{1}{2(1+\mu z)} \cdot z^2,$$

wo

$$\mu = \frac{1 + \theta^z}{2 + \theta^z}$$

eine Zahl bedeutet, welche bei einem positiven Werthe von z zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$, bei einem negativen Werthe von z aber zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt.

Daher kann man in allen Fällen, in welchen $l u_r$ einen positiven oder negativen Werth hat,

$$l u_r = l(1 + z_r) = z_r - C_r \cdot z^2_r$$

setzen, wo unter C_r eine endlich bestimmte positive Zahl verstanden wird, welche desto genauer den Werth $\frac{1}{2}$ besitzt, je kleiner abs $\cdot$ z ist.

Mithin convergirt oder divergirt die Reihe (2), je nachdem die beiden Reihen

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \cdots,$$
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + \cdots$$

convergiren, oder mindestens eine von ihnen divergirt. Ist die erstere unbedingt convergent, so ist es auch die zweite, weil deren Glieder aus denjenigen der ersteren durch Multiplication mit den endlichen Zahlen $z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots$ hervorgehn. Dagegen kann die zweite divergiren, wenn die erstere bedingt convergirt, z. B. könnten die Reihen lauten:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} - \frac{1}{5^m} + \cdots, \\ &\frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \cdots \end{aligned}\right\}; \left(0 < m \overline{\gtrless} \frac{1}{2}\right).$$

Diese Betrachtungen führen zu dem

Lehrsatz II.

Das Product

(5) $$\varpi = (1 + z_1)(1 + z_2)(1 + z_3) \cdots (1 + z_r) \cdots$$

ist **echt** und **unbedingt convergent**, wenn die Reihensumme

(6) $$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_r + \cdots$$

unbedingt convergirt; **echt** und **bedingt convergent**, wenn die Reihensumme (6) bedingt convergirt und ausserdem auch die Summe der Quadrate der z, nämlich

(7) $$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \cdots + z_r^2 + \cdots,$$

einen endlichen Grenzwerth besitzt.

Unecht convergent ist das Product (5), sowohl wenn (6) convergirt und (7) divergirt, als auch wenn der Werth von (6) negativ unendlich wächst, während $\lim_{r=\infty} \cdot z_r = 0$ ist.

Beispiele:

I. Das Product

$$\varpi = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

convergirt zu einem von Null verschiedenen Grenzwerth; es ist echt convergent, weil

$$\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4} > \frac{6}{5} > \frac{7}{6} > \cdots, \text{ und } \lim_{r=\infty} \cdot \frac{r+1}{r} = 1$$

ist.

Übrigens findet unbedingte Convergenz statt bei der Darstellung:

$$\varpi = \frac{2}{1} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdots;$$

denn wenn man

$$u_r = \frac{(2r-2) \cdot 2r}{(2r-1)^2} = 1 - \frac{1}{(2r-1)^2}$$

setzt, so erhält man aus (4) für $n = 0$ und $p = +1$ als eine endliche und von Null verschiedene Grösse:

$$\lim_{r=\infty} \cdot \lambda(r) = \lim_{r=\infty} \cdot u_r^{r^2} = \lim_{r=\infty} \cdot \left(1 - \frac{1}{(2r-1)^2}\right)^{r^2}$$

$$= \lim_{r=\infty} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{(2r-1)^2}\right)^{(2r-1)^2}\right]^{\left(\frac{1}{2-\frac{1}{r}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{4}}.$$

Dasselbe gilt auch bei der Gruppirung

$$\varpi' = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots;$$

denn dann ist für $n = 0$ und $p = +1$:

$$\lim_{r=\infty} \cdot \lambda(r) = \lim_{r=\infty} \cdot \left(\frac{2r \cdot 2r}{(2r-1)\cdot(2r+1)}\right)^{r^2} = \lim_{r=\infty} \cdot \left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4r^2}\right)^{4r^2}}\right]^{\frac{1}{4}} = e^{+\frac{1}{4}}.$$

Und man hat $\varpi = \varpi'$, weil der Quotient dieser Grössen von der Form $\lim_{r=\infty} \cdot \left(1+\frac{1}{r}\right) = 1$ ist.

In der ursprünglichen Form

$$\varpi = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

ist aber die Convergenz eine bedingte; denn bei dieser Form wird die Reihensumme (2) bedingt convergent, weil das Product der Reihe

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots, \frac{r+1}{r}, \ldots,$$

divergirt, was man schon vermittelst directer Multiplication erkennt, da sich jeder Zähler gegen den folgenden Nenner hebt. Man kann daher dem ϖ durch die blosse Änderung der Folge der Factoren jeden beliebigen Werth ertheilen.

Zu denselben Resultaten gelangt man einfacher vermittelst des Lehrsatzes II, da ϖ, je nachdem man die Factoren einzeln stehn lässt oder zu zweien zusammenfasst, so dargestellt werden kann:

$$\varpi = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots$$

oder:

$$\varpi = \left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots$$

II. Das so eben behandelte Beispiel lässt sich als ein besonderer Fall des folgenden ansehn:

$$\varpi = \left(1+\frac{x_1}{1^{1+p}}\right)\left(1+\frac{x_2}{2^{1+p}}\right)\left(1+\frac{x_3}{3^{1+p}}\right)\cdots,$$

in welchem x_1, x_2, x_3, $\cdots$ beliebige positive oder negative Zahlen bedeuten.

Hier entsteht für $n = 0$ aus (4):

$$\lambda(r) = \left(1 + \frac{x_r}{r^{1+p}}\right)^{r^{1+p}},$$

was desto genauer mit e^{x_r} übereinstimmt, je grösser r wird.

Daher convergirt unser Product ϖ **echt** und unbedingt, wenn $p > 0$ ist, und x_r bei unendlich wachsendem r endlich bleibt; dagegen **unecht**, wenn $0 \overline{\overline{>}} p > -1$ ist, und x_r bei unendlich wachsendem r nur negative endliche Werthe annimmt. — Für $x_r > 0$ und $0 \overline{\overline{>}} p > -1$ divergirt das Product ϖ.

Dass, wie wir in § 39 auf anderm Wege ermittelt haben, $\binom{n}{r}$ sich dem Grenzwerthe Null nähert, wenn $(n+1) > 0$ ist, zeigt sich auch hieraus; denn man braucht nur $p = 0$ und $x_r = -(n+1)$ zu setzen, um dasselbe Resultat zu erhalten.

III. Das Product

$$\varpi = (1 + a_1 x^1)(1 + a_2 x^2)(1 + a_3 x^3)(1 + a_4 x^4) \cdots$$

ist nach L. II. echt und unbedingt convergent für $\text{abs} \cdot x < 1$, falls $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ irgend welche positive oder negative Constanten bedeuten, welche nicht mit ihrem Index zugleich unendlich zunehmen; denn die Reihensumme

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

ist in diesem Falle unbedingt convergent.

IV. Das Product

$$\varpi = \left(1 - \frac{x}{2^m}\right)\left(1 + \frac{x}{3^m}\right)\left(1 - \frac{x}{4^m}\right)\left(1 + \frac{x}{5^m}\right) \cdots$$

hat nach L. II für $0 < m \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ den Werth $\varpi = 0$. Dagegen ist ϖ von Null verschieden für $m > \frac{1}{2}$, aber noch von der Folge der Factoren abhängig, ausser wenn $m > 1$ angenommen wird.

§ 58.

Äquivalente unendlich grosser oder kleiner Producte.

Sind die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ bei einer vorgeschriebenen Veränderung von x in der Weise unendlich gross oder klein, dass ihr Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ den Grenzwerth 1 besitzt, so heisst die eine ein **Äquivalent** der andern.

Wir haben in diesem Capitel schon eine grössere Anzahl solcher Äquivalente für unendlich grosse Integrale und Reihensummen kennen lernen, z. B. für letztere in § 52 (2) und (3); und es gewinnt beim ersten Anblick den Anschein, als ob die hier namentlich angeführten Formeln durch Vermittelung der Reihe (2) des vorigen § sich ohne Weiteres zur Herleitung von Äquivalenten für das Product ϖ_r benutzen liessen. Jedoch bedarf es hierbei einiger Vorsicht, weil aus der Gleichung

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{l\, u_r}{l\, w_r} = 1$$

nicht geschlossen werden kann, dass auch

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{u_r}{w_r} = 1$$

sei; denn es folgt nur, dass

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{u_r}{w_r} = \lim_{r=\infty} \cdot v_r$$

ist, wo v_r eine Function von r bedeutet, welche der Bedingung

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{l\, v_r}{l\, w_r} = 0$$

genügt. — Man überzeugt sich hiervon sehr leicht durch die Betrachtung des Bruches

$$\frac{l\, u_r - l\, v_r}{l\, w_r},$$

aus welchem u. a. hervorgeht, dass v_r sogar unendlich wachsen kann, wenn w_r unendlich wächst.

Um eine sichere Basis zu gewinnen, wollen wir zunächst

$$l\,u_r = \varphi(r) = \frac{1}{\overset{0}{l}r \cdot \overset{1}{l}r \cdots \overset{n-1}{l}r \left(\overset{n}{l}r\right)^{1-\mu}}$$

setzen, wo $1 > \mu \overline{>} 0$ sei. Dann ergiebt der Taylorsche Satz, weil

$$-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\overset{0}{l}x} + \frac{1}{\overset{0}{l}x\,\overset{1}{l}x} + \frac{1}{\overset{0}{l}x\,\overset{1}{l}x\,\overset{2}{l}x} + \cdots + \frac{1-\mu}{\overset{0}{l}x\,\overset{1}{l}x \cdots \overset{n}{l}x}$$

wird:

$$\int_r^{r+1} \varphi(x)\,dx =$$

$$\varphi(r) - \int_r^{r+1} (r+1-x) \cdot \varphi(x) \cdot \left\{ \frac{1}{\overset{0}{l}x} + \frac{1}{\overset{0}{l}x\,\overset{1}{l}x} + \cdots + \frac{1-\mu}{\overset{0}{l}x \cdots \overset{n}{l}x} \right\} dx.$$

Substituirt man in dieser Gleichung für r nach und nach die Werthe $a+1$, $a+2$, $a+3$, ..., r und summirt die linken, wie auch die rechten Seiten, so ergiebt sich:

$$\int_{a+1}^{r+1} \varphi(x)\,dx = (l\,\varpi_r - l\,\varpi_a) - l\,E_r,$$

wo zur Abkürzung

$$\varpi_r = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdots u_r,$$

$$l\,\varpi_r = l u_1 + l u_2 + l u_3 + \cdots + l u_r,$$

$$l\,E_r = \sum_{m=a+1}^{m=r} \int_m^{m+1} (m+1-x)\,\varphi(x) \left\{ \frac{1}{\overset{0}{l}x} + \frac{1}{\overset{0}{l}x\,\overset{1}{l}x} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{1-\mu}{\overset{0}{l}x \cdots \overset{n}{l}x} \right\} dx$$

gesetzt ist.

Die Differentiale der einzelnen Integrale, durch deren Summation $l\,E_r$ gewonnen wird, sind positiv, sobald a gross genug genommen wird, um dem $\overset{n}{l}x$ innerhalb der Integrationsintervalle positive Werthe zu ertheilen. Daher sind es auch die Integrale. Und da ferner $(m+1-x)$ zwischen 1 und 0 variirt, so ist:

$$l\,E_r < \int_{a+1}^{r+1} \varphi(x) \left\{ \frac{1}{\overset{0}{l}x} + \frac{1}{\overset{0}{l}x\,\overset{1}{l}x} + \cdots + \frac{1-\mu}{\overset{0}{l}x \cdots \overset{n}{l}x} \right\} dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Ungleichung erlangt bei unendlich wachsendem r einen endlichen Grenzwerth nach § 49, weil man wegen der vorausgesetzten Scala $1 > \mu \overline{>} 0$ positive Werthe p angeben kann, für welche $(p + \mu) < 1$, und demnach

$$\lim_{x=\infty} \cdot \varphi(x) \left\{ \frac{1}{\overset{0}{l}x} + \frac{1}{\overset{0}{l}x\,\overset{1}{l}x} + \cdots + \frac{1-\mu}{\overset{0}{l}x \cdots \overset{n}{l}x} \right\} \cdot \overset{0}{l}x\,\overset{1}{l}x \cdots \overset{n-1}{l}x \left(\overset{n}{l}x\right)^{1+p}$$

$$= \lim_{x=\infty} \cdot \left(\overset{n}{l}x\right)^{p+\mu} \left\{ \frac{1}{\overset{0}{l}x} + \frac{1}{\overset{0}{l}x\,\overset{1}{l}x} + \cdots + \frac{1-\mu}{\overset{0}{l}x \cdots \overset{n}{l}x} \right\}$$

$$= \lim_{x=\infty} \cdot \left\{ \frac{\left(\overset{n}{l}x\right)^{p+\mu}}{\overset{0}{l}x} + \cdots + \frac{\left(\overset{n}{l}x\right)^{p+\mu}}{\overset{0}{l}x \cdots \overset{n-1}{l}x} + \frac{1-\mu}{\overset{0}{l}x \cdots \overset{n-1}{l}x \cdot \left(\overset{n}{l}x\right)^{1-p-\mu}} \right\} = 0$$

hervorgeht, welchen Werth auch immer die Nummer n besitzen mag.

Daher ist die Gleichung

$$\varpi_r = \varpi_a \cdot E_r \cdot e^{\int_{a+1}^{r+1} \varphi(x)\,dx}$$

von der Beschaffenheit, dass $\lim_{r=\infty} \cdot E_r$ einen bestimmten endlichen, von Null verschiedenen Werth besitzt.

Der Werth des rechts stehenden Integrals ist

1) für $\mu = 0$:

$$\int_{a+1}^{r+1} \varphi(x)\,dx = \overset{n+1}{l}(r+1) - \overset{n+1}{l}(a+1) = l \cdot \overset{n}{l}(r+1) - l \cdot \overset{n}{l}(a+1);$$

2) für $\mu > 0$:

$$\int_{a+1}^{r+1} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\mu}\left[\left(\overset{n}{l}(r+1)\right)^{\mu} - \left(\overset{n}{l}(a+1)\right)^{\mu} \right].$$

Mithin ergiebt sich, da bei unserer Voraussetzung $\lim \cdot \frac{\varpi_{r+1}}{\varpi_r} = \lim \cdot u_{r+1} = 1$ ist,

1) für $\mu = 0$:

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{\varpi_r}{\overset{n}{l}r} = C,$$

2) für $\mu > 0$:

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{\varpi_r}{e^{\frac{(\iota^{n}{}_r)^\mu}{\mu}}} = C;$$

wo C einen endlichen, von Null verschiedenen Werth bedeutet; auf dessen genauere Angabe kommt es uns nicht an.

Nachdem diese Vorbereitungen getroffen sind, wollen wir die Voraussetzung fallen lassen, dass $l u_r = \varphi(r)$ sei, und anstatt derselben den allgemeineren Fall setzen, dass der Quotient

$$\frac{l u_r}{\varphi(r)} = \psi(r)$$

sich bei unendlich wachsendem r einem von Null verschiedenen Grenzwerthe nähere oder wenigstens endlich und von Null verschieden bleibe. Dann ist nach dem Obigen:

$$l \frac{\varpi_r}{\varpi_a} = l u_{a+1} + l u_{a+2} + \cdots + l u_r$$

$$= \psi(a+1) \cdot \varphi(a+1) + \psi(a+2) \cdot \varphi(a+2) + \cdots + \psi(r) \cdot \varphi(r)$$

$$= \psi \cdot \left[\varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \cdots + \varphi(r)\right]$$

$$= \psi \cdot \left[l E_r + \int_{a+1}^{r+1} \varphi(x)\, dx\right],$$

wo ψ einen Mittelwerth zwischen denen bedeutet, welche $\psi(x)$ von $x = a + 1$ bis $x = r$ annimmt. Hieraus folgt:

$$\varpi_r = \varpi_a \cdot E_r^{\psi} \cdot e^{\psi \cdot \int_{a+1}^{r+1} \varphi(x)\, dx} = \varpi_a \cdot E^{\psi} \cdot \lambda^{\int_{a+1}^{r+1} \varphi(x)\, dx},$$

wo, wie im vorigen §,

$$e^{\psi(r)} = \lambda(r)$$

gesetzt ist, und

$$\lambda = M\left\{\lambda(a+1),\ \lambda(r)\right\}$$

bedeutet.

Demnach ist, falls $\lambda(r)$ sich einem bestimmten Grenzwerthe nähert,

1) für $\mu = 0$:

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{\varpi_r}{\lambda^{\iota^{n+1}_r}} = C,$$

2) für $\mu > 0$:

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{\varpi_r}{\lambda^{\frac{(\iota^n_r)^\mu}{\mu}}} = C \cdot$$

Und falls $\lambda(r)$ zwischen endlichen Grenzen oscillirt, so sind diese Gleichungen so zu verstehn, dass die linken Seiten bei unendlich wachsendem r dennoch endlich bleiben.

Übrigens muss im ersteren Falle $\lim \cdot \frac{\lambda(r)}{\lambda} = 1$ sein, weil einerseits das λ durch die völlig der Willkür überlassene Vergrösserung von a dem $\lambda(r)$ beliebig nahe gebracht werden kann, und weil andrerseits für ein ω, welches gleichzeitig mit r unendlich wächst, die Relation

$$C = \lim_{r=\infty} \cdot \frac{\varpi_r}{\lambda^\omega} = \lim_{r=\infty} \cdot \frac{\varpi_r}{\lambda_1^\omega} = \lim_{r=\infty} \cdot \frac{\varpi_r}{\lambda^\omega} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^\omega$$

bei verschiedenen Functionen λ und λ_1 nicht Bestand haben kann, wenn nicht

$$\lim \cdot \frac{\lambda}{\lambda_1} = 1$$

ist.

Nähern sich ferner die Factoren des Productes ϖ_r einem von 1 verschiedenen Grenzwerthe c, so ist $\frac{\varpi_r}{c^r}$ ein Product, welches den bisher gestellten Ansprüchen genügt; und die Formeln für ein solches gehn aus den obigen hervor, wenn man ϖ_r durch $\frac{\varpi_r}{c^r}$ und u_r durch $\frac{u_r}{c}$ ersetzt.

Ist das Product ϖ_r unecht convergent, anstatt unendlich zu wachsen, so ändert sich an dem Obigen nichts, ausser dass $\psi(r) < 0$ und daher $\lambda(r) = e^{\psi(r)} < 1$ wird.

Daher gilt der

Lehrsatz I.

Sind die Factoren des Productes

$$(1) \qquad \varpi_r = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdots u_r$$

von solcher Beschaffenheit, dass für $\mu \overline{>} 0$ bei irgend einer Nummer n und einem constanten Werthe von c die Potenz

$$(2) \qquad \left(\frac{u_r}{c}\right)^{\iota^0{}_r\,\iota^1{}_r \ldots \iota^{n-1}{}_r\,(\iota^n{}_r)^{1-\mu}} = \lambda(r)$$

sich einem von Null verschiedenen Grenzwerthe nähert, sobald r unendlich wächst, so ist:

$$(3) \qquad \lim_{r=\infty} \cdot \frac{\varpi_r}{c^r \lambda(r)^{\iota^{n+1}{}_r}} = C \text{ für } \mu = 0,$$

$$(4) \qquad \lim_{r=\infty} \cdot \frac{\varpi_r}{c^r \lambda(r)^{\frac{(\iota^n{}_r)^\mu}{\mu}}} = C \text{ für } \mu > 0;$$

wo C eine von Null verschiedene Constante bedeutet.

Nähert sich $\lambda(r)$ keinem Grenzwerthe, ohne jedoch unendlich gross oder klein zu sein, so gelten die Relationen (3) und (4) in dem Sinne, dass für $\lambda(r)$ ein Mittelwerth zwischen denjenigen Werthen zu setzen ist, welche $\lambda(r)$ annimmt, nachdem r eine beliebig grosse Zahl überschritten hat.

Das Product ϖ_r wächst unendlich oder nimmt unendlich ab, je nachdem $\lambda(r) > 1$ oder < 1 wird.

Ist u_r selbst unendlich gross oder klein, so interessirt besonders der Fall, in welchem $u_r = (\alpha + r)^{\pm 1}$ ist.

Die Reihe (2) des vorigen § lautet in diesem Falle für das obere Vorzeichen:

$$l\,\varpi_r = l(\alpha + 1) + l(\alpha + 2) + l(\alpha + 3) + \cdots + l(\alpha + r),$$

während für das untere Vorzeichen nur alle Summanden negativ werden.

Um dieselbe durch eine Summe von Integralen auszudrücken, benutzen wir den Taylorschen Satz (§ 36(2) und § 38(2)), indem wir $f'(x) = \varphi(x)$ setzen, in der Form:

$$\int_a^z \varphi(x)\,dx = (z-a)\,\varphi(a) + (z-a)^2 \cdot \int_0^1 u\,\varphi'(z-u(z-a))\,du.$$

Wir erhalten durch die Substitution von

$$\varphi(x) = l\,x, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x}, \quad \int_a^z \varphi(x)\,dx = z\,l\,\frac{z}{e} - a\,l\,\frac{a}{e}$$

die Relation:

$$z\,l\,\frac{z}{e} - a\,l\,\frac{a}{e} = (z-a)\,l\,a + (z-a)^2 \cdot \int_0^1 \frac{u\,du}{z-(z-a)\,u}.$$

Dieselbe wird für unsern Zweck verwendbar, wenn man zunächst $z - a = +\frac{1}{2}$, dann $z - a = -\frac{1}{2}$ setzt und hierauf die beiden so erhaltenen Gleichungen durch Subtraction verbindet. Da hierbei links das Glied $a\,l\,\frac{a}{e}$ wegfällt, so ergiebt sich:

$$\left(a+\frac{1}{2}\right) l\,\frac{a+\frac{1}{2}}{e} - \left(a-\frac{1}{2}\right) l\,\frac{a-\frac{1}{2}}{e}$$

$$= l\,a + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{u\,du}{a+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}u} - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{u\,du}{a-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}u}$$

$$= l\,a - \int_0^1 \frac{u(1-u)\,du}{4a^2-(1-u)^2};$$

und hieraus folgt, wenn man noch (1—u) für u einführt:

$$l\,a = \left(a+\frac{1}{2}\right) l\,\frac{a+\frac{1}{2}}{e} - \left(a-\frac{1}{2}\right) l\,\frac{a-\frac{1}{2}}{e} + \int_0^1 \frac{u(1-u)\,du}{4a^2-u^2}.$$

Identificirt man nun das a nach und nach mit $\alpha+1$, $\alpha+2$, ..., $\alpha+r$ und summirt die dadurch erhaltenen Relationen, so folgt:

$$l\,\varpi_r = \left(\alpha + r + \frac{1}{2}\right)\cdot l\,\frac{\alpha + r + \frac{1}{2}}{e} - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\cdot l\,\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{e}$$

$$+ \sum_{a=\alpha+1}^{a=\alpha+r} \int_0^1 \frac{u\,(1-u)\,du}{4a^2 - u^2}.$$

Unter den Summanden der rechten Seite ist bloss der erste bei unendlich wachsendem r unendlich; denn die unendliche Reihe Σ convergirt nach § 52 (4), weil das Product

$$r^{1+p}\cdot\int_0^1 \frac{u\,(1-u)\,du}{4(\alpha+r)^2 - u^2} = r^{1+p}\cdot\frac{\theta\,(1-\theta)}{4(\alpha+r)^2 - \theta^2},\quad (0 < \theta < 1),$$

für positive Werthe von p endlich bleibt. — Z. B. besitzt es für $0 < p < 1$ den Grenzwerth 0, für $p = 1$ den Grenzwerth $\frac{1}{4}\,\theta\,(1-\theta)$.

Daher ist der Grenzwerth dessen, was auf der rechten Seite zum ersten Summanden noch hinzukommt, eine endliche Function von α allein. Bezeichnet man dieselbe mit $l\,f(\alpha)$ und beachtet, dass

$$\lim_{r=\infty}\cdot\left(1 + \frac{m}{r}\right)^{r+n} = \lim_{r=\infty}\cdot\left(1 + \frac{m}{r}\right)^{r}\cdot\lim_{r=\infty}\cdot\left(1 + \frac{m}{r}\right)^{n} = e^m$$

ist, so erhält man den

Lehrsatz II.

Für jedes von r unabhängige, den Werth $\left(-\frac{1}{2}\right)$ übersteigende α ist, wenn

(5) $$\varpi_r = (\alpha + 1)\,(\alpha + 2)\,(\alpha + 3)\cdots(\alpha + r)$$

bedeutet:

(6) $$\lim_{r=\infty}\cdot\left\{\varpi_r : \left(\frac{\alpha + r + \frac{1}{2}}{e}\right)^{\alpha + r + \frac{1}{2}}\right\} = f(\alpha),$$

$$(7)\qquad \lim_{r=\infty}\cdot\left\{\varpi_r:\left(\frac{r}{e}\right)^{\alpha+r+\frac{1}{2}}\right\}=e^{\alpha+\frac{1}{2}}\cdot f(\alpha);$$

wo $f(\alpha)$ eine positive, endliche und nicht verschwindende Function von α bedeutet.[1])

Übrigens gelten die Gleichungen (6) und (7) auch für jedes negative α, nur dass $f(\alpha)$ dann auch negativ sein kann und für jedes ganze negative α verschwindet.

Was die zuletzt ausgesprochene Behauptung betrifft, welche in der vorangehenden Entwickelung noch nicht vollständig erhärtet ist, so leuchtet deren Rechtsbeständigkeit sofort ein, wenn man bedenkt, dass

$$\varpi_r=(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)\cdot\{(\alpha+k)+1\}\cdot\{(a+k)+2\}\cdots$$
$$\cdots\{(a+k)+(r-k)\}$$

geschrieben werden kann, und dass daher nach (6):

$$\lim_{r=\infty}\cdot\left\{\varpi_r:\left[\frac{(\alpha+k)+(r-k)+\frac{1}{2}}{e}\right]^{(\alpha+k)+(r-k)+\frac{1}{2}}\right\}$$
$$=(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)\cdot f(\alpha+k)$$

[1]) Zur Bestimmung von $f(\alpha)$ hat sich oben zunächst ergeben:

$$l f(\alpha)=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) l\frac{e}{\alpha+\frac{1}{2}}+\sum_{a=\alpha+1}^{a=\infty}\int_0^1\frac{u(1-u)\,du}{4a^2-u^2}.$$

Auf eine tiefer greifende Discussion von $f(\alpha)$ einzugehn, ist hier nicht der Ort. Es mag aber noch erwähnt werden, dass sich durch die Zerlegung $u(1-u)=u-u^2$ ergiebt:

$$f(\alpha)=\left(\frac{e}{\alpha+\frac{1}{2}}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\cdot e^{-\sum_{a=\alpha+1}^{a=\infty}\int_0^1\frac{u^2\,du}{4a^2-u^2}}\cdot\sqrt{\prod_{a=\alpha+1}^{a=\infty}\frac{2a\cdot 2a}{(2a-1)(2a+1)}},$$

wo der mittlere Factor zwischen 1 und $e^{-\frac{1}{2(2\alpha+1)}}$ liegt.

ist, sobald man k gross genug annimmt, um $\alpha+k>-\frac{1}{2}$ zu machen. Links hebt sich aber die Vergrösserung von α um k gegen die Verminderung von r um k auf.

Beispiele.

I. In § 39, (15) ist

$$(-1)^r\cdot\binom{n}{r}=(-1)^k\cdot\binom{n}{k}\cdot\left(1-\frac{n+1}{k+1}\right)\left(1-\frac{n+1}{k+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n+1}{r}\right)$$

dargestellt. Setzt man aber in der Formel (2) dieses § $n=0$, $\mu=0$, $c=1$, $u_r=\left(1-\frac{n+1}{r}\right)$, so ergiebt sich:

$$\lambda(r)=\left(1-\frac{n+1}{r}\right)^r,\quad \lim_{r=\infty}\cdot\lambda(r)=e^{-(n+1)};$$

und aus der Formel (3):

$$\lim\cdot\left\{\varpi_r:\left(1-\frac{n+1}{r}\right)^{r\lambda r}\right\}=C,$$

$$\lim\cdot\left\{\varpi_r\cdot r^{n+1}\right\}=C,$$

wo C eine von Null verschiedene positive Zahl bedeutet.

Daher ist

$$\lim_{r=\infty}\cdot(-1)^r\binom{n}{r}\cdot r^{n+1}=C',$$

wo die Constante C′ einen (von n abhängenden) positiven oder negativen, völlig bestimmten Werth hat, welcher nur dann $=0$ ist, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet. — Dies stimmt mit dem in § 39 gefundenen Resultat überein, dass $\binom{n}{r}$ unendlich gross oder klein ist, je nachdem $(n+1)<0$ oder >0 ist. Unser jetziges Resultat geht aber weiter, da es anzeigt, dass

$$(-1)^r\cdot\binom{n}{r}\text{ äquivalent mit }\frac{C'}{r^{n+1}}$$

sei.

II. Für das Product

$$\varpi_r = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r = r!$$

ergeben sich aus (6) und (7) die Ausdrücke:

$$\lim \cdot \left\{ r! : \left(\frac{r + \frac{1}{2}}{e} \right)^{r+\frac{1}{2}} \right\} = f(0),$$

$$\lim \cdot \left\{ r! : \left(\frac{r}{e} \right)^{r+\frac{1}{2}} \right\} = \sqrt{e} \cdot f(0);$$

so dass also

$$r! \text{ äquivalent mit } \left(\frac{r + \frac{1}{2}}{e} \right)^{r+\frac{1}{2}} \cdot f(0) \text{ und mit } \left(\frac{r}{e} \right)^r \cdot \sqrt{r} \cdot f(0)$$

ist.

III. Der Bruch $\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r}$ ist äquivalent mit:

$$\frac{f(\alpha)}{f(0)} \cdot r^\alpha.$$

— Vergl. I.

§ 59.

Differentiation und Integration der Reihensummen.

Differentiirt man nach x eine Gleichung

$$(1) \qquad f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{r-1} + \varphi_r,$$

in welcher $f(x)$ eine Function von x, dagegen die u_r und φ_r Functionen von x und einem Parameter r sind, so erhält man:

$$(2) \qquad f'(x) = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_{r-1}}{dx} + \frac{d\varphi_r}{dx},$$

falls — was wir voraussetzen — sämmtliche Functionen differentiirbar sind.

Ferner besitze φ_r die Eigenschaft, für alle innerhalb eines gewissen Intervalls liegenden Werthe von x bei unendlich grossem r zu verschwinden, so dass in diesem Intervalle $f(x)$ sich als Summe der unendlichen Reihe

$$(3)\qquad f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

darstellt.[1])

Dann lässt sich nicht ohne Weiteres behaupten, dass auch

$$(4)\qquad f'(x) = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \frac{du_3}{dx} + \cdots$$

sein müsse, weil die Derivirte des Restes φ_r alle denkbaren Werthe anzunehmen im Stande ist.

Um sich von der Richtigkeit dieser Behauptung ohne Rechnung zu überzeugen, stelle man sich x, r, φ_r als die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte einer Fläche vor ($r = y$, $\varphi_r = z$ in der gebräuchlichen Bezeichnung). Diese Fläche schmiegt sich unserer Voraussetzung nach über einem Streifen der (x, r)-Ebene, welcher mit der r-Axe parallel verläuft, desto enger an diese Ebene an, je weiter man sich in ihm von der x-Axe aus entfernt; denn ihr Abstand φ_r nähert sich hierbei der Grenze Null. Das

---

[1]) Hört für irgend welche Werthe von x die Gleichung $\lim \cdot \varphi_r = 0$ zu gelten auf, welche für andere Werthe von x Bestand hatte, so schwindet damit selbstverständlich nur die Identität der Function $f(x)$ mit der Reihensumme der u in (3). Damit ist aber nicht ausgeschlossen, dass die letztere dennoch convergire, für sich eine stetige Function von x sei, u. dgl. mehr. Denn es liegt in den obigen Voraussetzungen durchaus nichts, was verhindert, dass $\lim \cdot \varphi_r$ innerhalb eines gewissen Bereichs der x verschwindet und dann andere Werthe annimmt.

Wäre beispielsweise $\varphi_r = (-1)^r \binom{x-1}{r}$, so ist $\lim \cdot \varphi_r = 0$ für $x > 0$, während $\lim \cdot \varphi_r = +1$ für $x = 0$ wird (§ 39). Aus der für jedes x und r geltenden Gleichung

$$f(x) = [f(x) - 1] + \binom{x}{1} - \binom{x}{2} + \binom{x}{3} - \cdots - (-1)^r \cdot \binom{x}{r} + (-1)^r \binom{x-1}{r}$$

folgt daher:

$$f(x) = [f(x) - 1] + \binom{x}{1} - \binom{x}{2} + \binom{x}{3} - \cdots,$$

so lange $x > 0$ ist, während die rechte Seite dieser letzten Gleichung für $x = 0$ in $[f(x) - 1]$ übergeht und für $x < 0$ unendlich ist, ohne dass die linke Seite $f(x)$ diese Sprünge mitmacht.

schliesst aber u. a. nicht aus, dass in der fraglichen Fläche nach derselben Richtung hin Falten verlaufen, deren Böschungswinkel senkrecht zur r-Axe über der durch ein constantes x gegebenen Graden beliebig constant von Null verschieden ist oder zwischen beliebigen constanten Werthen schwankt oder sich einem von Null verschiedenen Grenzwerthe nähert: $\frac{d\varphi_r}{dx}$ aber misst diesen Winkel (nach § 4), kann also bei unendlich wachsendem r alle denkbaren endlichen Werthe annehmen, so wie auch bei zunehmender Steilheit der Böschung unendlich wachsen, u. s. w.

Damit man also urtheilen könne, dass aus der Gleichung (3) die Gleichung (4) folge, muss man sich auf irgend eine Weise von der Gültigkeit der Relation

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{d\varphi_r}{dx} = 0$$

überzeugen.

Nun kennt man aber, wenn $f(x)$ durch die Reihe (3) gegeben ist, den Rest φ_r meistens nicht in einer analysirbaren Form. Dann bleibt nichts übrig, als auf die in § 34 entwickelten Kriterien für die Integrale mit unendlichen Grenzen zurück zu greifen. Das kann ohne weiteres geschehen, weil die Gleichung (3) mit der Gleichung

$$f(x) = \int_0^\infty \psi(x, y)\, dx$$

identisch ist, falls man unter $\psi(x, y)$ eine Function versteht, welche von jeder ganzen Zahl $y = r$ bis zur nächsten $y = r + 1$ den in Bezug auf y constanten Werth u_r bewahrt und dann auf u_{r+1} überspringt.

Es ist an jener Stelle gezeigt worden, dass

$$f'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}\, dy = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots$$

hervorgeht, wenn der Werth des Integrals

$$(5) \qquad \int_0^\infty \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} = \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \cdots$$

endlich ist und es bei beliebig kleinen Variationen von x nach der Differentiationsrichtung hin bleibt.

Dasselbe ergiebt sich auch durch Anwendung des Taylorschen Satzes auf die einzelnen Glieder der Gleichung (3).

Schreibt man nämlich der grösseren Bequemlichkeit wegen

$$u_r = \psi(x,r), \quad \frac{du_r}{dx} = \psi'(x,r), \quad \frac{d^2u_r}{dx^2} = \psi''(x,r),$$

so ist nach § 36, (2) und § 38, (3):

$$\psi(x+h,r) - \psi(x,r) = h \cdot \psi'(x,r) + \frac{1}{2} h^2 \int_0^1 \psi''(x+h-h\sqrt{w},r)\,dw;$$

jedoch nur unter der ausdrücklichen Bedingung, dass die unter dem Integralzeichen stehende Derivirte von ψ zwischen $w=0$ und $w=1$ endliche Werthe habe.

Gilt nun die Gleichung (3) nicht nur für x, sondern auch für $(x+h)$, ist also

$$f(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \psi(x,r), \quad f(x+h) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \psi(x+h,r),$$

so folgt aus § 55, L. I und dem Obigen, dass

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \left[\psi(x+h,r) - \psi(x,r)\right]$$

$$= h \cdot \sum_{r=0}^{r=\infty} \psi'(x,r) + \frac{1}{2} h^2 \cdot \sum_{r=0}^{r=\infty} \int_0^1 \psi''(x+h-h\sqrt{w},r)\,dw;$$

$$(6) \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \psi'(x,r) + \frac{1}{2} h \cdot \sum_{r=0}^{r=\infty} \int_0^1 \psi''(x+h-h\sqrt{w},r)\,dw$$

gesetzt werden darf, falls in diesen Ausdrücken wenigstens eine von den unendlichen Reihen convergirt.

Die linke Seite dieser Gleichung (6) nähert sich, wenn h unendlich abnimmt, dem Grenzwerthe $f'(x)$. Ob aber die rechte Seite hierbei in $\sum_{r=0}^{r=\infty} \psi'(x,r)$ übergeht, steht selbst dann noch nicht fest, wenn die durch dieses Zeichen ausgedrückte unendliche Reihe convergirt, sondern erst dann, wenn man nachweisen kann, dass

$$(7)\qquad \lim_{h=0} \cdot h \sum_{r=0}^{r=\infty} \int_0^1 \psi''(x+h-h\sqrt{w}, r)\, dw$$

$$= \lim_{h=0} \cdot \sum_{r=0}^{r=\infty} h \int_0^1 \psi''(x+h-h\sqrt{w}, r)\, dw = 0$$

ist. — In der ersten Schreibweise zeigt dies Übereinstimmung mit (5), weil das Integral $\int_0^1 \psi''(x+h-h\sqrt{w}, r)\, dw$ nach § 19 ein Mittelwerth zwischen denjenigen ist, welche $\psi''(x, r)$ beim Übergange von x in $(x+h)$ annimmt; in der zweiten Schreibweise mit dem Lehrsatze III des § 54, nach welchem man aus dem Verschwinden der einzelnen Glieder einer convergenten Reihe nicht unbedingt auf das Verschwinden der Reihensumme schliessen kann.

Um unser Kriterium sofort auf ein Beispiel anzuwenden, betrachten wir die nach § 42, (5) für $-1 < x \leqq +1$ geltende Gleichung

$$l(1+x) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}x\right)x^1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x\right)x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{1}{2r+1} - \frac{1}{2r+2}x\right)x^{2r+1} + \cdots,$$

in welcher

$$f(x) = l(1+x), \quad u_r = \psi(x, r) = \left(\frac{1}{2r+1} - \frac{1}{2r+2}x\right)x^{2r+1}$$

ist. Sie liefert durch Differentiation:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \; \psi'(x, r) = (1-x)x^{2r}, \; \psi''(x, r) = \big(2r - (2r+1)x\big)x^{2r-1}.$$

Der Ausdruck (5) ist wegen der Relation

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{\psi''(x, r+1)}{\psi''(x, r)} = \lim_{r=\infty} \cdot \frac{2r+2-(2r+3)x}{2r-(2r+1)x} \cdot x^2 = x^2$$

nach § 53, L. II eine für $\text{abs} \cdot x < 1$ convergirende Reihe. Daher gilt nach dem Obigen die Gleichung (4):

$$(8)\; \frac{1}{1+x} = (1-x) \cdot x^0 + (1-x) \cdot x^2 + (1-x)x^4 + \cdots + (1-x) \cdot x^{2r} + \cdots$$

für $-1 < x < +1$. Für $x = 1$ aber gilt sie trotz der Convergenz der rechten Seite offenbar nicht mehr, da sonst $\frac{1}{2} = 0$ sein müsste,[1]) oder — wenn wir von diesem Substitutionsresultat absehn — da der Ausdruck (5) wegen des Werthes $\psi''(1, r) = -1$ mit unendlich wachsender Gliederzahl unendlich wächst.

Zuweilen hat die Untersuchung des Ausdruckes (5) auf die Endlichkeit seines Werthes ihre eigenthümlichen Schwierigkeiten, während auf irgend welche Weise bereits erkannt ist, dass die Gleichung (4) für alle Werthe von x gilt, welche dem vorgelegten Werthe z dieses Symbols entweder in aufsteigender oder in absteigender Folge beliebig nahe kommen, und dass die Reihensumme auf der rechten Seite von (4), welche durch F(x) bezeichnet werden mag, auch für $x = z$ convergirt.

Sind dann die beiden in (4) verglichenen Functionen $f'(x)$ und $F(x)$ in das Identitätsgebiet derselben hinein an der Stelle $x = z$ stetig — oder anders gesagt: ist dann

$$\lim_{x=z} \cdot f'(x) = f'(z), \quad \lim_{x=z} \cdot F(x) = F(z),$$

so muss auch $f'(z) = F(z)$ sein, weil sonst der Widerspruch nicht getilgt wird, dass die Differenz

$$\{f'(x) - F(x)\}$$

ohne Verlust ihrer Stetigkeit von 0 auf $\{f'(z) - F(z)\}$ springe.

Legt man besondere Formen der Glieder u_r zu Grunde, so kann man selbstverständlich weitergehende Folgerungen ziehn. Diese werden von den Eigenschaften der Functionen u_r abhängen.

Vor allen andern wichtig sind die Potenzreihen:

$$(9) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_r x^r + \cdots$$

---

[1]) Dieses Beispiel ist grade seiner grossen Einfachheit wegen vorzüglich geeignet, die Verschiedenheit der Begriffe des Grenzwerthes $\lim_{x=z} \cdot F(x)$ und des Substitutionswerthes $F(z)$ zu beleuchten: Verstehen wir in (8) unter $F(x)$ die Summe der rechts stehenden Reihe, so ist $\lim_{x=1} \cdot F(x) = \frac{1}{2}$, $F(1) = 0$. — Die Function $F(x)$, welche für $-1 < x < +1$ mit $f(x) = \frac{1}{1+x}$ übereinstimmt, verliert eben bei $x = +1$ ihre Stetigkeit, während dies $f(x)$ nicht thut.

Da hier

$$u_r = \psi(x, r) = a_r x^r,$$

$$\frac{d u_r}{dx} = \psi'(x, r) = r a_r x^{r-1}, \quad \frac{d^2 u_r}{dx^2} = \psi''(x, r) = r(r-1) a_r x^{r-2}$$

ist, und unter der Voraussetzung gleicher Vorzeichen von x und x_1

$$(10) \quad \frac{\psi''(x,r)}{\psi(x_1,r)} = \frac{r(r-1)x^{r-2}}{x_1^{\,r}} = \frac{1}{x^2} \cdot r(r-1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^r < \frac{1}{x^2} \cdot r^2 e^{-r l \frac{x_1}{x}}$$

hervorgeht, so erkennt man mit Hülfe von § 45, (16) sofort, dass für $\text{abs} \cdot x < \text{abs} \cdot x_1$

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{\psi''(x, r)}{\psi(x_1, r)} = 0$$

wird, weshalb die Reihe (5), nämlich

$$2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 x^2 + \cdots,$$

stärker convergirt, als es die Reihe (9) für ein solches x_1 thut, welches noch unbedingte Convergenz von (9) bewirkt.

Versteht man mithin unter z den grössten Werth von x, für welchen die Potenzreihe (9) noch convergirt, oder den kleinsten, für welchen sie nicht mehr convergirt, so folgt aus ihr stets

$$(11) \quad f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x^1 + 3 \cdot a_3 x^2 + \cdots + r \cdot a_r x^{r-1} + \cdots$$

für $\text{abs} \cdot x < \text{abs} \cdot z$, weil die Reihe (9) für jedes zwischen x und z angenommene x_1 unbedingt convergirt (§ 54, L. IV).

Ist aber $x = z$, und ist $f(z)$ noch convergent, so bleibt vorläufig die Gültigkeit der Gleichung (11) fraglich, weil sich dann der Ausdruck (10) nicht mehr zum Kriterium eignet.

Jedoch lässt es sich leicht nachweisen, dass die Gleichung (11) jedenfalls auch dann noch Gültigkeit besitzt, wenn ihre rechte Seite entweder unbedingt oder nur deshalb convergirt, weil die Vorzeichen der Glieder alterniren und die absoluten Werthe unausgesetzt und unendlich abnehmen.

Im ersteren Falle nämlich ist nach § 55, wenn wir die Reihe auf der rechten Seite von (11) durch F(x) bezeichnen:

$$F(z) - F(z-h) = 1 \cdot a_1 \left[z^0 - (z-h)^0\right]$$
$$+ 2 \cdot a_2 \left[z^1 - (z-h)^1\right] + 3 \cdot a_3 \left[z^2 - (z-h)^2\right] + \cdots$$

für jedes beliebig kleine h, welches mit z dasselbe Vorzeichen besitzt; und es convergirt die Reihe rechter Hand unbedingt, weil

$$\text{abs} \cdot \left[z^r - (z-h)^r\right] < \text{abs} \cdot z^r$$

ist, so dass die Differenz $\{F(z) - F(z-h)\}$ nach § 54, L. III sich zugleich mit h dem Grenzwerthe Null nähert; was nach dem Obigen genügt.

Um die Stetigkeit im zweiten Falle nachzuweisen, wollen wir der bequemeren Behandlungsweise wegen

$$r a_r z^{r-1} = (-1)^{r-1} \alpha_{r-1}, \quad \frac{x}{z} = u,$$
$$F(x) = \Phi(u) = \alpha_0 - \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 - \alpha_3 u^3 + \cdots$$

schreiben. Dann ist

$$\Phi(1) - \Phi(u) = -\alpha_1 (1-u^1) + \alpha_2 (1-u^2) - \alpha_3 (1-u^3) + \cdots$$

für jedes dem Werthe 1 von 0 her beliebig nahe kommende u, d. i. für jedes dem Werthe z von 0 her beliebig nahe kommende x.

Hieraus ergiebt sich, weil $u < 1$ ist:

$$\lim_{r=\infty} \cdot \alpha_r (1-u^r) = \lim_{r=\infty} \cdot \alpha_r = 0;$$

und es muss mithin, weil wir

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots$$

vorausgesetzt haben, von einer gewissen Nummer r ab auch

$$\alpha_r (1-u^r) > \alpha_{r+1} (1-u^{r+1}) > \alpha_{r+2} (1-u^{r+2}) > \cdots$$

sein; denn sonst müsste die Reihe $\Phi(1) - \Phi(u)$ divergiren.

Beachtet man ferner, dass wegen der nachgewiesenen Convergenz der Rest seinem absoluten Betrage nach zwischen

$$\alpha_r (1-u^r) \text{ und } \alpha_r (1-u^r) - \alpha_{r+1} (1-u^{r+1})$$

liegt, wenn man beim r^{ten} Gliede abbricht, und dass beide begrenzende Werthe sich mit unendlich wachsendem r der Null nähern, so erhellt es, dass

$$\lim_{u=1} \cdot \left\{ \Phi(1) - \Phi(u) \right\} = 0$$

ist. Damit ist die Stetigkeit von F(x) bei der Annäherung an F(z) erhärtet, und daher auch die Gültigkeit der Gleichung (11) für $x = z$.

Wir resumiren:

Lehrsatz I.

Gilt die Gleichung

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \tag{12}$$

innerhalb eines gewissen Spielraums für die Werthe von x, so folgt aus ihr die Gleichung

$$f'(x) = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \frac{du_3}{dx} + \cdots \tag{13}$$

nur dann, wenn auch die Derivirte des Restes als unendlich klein bei unendlich wachsender Gliederzahl erkannt ist, oder wenn die Summe der Derivirten zweiter Ordnung

$$\frac{d^2u_0}{dx^2} + \frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{d^2u_2}{dx^2} + \frac{du_3}{dx^2} + \cdots \tag{14}$$

nicht nur für das fragliche x endlich ist,[1] sondern auch endlich bleibt, sobald x nach der Differentiationsrichtung hin beliebig wenig variirt wird.

Gilt die Gleichung (13) für alle Werthe von x, welche sich einer Zahl z von einer Seite her beliebig nähern, und ist hierbei, indem wir unter F(x) die rechte Seite von (13) verstehn, gleichzeitig

$$\lim_{x=z} \cdot f'(x) = f'(z), \quad \lim_{x=z} \cdot F(x) = F(z), \tag{15}$$

so gilt die Gleichung (13) auch noch für $x = z$, während sie ihre Gültigkeit verliert, sobald in (15) einer der Substitutionswerthe von dem entsprechenden Grenzwerthe abweicht.

Wird eine Function $f(x)$ für $\text{abs} \cdot x < \text{abs} \cdot z$ durch eine Potenzreihe ausgedrückt:

[1]) convergirt oder oscillirt.

(16) $$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

so ist jederzeit ebenfalls für $abs \cdot x < abs \cdot z$ die Derivirte:

(17) $$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x^1 + 3 a_3 x^2 + \cdots;$$

und diese Gleichung gilt auch noch für $abs \cdot x = abs \cdot z$, sobald ihre rechte Seite **unbedingt** convergirt, so wie für $x = z$, sobald sie deshalb convergirt, weil die Vorzeichen der Glieder alterniren und die absoluten Werthe eine der Null zustrebende Scala bilden.[1])

Zusatz.

Gewinnt man durch zwei verschiedene Entwickelungen einer Function in eine Potenzreihe die Gleichung

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$= b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots,$$

so sind die entsprechenden Coefficienten beider Reihen gleich. — Denn da man Potenzreihen gliedweise differentiiren darf, so ist

$$f(0) = a_0 = b_0, \quad \frac{f'(0)}{1!} = a_1 = b_1, \quad \frac{f''(0)}{2!} = a_2 = b_2, \quad \text{u. s. w.}$$

Wir wollen uns jetzt der Integration der unendlichen Reihen zuwenden, indem wir dabei voraussetzen, dass die Reihe (3) von $x = z_0$ bis $x = z$ convergire, und dass die dort mit u benannten

---

[1]) Man beachte, dass dies nicht mit derjenigen Erscheinung im Widerspruch steht, welche oben an der Entwickelung von $l(1 + x)$ illustrirt ist. Denn jene Reihe hörte dadurch, dass man je zwei Glieder der $l(1 + x)$ darstellenden Potenzreihe zusammennahm, auf, eine Potenzreihe zu sein; desgl. die Reihe (8) für die Derivirte $\frac{1}{1+x}$. Stellt man aber die Potenzreihe durch Zerlegung der einzelnen Glieder in zwei wieder her, schreibt also

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots,$$

so hört — im Gegensatze zur Form (8) — die Convergenz für $x = 1$ auf, weil $\lim\limits_{r=\infty} \cdot x^r = 1$ und nicht $= 0$ wird.

Glieder zwischen diesen Grenzen sämmtlich integrirbar seien. Dann folgt aus (1):

$$\int_{z_0}^{z} f(x)\,dx = \left[\int_{z_0}^{z} u_0\,dx + \int_{z_0}^{z} u_1\,dx + \cdots + \int_{z_0}^{z} u_{r-1}\,dx\right] + \int_{z_0}^{z} \varphi_r\,dx,$$

sobald man von einem der beiden Integrale $\int_{z_0}^{z} f(x)\,dx$, $\int_{z_0}^{z} \varphi_r\,dx$ weiss, dass es einen bestimmten Werth hat.

Ist von der Function φ_r — dem Reste der unendlichen Reihe (3) — bekannt, dass in dem Intervall (z_0, z) ihr absoluter Werth $< \Phi_r$ ist, so kann das Integral $\int_{z_0}^{z} \varphi_r\,dx$, falls es einen Sinn hat, seinem Begriffe nach den Werth von $(z - z_0) \cdot \Phi_r$ nicht übersteigen und besitzt demnach ebenfalls einen endlichen Werth. Derselbe nähert sich bei unendlich wachsendem r dem Grenzwerthe 0, weil dies Φ_r thut.

Daher ist

$$(18) \quad \int_{z_0}^{z} f(x)\,dx = \int_{z_0}^{z} u_0\,dx + \int_{z_0}^{z} u_1\,dx + \int_{z_0}^{z} u_2\,dx + \int_{z_0}^{z} u_3\,dx + \cdots$$

wenn die Reihe (3) von $x = z_0$ bis $x = z$ convergirt, und das Integral $\int_{z_0}^{z} \varphi_r\,dx$ einen Sinn hat. Das Letztere lässt sich aus der blossen Convergenz der Reihe (3) nicht schliessen, weil man aus dieser Eigenschaft allein nicht abnehmen kann, ob sich φ_r nicht unzählbar oft sprungweise ändert oder auch bei stetiger Änderung unzählbar oft wächst und abnimmt, u. dgl. mehr.

Dann hilft in den häufigst vorkommenden Fällen wieder der § 34 aus. Denn setzt man, wie oben bei der Differentiation,

$$u = \psi(x, y), \quad f(x) = \int_{0}^{\infty} \psi(x, y)\,dy,$$

so ist in § 34 ausgemacht, dass die Gleichung

$$\int_{z_0}^{z} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} dy \int_{z_0}^{z} \psi(x, y)\,dx$$

— d. i. die Gleichung (18) — jedenfalls zu Recht besteht, wenn das Integral

(19) $$\int_0^\infty \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} dy = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots$$

einen endlichen Werth besitzt, so lange x einen Werth des Intervalls (z_0, z) bedeutet.

Ist z ein solcher Specialwerth von x, für welchen die Gültigkeit der Gleichung (18) noch nicht feststeht, während sie für alle aus dem Intervall (z_0, z) heraus dem z beliebig nahe kommende x erwiesen ist, so tritt jedenfalls dann die Berechtigung, (18) auch für $x = z$ zu verwenden, ein, wenn beide Seiten dieser Gleichung beim Übergange von x in z stetig bleiben. (Vergl. den analogen Schluss bei der Differentiation.) Die blosse Convergenz der rechten Seite von (18) genügt nicht.

Um dies durch ein Beispiel zu beleuchten, so ist nach dem binomischen Satze:

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + (2-3x) \cdot x^1 + (4-5x) \cdot x^3 + (6-7x) \cdot x^5 + \cdots$$

für $-1 < x < +1$; und hieraus folgt nach dem Obigen, weil die Reihe (19) sich in der für $-1 < x < +1$ convergenten Form

$$(2 \cdot 1 - 3 \cdot 2x) \cdot x^0 + (4 \cdot 3 - 5 \cdot 4x) \cdot x^2 + (6 \cdot 5 - 7 \cdot 6x) \cdot x^4 + \cdots$$

darstellt, durch Anwendung von (18) — falls $z_0 = 0$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{1+z} = (1-z) \cdot z^0 + (1-z) \cdot z^2 + (1-z) \cdot z^4 + (1-z) \cdot z^6 + \cdots$$

für $-1 < z < +1$. Jedoch gilt diese — mit (8) übereinstimmende — Gleichung, wie wir früher gesehn haben, nicht mehr für $z = 1$, obgleich die linke Seite stetig und die rechte Seite convergent bleibt. Es fehlt eben rechts die Stetigkeit.

In welchem Umfange die Stetigkeit bei Potenzreihen verbürgt werden kann, ist schon früher in diesem § besprochen. Unter Benutzung des dort gewonnenen Resultats ergiebt sich der

Lehrsatz II.

Ist in dem von $x = z_0$ bis $x = z$ reichenden Intervall

(20) $$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$

so folgt aus dieser Gleichung, dass

$$(21)\quad \int_{z_0}^{z} f(x)dx = \int_{z_0}^{z} u_0\, dx + \int_{z_0}^{z} u_1\, dx + \int_{z_0}^{z} u_2\, dx + \int_{z_0}^{z} u_3\, dx + \cdots$$

ist, falls die Summe

$$(22)\quad \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \frac{du_3}{dx} + \cdots$$

für alle zu jenem Intervall gehörenden Werthe des x endlich ist.[1])

Ändern sich beide Seiten der Gleichung (21) bei der Annäherung des z von z_0 aus an einen Specialwerth ζ stetig einem Grenzwerthe, welcher auch ihr Substitutionswerth für $z = \zeta$ ist, so gilt die Gleichung (21) auch noch für $z = \zeta$, mag die Gleichung (20) für $x = \zeta$ zutreffen, oder nicht.

Aus der für $x = z$ convergirenden Potenzreihe

$$(23)\quad f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

folgt stets:

$$(24)\quad \int_0^z f(x)\,dx = a_0 z^1 + \frac{1}{2} a_1 z^2 + \frac{1}{3} a_2 z^3 + \frac{1}{4} a_3 z^4 + \cdots;$$

und diese letzte Gleichung gilt, falls sie ursprünglich nur für $\text{abs}\cdot z < \text{abs}\cdot \zeta$ erwiesen sein sollte, auch noch für $z = \zeta$, sobald

$$\lim_{z=\zeta} \cdot \int_0^z f(x)\,dx = \int_0^\zeta f(x)\,dx$$

ist, und die Reihe rechter Hand für $z = \zeta$ entweder unbedingt convergirt oder wegen alternirender Vorzeichen und unausgesetzt und unendlich abnehmender Werthe der Glieder convergent ist.

Als Beispiel hinsichtlich der Potenzreihen diene die für $-1 < x < +1$ geltende Gleichung:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

---

[1]) convergirt oder oscillirt.

Integrirt man zwischen $x=0$ und $x=z$, so erhält man für $-1<z<+1$:

$$l(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{5}z^5-\cdots$$

Diese Gleichung gilt aber auch noch für $z=+1$, weil

$$\lim_{z=1} \cdot l(1+z)=l2$$

ist, und die Reihe rechter Hand für $z=+1$ wegen der alternirenden Vorzeichen und der unausgesetzt und unendlich abnehmenden Werthe der Glieder convergirt.

Um endlich noch ein anderes Beispiel zu behandeln, welches nicht wieder, wie das obige, auf bereits bekannte Functionen führt, so stellen wir die Aufgabe, die Function

$$F(z)=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt[n]{1+x^n}}$$

in eine Potenzreihe zu entwickeln.

Für $-1<x\overline{\gtrless}+1$ ist nach dem binomischen Satz:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}}=1-\frac{1}{n}x^n+\frac{n+1}{n\cdot 2n}x^{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{n\cdot 2n\cdot 3n}x^{3n}$$
$$+\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{n\cdot 2n\cdot 3n\cdot 4n}x^{4n}-\cdots$$

Daher ergiebt sich aus (24) für $-1<z\overline{\gtrless}+1$:

$$F(z)=z-\frac{1}{n}\cdot\frac{z^{n+1}}{n+1}+\frac{n+1}{n\cdot 2n}\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1}-\frac{(n+1)(2n+1)}{n\cdot 2n\cdot 3n}\cdot\frac{z^{3n+1}}{3n+1}+\cdots$$

Diese Gleichung gilt aber unter allen Umständen auch noch für $z=-1$, obgleich die Reihenentwickelung des Differentials bei einem ungraden n den Werth $x=-1$ ausschliesst. Denn schreibt man das allgemeine Glied des Ausdrucks für $F(z)$ in der Form $\binom{-\frac{1}{n}}{r}\cdot\frac{z^{rn+1}}{rn+1}$ und beachtet, dass nach § 58 Beisp. I die Grösse $C\cdot r^{\frac{1}{n}-1}$ ein Äquivalent des absoluten Werthes des Binomialcoefficienten $\binom{-\frac{1}{n}}{r}$ ist, so erkennt man, dass der absolute Werth des allgemeinen

Gliedes der Reihenentwickelung von $F(+1)$ äquivalent mit der Grösse $\frac{C r^{\frac{1}{n}-1}}{rn+1}$, also auch mit dem noch einfacheren Ausdrucke $\frac{C}{r^{2-\frac{1}{n}}}$ ist. Eine Reihe aber, welche den letzteren zum allgemeinen Gliede hat, convergirt nach § 52 unbedingt, folglich thut es auch unsere Reihe für $F(+1)$. Es handelt sich demnach nur noch darum, ob die Function $F(z)$ bei $z=-1$ auch dann stetig ist, falls n eine ungrade Zahl bedeutet. Sie ist es aber als Integral einer generell stetigen Function, dessen Werth $F(-1)$ einzig und allein durch den endlichen Werth von $\lim_{z=-1} . F(z)$ definirt wird; und dass ein solcher existirt, folgt aus § 50, weil nach der Substitution von $(-x)$ für x bei jedem zwischen 0 und $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ liegenden p

$$\lim_{x=1} \cdot \frac{(1-x)^{1-p}}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

$$= \lim_{x=1} \cdot \frac{(1-x)^{1-\frac{1}{n}-p}}{\sqrt[n]{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \lim_{x=1} \cdot (1-x)^{1-\frac{1}{n}-p} = 0$$

ist. Tritt x von der andern Seite an diese Stelle heran, so ergiebt sich übrigens für unser Integral dasselbe Resultat, weshalb es an der Stelle $z=-1$ stetig ist.

Soll endlich $F(z)$ für $\text{abs} \cdot z > 1$ bestimmt werden, so muss man von der Entwickelung

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}} = \frac{1}{x\sqrt[n]{1+\left(\frac{1}{x}\right)^n}}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} + \frac{n+1}{n \cdot 2n} \cdot \frac{1}{x^{2n+1}} - \frac{(n+1)(2n+1)}{n \cdot 2n \cdot 3n} \cdot \frac{1}{x^{3n+1}} + \cdots$$

ausgehn, darf dabei aber nicht zwischen 0 und z integriren, sondern muss Integrationsgrenzen wählen, welche ihrem absoluten Betrage nach $\overline{\gtrless} 1$ sind. Dadurch ergiebt sich u. a. für $z > 1$:

$$F(z)-F(1)$$

$$=lz+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{nz^{n}}-\frac{n+1}{n\cdot 2n}\cdot\frac{1}{2n\cdot z^{2n}}+\frac{(n+1)(2n+1)}{n\cdot 2n\cdot 3n}\cdot\frac{1}{3n\cdot z^{3n}}-\cdots$$

$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n\cdot 2n}\cdot\frac{1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{n\cdot 2n\cdot 3n}\cdot\frac{1}{3n}+\cdots;$$

und für $z<-1$ bei einem ungraden n:

$$F(z)-F(-1)$$

$$=l(-z)+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{nz^{n}}-\frac{(n+1)}{n\cdot 2n}\cdot\frac{1}{2n\cdot z^{2n}}+\frac{(n+1)(2n+1)}{n\cdot 2n\cdot 3n}\cdot\frac{1}{3n\cdot z^{3n}}-\cdots$$

$$+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n\cdot 2n}\cdot\frac{1}{2n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{n\cdot 2n\cdot 3n}\cdot\frac{1}{3n}+\cdots$$

— Die hier durch das letzte Beispiel illustrirte Methode, Integrale vermittelst unendlicher Reihen auszuwerthen, ist für die Integralrechnung von um so grösserer Wichtigkeit, je häufiger sich die Integrale bekannter Functionen der Darstellung durch geschlossene Ausdrücke vermittelst bekannter Functionen entziehn.

Capitel X.

Die complexen Zahlen und die aus ihrer Einführung unmittelbar resultirenden Functionen (Kreisfunctionen).

§ 60.

Definition der complexen Zahlen und Fundamentalsätze über das Rechnen mit ihnen.

Ihrer logischen Bedeutung nach sind die Zahlen Symbole für die Gliederung der Ganzen in Theile, indem sie weiter nichts anzeigen als die denkbaren Mannichfaltigkeiten einer solchen Gliederung ohne Rücksicht auf die besondere Beschaffenheit, durch welche ein Ganzes sich von einem andern Ganzen unterscheidet. — Sie haben es demnach eben so wenig mit der Folge, in welcher die Theile vorgestellt werden, zu thun, wie mit der Beschaffenheit der Theile, und sind mit der Relation der Begriffe „Ganzes“ und „Theil“ identisch.

Demnach sind nur die sogenannten absoluten ganzen Zahlen 1, 2, 3 ... wirkliche Zahlen.

An einem nach Willkür eintheilbaren Ganzen — d. i. an einem Ganzen, bei dessen Vorstellung man an jeder beliebigen Stelle eine Pause machen kann, ohne der Gesammtvorstellung dadurch Eintrag zu thun — hat man Dasjenige die Grösse oder das Quantum des Ganzen genannt, was durch keine Veränderung der Folge der Theile eine Einbusse an seiner Eigenthümlichkeit erleidet.

Quanten, welche als Theile von einander aufgefasst werden können, nennt man gleichartig oder von gleicher Qualität, solche, bei denen dies nicht angeht, ungleichartig oder von ungleicher Qualität.

Das Symbol dafür, dass ein Ding bei der betrachteten Qualität kein Quantum — z. B. eine Linie kein Flächenquantum — habe, ist die Null.

Die Null ist also keine Zahl, sondern ihr directes Gegentheil. Mit ihr hebt die Reihe derjenigen Symbole an, welche man, obgleich sie es nicht sind, Zahlen nennt, weil man sie in formaler Beziehung (d. i. in der arithmetischen Technik) so häufig in der Weise behandeln kann, als wären sie Zahlen, dass sich aus dieser Fiction ein praktischer Vortheil ergiebt.[1]) — Bekanntlich kommen sämmtliche Ausnahmen, welche die Null bietet, darauf zurück, dass die Null nur in besonderen Fällen Divisor sein darf.

Übrigens liegt jedem besondern Falle, in welchem man sich entschlossen hat, eine an sich sinnlose Zusammenstellung von Zeichen unter die Kategorie der Zahlen oder der Grössen[2]) aufzunehmen, die Entdeckung zu Grunde, dass diejenige **Definition**, durch welche das neue Symbol mit den wirklichen Zahlen oder Grössen verknüpft wird, erstens dazu geeignet ist, die neuen Symbole nach den für wirkliche Zahlen oder Grössen geltenden Gesetzen zu transformiren: mit völliger Sicherung eines zuverlässigen Schlusses auf die Beziehungen wirklicher Zahlen oder Grössen zu einander am Ende der Transformation; und zweitens — damit die Einführung des neuen Symbols keine unnöthige Spielerei sei — dass sie ein wirksames Mittel darbietet, um arithmetische Sätze, welche nur unter Einschränkungen gelten, vorläufig auch in ihren Ausnahmefällen als gültig zu benutzen und eine sichere Deutung des Endresultates in allen Fällen aus diesem letzteren allein an die Hand zu geben.

Die Reception neuer Symbole unter die Zahlen oder die Grössen verfolgt also ohne Ausnahme den Zweck, einer sonst unvermeidlichen Zersplitterung der Rechnung in eine nicht selten unübersehbare und jedenfalls ermüdende Anzahl von parallelen

---

[1]) Diesen Vortheil erkannt zu haben, ist ein Verdienst der Inder.

[2]) Die Arithmetik ist die Lehre von denjenigen Eigenschaften, welche alle Grössen gemein haben, in so fern sie sich zur zahlenmässigen Behandlung eignen, und nicht die Lehre von den Zahlen ohne Rücksicht auf den Grössenbegriff. Die letztere nennt man Zahlentheorie. Differential- und Integralrechnung sind Theile der Arithmetik oder (wie man es häufig unter dem Schein einer logisch nicht vorhandenen Scheidung nennt) algebraischen Analysis.

Reihen vorzubeugen; und die Erfindung solcher Symbole ist eben deshalb in jedem Einzelfalle eine um so verdienstvollere That gewesen, je grössere Schwierigkeiten sie offenbar geboten hat. Seitdem sie fertig vorliegen, übersieht man dies leicht, wenigstens bei denjenigen, an deren Gebrauch man von seiner Schülerzeit her gewöhnt ist, oder begegnet ihnen mit falschen oder unklaren Meinungen, welche dann der richtigen Würdigung eines neuen Symbols von genau derselben Beschaffenheit, wie die schon geläufig gewordenen, hindernd in den Weg treten.

Da hier jetzt ein neues Symbol dieser Art mit seinen Consequenzen in die Rechnung eingeführt werden soll, so dürfte es demnach, zumal da die klare Auffassung dieser Dinge noch immer kein Allgemeingut ist, nützlich sein, zuvor die Natur der formell geläufig gewordenen andern Symbole zu beleuchten; und zwar wollen wir dies thun in derjenigen Folge, in welcher sie bei den einzelnen Rechnungsarten auftreten.

In dieser Folge kommen zunächst die positiven und die negativen Grössen an die Reihe. Sie sind dadurch definirt, dass, wenn unter a eine wirkliche („absolute") Grösse oder Zahl verstanden wird, die neuen Symbole $(+a)$ und $(-a)$ in der Bedeutung

$$+(+a) = +a, \quad +(-a) = -a$$

gebraucht werden sollen. Da sie aus dem ursprünglichen Begriff der arithmetischen Zeichen heraus keinen Sinn haben,[1]) so steht dieser Definition von vorne herein nichts im Wege; es fragt sich nur, ob ihre Einführung einen Nutzen gewährt. Und das Letztere ist in eminenter Weise der Fall, weil es durch sie ermöglicht wird, die Lehrsätze

$$+a - b = +(a - b),$$
$$+a - b = -(b - a),$$

[1]) Denn eine Klammer ( ) ist ein Sigel für das Wort „eine Grösse", wenn man durch eine Anmerkung, welche stets in die Klammer hineingesetzt wird, anzeigen will, wie die fragliche Grösse aus andern erzeugt wird. Dies leisten aber die Symbole $(+a)$ und $(-a)$ nicht, weil sie in den Klammern nur die Imperative: „addire a", „subtrahire a" enthalten, ohne anzugeben: „wozu?" oder: „wovon?"

von denen der erstere für $a < b$, der zweite für $a > b$ seine Gültigkeit verliert, formell so zu verwenden, als erlitten sie keine Ausnahme; so dass das Endresultat der unter dieser Fiction durchgeführten Rechnung unter allen Umständen sicher erkennen lässt, was bei unausgesetzter Beobachtung aller Vorsichtsmaassregeln hervorgehe.[1])

Wegen dieses Vortheils hat man sich gewöhnt, in den arithmetischen Gebieten nur mit den sogenannten positiven und negativen Grössen und Zahlen zu rechnen, anstatt mit den absoluten.

Eine ähnliche und in gleichem Maasse bewährte Erfindung hat den Gesetzen der Division (des Theilens und des Messens) formale Allgemeingültigkeit verschafft. Es ist dies diejenige der gebrochenen und der irrationalen Zahlen. Versteht man nämlich unter n und ν (ganze) Zahlen, unter a und α Grössen von gleicher Qualität, so ist beim Theilen nur dann

$$\frac{n \cdot a}{\nu} = \frac{n}{\nu} \cdot a,$$

wenn ν in n aufgeht, weil das Symbol $\frac{n}{\nu}$ andernfalls keinen Sinn hat. Man definirt nun das letztere dadurch, dass stets $\left(\frac{n}{\nu} \cdot a\right)$ so viel bedeuten solle, wie $\frac{na}{\nu}$, und darf daher das Symbol $\frac{n}{\nu}$, weil es sich den Reihengesetzen für Zahlen unterwirft, unter die Kategorie derselben aufnehmen. Man nennt es eine gebrochene Zahl.

Dieselbe ist mit der Bruchform $\frac{a}{\alpha}$ identisch, wenn a und α ein gemeinschaftliches Maass haben, welches $< \alpha$ ist. Besitzen aber a und α kein gemeinschaftliches Maass, so heisst $\frac{a}{\alpha}$ eine irrationale Zahl. Und diese Reception unter die Zahlen ist

[1]) Diese Erkenntniss ist verhältnissmässig jung. Wir verdanken sie dem Scharfsinn des französischen Zollpächters Vieta, welcher im Ausgang des 16. Jahrhunderts lebte. — Wegen der genauen Erörterung des uns hier beschäftigenden Gegenstandes verweise ich auf mein Lehrbuch „Elemente der Mathematik“.

erwünscht zum Zwecke der Zulässigkeit einer rein formalen Behandlung von Gleichungen; erlaubt wegen der Anwendbarkeit der Gesetze des Rechnens mit Zahlen auf das Symbol $\frac{a}{a}$.

Die volle Rechtfertigung der hier bisher skizzirten Bereicherungen der Arithmetik durch Pseudogrössen und -Zahlen steht den Elementen dieser Wissenschaft zu.[1]) Diejenige Bereicherung, zu welcher wir jetzt übergehn wollen, und zu deren richtiger Würdigung das Obige als Einleitung dienen sollte, wird indessen meistens aus den Elementen ausgeschlossen. Wir wollen sie deshalb ausführlicher besprechen.

Unter den positiven und negativen, ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen giebt es keine, welche als Wurzel einer negativen Zahl bei gradem Wurzelexponenten aufgefasst werden könnte.

Trifft es sich also bei der bloss formalen Behandlung arithmetischer Gebilde, welche, wie wir gesehn haben, mit den Fortschritten dieser Wissenschaft aufs engste verknüpft ist, dass ein Radicand bei gradem Exponenten negativ wird, so tritt in die Rechnung ein Glied ohne Sinn ein.

Freilich ist dieses Glied durchaus nicht in anderer Weise sinnlos, als wenn eine Differenz auftritt, deren Minuend den Subtrahenden nicht erreicht, oder ein Quotient, bei welchem die geforderte Division nicht ausführbar ist; und daher darf man von vorne herein erwarten, dass sich, wie es in jenen Fällen gelungen ist, ein Symbol finden lasse, welches die Rechnung auch mit solchen Wurzeln gestattet.

Dies wird auf folgende Weise bewerkstelligt:

Definition.

Man ertheilt dem Symbol i die Eigenschaft, bei sämmtlichen formalen Rechenoperationen denjenigen

---

[1]) Der fast überall herrschende Gebrauch macht allerdings aus der Beschäftigung mit den Elementen eine blosse Abrichtung auf gewisse technische Fertigkeiten mit falscher Beleuchtung des Objects. Daher das mystische Dunkel, welches sich vor den Augen Vieler über gewisse Theile der Analysis ausbreitet!

Gesetzen gemäss behandelt zu werden, welche für die positiven und negativen Zahlen gelten, verknüpft es mit den letzteren dadurch, dass es freistehn soll, i^2 mit (—1) zu vertauschen;[1]) und nennt einen Ausdruck von der Form $a + i \cdot b$, in welchem a und b beliebige positive oder negative Zahlen bedeuten, eine **complexe Zahl.**

Eine complexe Zahl heisst auch **imaginär**, wenn b nicht $= 0$ ist, und dann, wenn $a = 0$ ist, **rein imaginär.**

Im Gegensatz dazu heissen diejenigen, welche i nicht enthalten (weil $b = 0$ ist), **reell.**

(Die reellen Zahlen bilden eine Unterabtheilung der complexen.)

Man nennt zwei **complexe Zahlen gleich**:

$$a + ib = \alpha + i\beta,$$

wenn man die eine durch Operationen, welche für reelle Zahlen gelten, in die andere überführen kann.

Nun wird die Arithmetik dann, aber auch nur dann, einen Nutzen aus dem Rechnen mit complexen Zahlen ziehn, wenn die so eben definirte Gleichung

$$a + ib = \alpha + i\beta$$

einen unfehlbaren Schluss auf die Beziehungen der reellen Zahlen a, b, α, β zu einander an die Hand giebt.

Und dies ist der Fall.

Denn nach den obigen Vereinbarungen folgt aus ihr

$$(a - \alpha)^2 = i^2 \cdot (\beta - b)^2,$$

$$+ (a - \alpha)^2 = -(\beta - b)^2;$$

und da diese Gleichung aussagt, dass die Addition der positiven

---

[1]) Die Definition, dass $i = \sqrt{-1}$ sei, ist aus einem doppelten Grunde unzulässig; denn erstens hat $\sqrt{-1}$ an und für sich keine Bedeutung, so dass es sich logisch nicht zur Grundlage einer Definition benutzen lässt; und zweitens würde, wenn man diese Definition dennoch festhielte, mit vollem Rechte geschlossen werden, dass $i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{+1}$ ebensowohl mit dem Werthe (+1), wie mit dem Werthe (—1) identificirt werde dürfe.

Zahl $(a - \alpha)^2$ eben so viel ausmacht, wie die Subtraction der positiven Zahl $(\beta - b)^2$, so muss nothwendiger Weise

$$a = \alpha, \quad b = \beta$$

sein. Dies giebt den

Lehrsatz I.

Wird durch irgend welche für reelle Zahlen geltenden Transformationen die Gleichung

$$a + ib = \alpha + i\beta$$

erhalten, in welcher a, b, α, β reelle Zahlen sind, so ist stets a mit α, und b mit β identisch. Die eine complexe Gleichung

$$a + ib = \alpha + i\beta$$

ist also mit den beiden reellen

$$a = \alpha, \quad b = \beta$$

durchaus von gleicher Wirkung.

Demnach darf man jetzt, nachdem die Unmöglichkeit von Verwechselungen klargelegt ist, in jeder Rechnung

$$\sqrt{-n} = \sqrt{i^2 \cdot n} = i \cdot \sqrt{n}$$

setzen und mit dieser Form nach den Regeln für reelle Zahlen weitere Transformationen vornehmen.

In der Definition von i (der sogenannten imaginären Einheit) ist keine Bestimmung darüber enthalten, ob i in die Kategorie der positiven oder in diejenige der negativen Zahlen aufgenommen werden soll. Da nach dem so eben bewiesenen Satz eine Specialisirung in diesem Sinne auch keineswegs nöthig ist, um i als vollberechtigt unter die Zahlen zu recipiren, so ergiebt sich ferner der

Lehrsatz II.

Ist eine Gleichung, welche i enthält, erwiesen, so gilt auch diejenige Gleichung, welche aus ihr durch Vertauschung von i mit $(-i)$ hervorgeht.

§ 61.

Definition und Grundeigenschaften derjenigen reellen Functionen (der **Kreisfunctionen**), welche durch das Auftreten complexer Exponenten bedingt werden.

Für jedes reelle a und x ist nach § 40, (3):

$$\lim_{n=\infty} \cdot \left(1+\frac{ax}{n}\right)^n = e^{ax} = 1 + \frac{a^1 x^1}{1!} + \frac{x^2 a^2}{2!} + \frac{x^3 a^3}{3!} + \cdots$$

Nun kann es nach der Reception von i unter die Zahlen beim formalen Rechnen vorkommen, dass i an der Stelle von a auftritt, wodurch die Relation

$$e^{ix} = 1 + \frac{i^1 x^1}{1!} + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \cdots$$

der weiteren Behandlung unterworfen wird.

Vorläufig fragt es sich noch, ob dieselbe eine Deutung im Sinne der complexen Zahlen zulässt; und da die ganzen Potenzen von i eine Reihe mit der viergliedrigen Periode $(+i, -1, -i, +1)$ bilden, so richtet sich diese Frage auf den Ausdruck:

(1) $$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

wenn die Functionen cos x und sin x durch

(2) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

(3) $$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

definirt werden.

Die Zulässigkeit der Darstellung von e^{ix} durch (1) erhellt aber unmittelbar daraus, dass die in (2) und (3) bezeichneten unendlichen Reihen für jedes reelle x unbedingt convergiren, weil die absoluten Werthe ihrer Glieder diejenigen der Reihe für e^x mit gleich hohen Exponenten nicht übersteigen. Als Potenzreihen sind sie ausserdem stetig, differentiir- und integrirbar (§ 59).

Demnach ist es gestattet, auch in der Gleichung (5) des § 40, welche den Rest der Reihe für e^x enthält, ix an die Stelle von x zu setzen. Man erhält durch die Sonderung der reellen Bestandtheile:

$$(4) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\cdots - (-1)^{\frac{r}{2}} \cdot \frac{x^{r-2}}{(r-2)!} + (-1)^{\frac{r}{2}} \cdot \frac{x^r}{r!} \cdot \int_0^1 \cos\left[x(1-\sqrt[r]{v})\right] dv,$$

$$(5) \qquad \sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cdots - (-1)^{\frac{r-1}{2}} \cdot \frac{x^{r-2}}{(r-2)!} + (-1)^{\frac{r-1}{2}} \cdot \frac{x^r}{r!} \cdot \int_0^1 \cos\left[x(1-\sqrt[r]{v})\right] dv;$$

wo unter r in (4) eine grade, in (5) eine ungrade Zahl verstanden wird.

Die Functionen $\cos x$ und $\sin x$ nebst mehreren Abkürzungen für Combinationen von ihnen, z. B.

$$(6) \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{tng} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

werden, weil man sie als **Maasszahlen** am Kreise veranschaulichen kann, Kreisfunctionen genannt. Wir wollen diese Veranschaulichung später besprechen, nachdem wir die Ableitung der Eigenschaften der Functionen aus ihrer obigen Definition gezeigt haben.

Zunächst folgt aus (2) und (3):

$$(7) \qquad \cos 0 = +1, \qquad \sin 0 = \pm 0;$$

$$(8) \qquad \cos(-x) = +\cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Und durch Differentiation der Gleichung (1) ergiebt sich:

$$\frac{d\cos x}{dx} + i \cdot \frac{d\sin x}{dx} = \frac{d \cdot e^{ix}}{dx} = i \cdot e^{ix} = i(\cos x + i\sin x)$$
$$= -\sin x + i\cos x,$$

mithin vermittelst der Sonderung der reellen Bestandtheile:

(9) $$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d\sin x}{dx} = +\cos x.$$

Durch Integration dieser Gleichungen (9) mit Rücksicht auf (7) ergiebt sich:

(10) $$\begin{cases} \int \cos x\, dx = \sin x + C, & \int \sin x\, dx = -\cos x + C; \\ \int\limits_0^z \cos x\, dx = \sin z, & \int\limits_0^z \sin x\, dx = 1 - \cos z. \end{cases}$$

Addirt und subtrahirt man die Gleichung (1) mit der Gleichung

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

welche aus ihr durch die Veränderung des Vorzeichens von i nach § 60, L. II folgt, so findet man die häufig nützlichen Transformationsformeln:

(11) $$\cos x = \frac{e^{+ix} + e^{-ix}}{2},$$

(12) $$\sin x = \frac{e^{+ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Multiplicirt man aber jene Gleichungen mit einander, so erhält man:

$$e^{\pm 0} = \cos x^2 - i^2 \sin x^2,$$

d. i. wegen $e^{\pm 0} = 1$ und $i^2 = -1$:

(13) $$1 = \cos x^2 + \sin x^2.$$

Die mannichfaltigen Beziehungen von Kreisfunctionen auf einander gehn eines Theils hervor aus der Multiplication der Gleichung (1) mit der analogen

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Das Product der linken Seiten nämlich ist:

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y),$$

und das Product der rechten Seiten;

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + i \cdot \{\sin x \cos y + \cos x \sin y\};$$

weshalb nach § 60, L. II die Relationen

(14) $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

(15) $$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Geltung haben. Aus ihnen entspringt eine lange Reihe von Transformationsformeln, welche wir als bekannt voraussetzen dürfen, weil ihre Entwickelung aus (14) und (15) in jedem elementaren Lehrbuch ausgeführt ist.

Es bleibt für unsere Aufgabe hier demnach nur noch derjenige Theil der Formeln übrig, welcher auf die Wurzeln der Gleichungen

$$\cos x = 0, \quad \sin x = 0$$

zurückgreift.

Um die kleinste Wurzel der Gleichung $\cos x = 0$ zu fixiren, machen wir zunächst die Bemerkung, dass der Werth von

$$\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+4}}{(n+4)!} - \cdots$$

mindestens so lange positiv ist, als x zwischen 0 und n angenommen wird, weil dann die Glieder dieser Reihe bei alternirenden Vorzeichen unausgesetzt abnehmen.

Daher gestattet die Gleichung (2) einerseits den Schluss, dass $\cos x$ mindestens von $x = 0$ bis $x = \sqrt{2}$ positiv sei, weil für solche Werthe von x nach dem Obigen

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!} = +\frac{1}{2}(2 - x^2)$$

sein muss, und zeigt andrerseits, dass $\cos 2$ einen negativen Werth besitzt, weil

$$\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3}$$

hervorgeht.

Wegen der Stetigkeit der Function $\cos x$ muss daher zwischen $x = \sqrt{2}$ und $x = 2$ mindestens eine Wurzel der Gleichung $\cos x = 0$ liegen, während es keine unter $\sqrt{2}$ herabsteigende Wurzel derselben giebt.

Wir wollen die **kleinste** positive Wurzel der Gleichung $\cos x = 0$ vorläufig durch ω bezeichnen, uns aber später der gebräuchlichen Bezeichnung $\frac{\pi}{2}$ bedienen, sobald sie

der leichten Übersicht über die Formeln nicht mehr besonders hinderlich ist.[1])

Somit ist $\cos x$ von $x = 0$ bis $x = \omega$ positiv, und desgleichen auch die Function $\sin x$, weil sie wegen des positiven Vorzeichens ihrer aus (9) bekannten Derivirten $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ von ihrem Werthe $\sin 0 = 0$ an wächst. Nach (13) ist demnach gleichzeitig:

$$\cos \omega = +0, \quad \sin \omega = +1; \tag{16}$$

und nach (1):

$$e^{i\omega} = i. \tag{17}$$

Hieraus folgt, wenn wir unter k eine beliebige ganze, positive oder negative Zahl verstehn, durch Potenziren:

$$e^{i \cdot 2k\omega} = (-1)^k, \quad e^{i \cdot (2k+1)\omega} = (-1)^k \cdot i;$$

und wenn man beiderseits mit e^{ix} multiplicirt:

$$e^{i(x+2k\omega)} = (-1)^k \cdot e^{ix}, \tag{18}$$

$$e^{i(x+(2k+1)\omega)} = (-1)^k \cdot ie^{ix}. \tag{19}$$

Ist im Besondern k eine grade Zahl, was wir durch Substitution von 2k für k ausdrücken wollen, so ergiebt die Gleichung (18):

$$\begin{cases} e^{i(x+4k\omega)} = e^{ix}; \\ \cos(x + 4k\omega) = \cos x, \\ \sin(x + 4k\omega) = \sin x. \end{cases} \tag{20}$$

Mithin sind die Functionen e^{ix}, $\cos x$, $\sin x$ **periodisch mit der Periode** $4\omega = 2\pi$, d. h. sie ändern ihre Werthe nicht, wenn man x um $4\omega = 2\pi$ vergrössert oder verkleinert.

Man braucht daher, um den Verlauf dieser Functionen vollständig zu übersehn, nur ihre Veränderungen innerhalb einer Periode zu betrachten: etwa von $x = 0$ bis $x = 4\omega$.

Für $k = 1$ giebt die Gleichung (18):

$$e^{i(x+2\omega)} = -e^{ix}, \quad \cos(x + 2\omega) = -\cos x, \quad \sin(x + 2\omega) = -\sin x; \tag{21}$$

---

[1]) Das Zeichen π für 2ω ist früher in Gebrauch gekommen, als man die Beziehungen dieser Zahl in hinreichender Vollständigkeit übersehn konnte.

so dass diese Functionen in der zweiten Hälfte der Periode die in der ersten Hälfte gezeigten Werthe mit verändertem Vorzeichen wiederholen.

Hinsichtlich der Beziehungen innerhalb der ersten Hälfte der Periode folgt aus (18) für $k=1$ unter Vertauschung von x mit $(-x)$:

$$(22)\begin{cases} e^{i(2\omega-x)}=-e^{-ix}, \cos(2\omega-x)=-\cos x, \sin(2\omega-x)=+\sin x;\\ e^{i(\pi-x)}=-e^{-ix}, \cos(\pi-x)=-\cos x, \sin(\pi-x)=+\sin x;\end{cases}$$

aus (19) aber für $k=0$ unter Vertauschung von x mit $(-x)$:

$$(23)\begin{cases} e^{i(\omega-x)}=+ie^{-ix}, \cos(\omega-x)=+\sin x, \sin(\omega-x)=+\cos x;\\ e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=+ie^{-ix}, \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=+\sin x, \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=+\cos x.\end{cases}$$

Die Gleichungen (22) sprechen den Satz von den Supplementen, (23) denjenigen von den Complementen aus. Der erstere zeigt u. a. an:

dass die absoluten Werthe der Kreisfunctionen im ersten Viertel der Periode (dem „ersten **Quadranten**") völlig erschöpft sind;

der zweite:

dass dies schon im ersten Achtel der Periode geschehn ist, wenn man $\cos x$ und $\sin x$ zugleich in Betracht zieht.

Ausserdem wird durch sie der Vorzeichenwechsel völlig definirt. Und schliesslich geht aus ihnen hervor, dass

sämmtliche reelle Wurzeln der Gleichung $\cos x=0$
durch die Formel $x=(2k+1)\omega=(2k+1)\frac{\pi}{2}$,
und sämmtliche reelle Wurzeln der Gleichung $\sin x=0$
durch die Formel $x=2k\omega=k\pi$

bestimmt werden; denn dass dies Wurzeln der fraglichen Gleichungen sind, folgt aus den Theilen

$$\cos(x+4k\omega)=\cos x \text{ und } \sin x=\cos(\omega-x)$$

von (20) und (23), und dass sonst keine reellen Wurzeln existiren, schliesst man, weil entgegengesetzten Falls noch Wurzeln der Gleichung $\cos x=0$ zwischen $x=0$ und $x=\omega$ vorhanden wären.

Hiermit haben die Kreisfunctionen die ihnen gebührende Würdigung gefunden: als arithmetische Gebilde, welche aus der Definition der complexen Zahlen mit Nothwendigkeit entspringen. Es bleibt nur noch die numerische Berechnung von $\omega = \frac{\pi}{2}$ übrig; sie wird in § 65 ausgeführt werden.

Diejenige geometrische Veranschaulichung, welche wir in § 63 besprechen, wird zeigen, dass eine eigenthümliche Beschaffenheit der Raumgebilde eine fruchtbare Verwendung der Kreisfunctionen in der Geometrie gestattet. (Bisher wird die Sache fast immer so dargestellt, als fände die umgekehrte Beziehung statt.)

Bevor wir aber dazu übergehn, wollen wir noch erwähnen, dass die Kreisfunctionen eine völlig bestimmte Bedeutung, und die Relationen zwischen ihnen ihre volle Gültigkeit bewahren, wenn für ihr Argument x eine complexe Zahl gesetzt wird.

Denn substituirt man in (11) und (12) $x + iy$ für x, so folgt:

$$(24) \qquad \cos(x + iy)$$
$$= \frac{e^{-y+ix} + e^{+y-ix}}{2} = \cos x \cdot \frac{e^{+y} + e^{-y}}{2} - i \cdot \sin x \cdot \frac{e^{+y} - e^{-y}}{2},$$

$$(25) \qquad \sin(x + iy)$$
$$= \frac{e^{-y+ix} - e^{+y-ix}}{2i} = \sin x \cdot \frac{e^{+y} + e^{-y}}{2} + i \cdot \cos x \cdot \frac{e^{+y} - e^{-y}}{2};$$

was einen völlig bestimmten Sinn hat. Mithin bleiben alle Gleichungen bestehn, welche sich hieraus durch formale Rechnung ableiten lassen, d. i.: alle ohne Ausnahme. U. a. wird die Gl. (13) durch Summation der quadrirten Gleichungen (24) und (25) in der Form

$$\cos^2(x + iy) + \sin^2(x + iy) = 1$$

verificirt; und die Gleichungen (14) und (15) stimmen mit (24) und (25) in der zuletzt geschriebenen Gestalt der rechten Seiten unmittelbar überein, weil nach (11) und (12) oder nach (24) und (25)

(26) $$\cos iy = \frac{e^{+y} + e^{-y}}{2},$$

(27) $$\sin iy = i \cdot \frac{e^{+y} - e^{-y}}{2}$$

ist.

Es verlohnt sich hierbei noch, hervorzuheben, dass nach (24) und (25) die Functionen

$$\cos(2k\omega + iy) = \cos(k\pi + iy)$$

$$\text{und } \sin\Big((2k+1)\omega + iy\Big) = \sin\Big((2k+1)\frac{\pi}{2} + iy\Big)$$

bei jedem ganzen k **reelle** Functionen von y sind, trotz des **complexen** Arguments, und jeden beliebigen reellen Werth annehmen können, welcher seinem absoluten Betrage nach $\overline{\overline{>}}\,1$ ist.

Deshalb können $\cos z$ und $\sin z$ überhaupt jeden beliebigen Werth annehmen, wenn man nur das z nicht auf reelle Werthe beschränkt.

Die Gleichung (26) hebt einen speciellen Fall heraus. Ausserdem zeigt es sich, dass

die Gleichungen $\cos x = 0$ und $\sin x = 0$ keine complexen, sondern nur reelle Wurzeln besitzen.

Denn damit die rechte Seite von (24) verschwindet, müssen die beiden Gleichungen

$$\cos x \cdot \frac{e^{+y} + e^{-y}}{2} = 0, \quad \sin x \cdot \frac{e^{+y} - e^{-y}}{2} = 0$$

erfüllt werden, in denen x und y reelle Zahlen sind; und die erste Gleichung erfordert für x einen reellen Wurzelwerth der Gleichung $\cos x = 0$, weil der andere Factor nicht verschwinden kann, bedingt also für $\sin x$ den Werth ± 1, so dass die zweite Gleichung nur dann besteht, wenn $e^{+y} = e^{-y}$, $e^{2y} = 1$, $y = 0$ ist.

Schliesslich beachte man noch, dass die **Exponentialfunction**

$$e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

in keinem Falle verschwindet, weil $\cos y$ und $\sin y$ nicht zugleich verschwinden, und e^x nie $= 0$ ist, dass aber

$$\lim_{x=-\infty} \cdot \, e^{x+iy} = 0$$

hervorgeht, welchen Werth das y auch haben mag.

§ 62.

Die Moivreschen Formeln.[1])

Stellen wir uns die Aufgabe, zwei reelle Zahlen v und φ so zu bestimmen, dass zwischen ihnen und zwei andern reellen Zahlen x und y die Gleichung

(1) $$v \cdot e^{i\varphi} = x + iy$$

besteht, so ist dieselbe wegen der Identität

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

gleichbedeutend mit der Auflösung der beiden Gleichungen

(2) $$v\cos\varphi = x, \quad v\sin\varphi = y$$

für die Unbekannten v und φ.

Aus diesen Gleichungen lässt sich φ dadurch eliminiren, dass man sie quadrirt und dann zu einander addirt; denn es geht dadurch unter Anwendung von § 61 (13) hervor:

(3) $$v^2 = x^2 + y^2, \quad v = \sqrt{x^2 + y^2},$$

was durch Substitution in (2) die Werthe

(4) $$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ergiebt.

Nun ist es wichtig, dass die Gleichungen (4) sich stets durch reelle Werthe von φ erfüllen lassen, weil die absoluten Werthe derjenigen Brüche, durch welche $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ausgedrückt sind, die 1 nicht übersteigen, und dass man wegen der Periodicität der Functionen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ nicht nur einen Werth von φ findet, sondern eine unzählbare Anzahl von Werthen, nämlich alle Werthe

[1]) Nach Abraham de Moivre (1667—1754) benannt.

von der Form $(\varphi + 4k\omega) = (\varphi + k \cdot 2\pi)$, wo φ irgend eine Auflösung von (4) bedeutet.

Auch hat man noch die Freiheit der Wahl, ob v eine positive oder eine negative oder endlich eine absolute Zahl bedeuten soll.

Bei den meisten Anwendungen wählt man aus praktischen Rücksichten für v den absoluten Werth. Dann stimmen die Vorzeichen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ nach (4) mit denjenigen von x und y überein, so dass derjenige Quadrant (dasjenige Periodenviertel), in welchem der Werth von φ liegt, aus den Vorzeichen von x und y sofort erkennbar ist.

Die numerische Rechnung mit Hülfe der bekannten Tafeln für die Werthe der Kreisfunctionen gestaltet sich übrigens meistens bequemer, wenn man aus den Gleichungen (2) zunächst v eliminirt. Dies giebt:

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tng}\varphi = \frac{y}{x},$$

$$\text{(6)} \qquad v = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi}.$$

Die bisherigen Resultate kann man so zusammenfassen:

Lehrsatz I.

Jede complexe Zahl ist der Transformation

$$x + iy = v \cdot e^{i\varphi}$$

fähig, bei welcher man unter v nach Belieben eine positive oder negative oder absolute Zahl verstehn kann und die positive oder negative Zahl φ um ein beliebiges Vielfaches von $4\omega = 2\pi$ vergrössern und verkleinern darf:

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi.$$

Die Berechnung der reellen Bestandtheile der ersten und der zweiten Form der complexen Zahlen aus einander geschieht nach den Formeln (2), (3) und (4) oder (2), (5) und (6).

Definition.

Ist hinsichtlich des v in der Transformation

$$x + iy = v \cdot e^{i\varphi}$$

die Bestimmung getroffen, dass es eine **absolute** Zahl sei, so wird v der **Modul** und φ das **Argument** der complexen Zahl genannt. Den Modul v der complexen Zahl nennt man auch den **absoluten Werth** oder den **absoluten Betrag** der letzteren.

Wo die complexen Zahlen irgend einer andern Rechenvorschrift unterworfen sind, als grade der Addition und Subtraction, ist ihre Darstellung durch Modul und Argument in der Regel die handlichste; was wir durch die Besprechung derjenigen fünf Fälle, welche sich hierbei ergeben, erläutern wollen.

Wir setzen dabei

$$x + iy = ve^{i\varphi}, \quad x_1 + iy_1 = v_1 e^{i\varphi_1},$$

fügen, wo es der grösseren Deutlichkeit wegen als nützlich erscheint, zum Argument ein Vielfaches der Periode 2π hinzu, und verstehn unter n eine ganze positive oder negative Zahl.

Dann ergiebt sich auf die einfachste Weise:

$$(7)\quad (x + iy)\cdot(x_1 + iy_1) = ve^{i\varphi}\cdot v_1 e^{i\varphi_1} = vv_1\cdot e^{i(\varphi+\varphi_1)}$$
$$= vv_1\cdot\cos(\varphi + \varphi_1) + i\cdot vv_1\cdot\sin(\varphi + \varphi_1),$$

$$(8)\quad \frac{x + iy}{x_1 + iy_1} = \frac{ve^{i\varphi}}{v_1 e^{i\varphi_1}} = \frac{v}{v_1}\cdot e^{i(\varphi-\varphi_1)}$$
$$= \frac{v}{v_1}\cdot\cos(\varphi - \varphi_1) + i\cdot\frac{v}{v_1}\cdot\sin(\varphi - \varphi_1),$$

$$(9)\quad (x + iy)^n = (ve^{i\varphi})^n = v^n e^{in\varphi}$$
$$= v^n\cdot\cos n\varphi + i\cdot v^n\cdot\sin n\varphi,$$

$$(10)\quad \sqrt[n]{x + iy} = \sqrt[n]{ve^{i(\varphi + k.2\pi)}} = \sqrt[n]{v}\cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right)}$$
$$= \sqrt[n]{v}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\sqrt[n]{v}\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$(11)\quad l(x+iy) = l\cdot\left[ve^{i(\varphi+k.2\pi)}\right]$$
$$= lv + i\varphi + i\cdot k\cdot 2\pi.$$

Diese letzten fünf Formeln heissen die Moivreschen. Sie leisten die Überführung der Producte, Quotienten, Potenzen,

Wurzeln und Logarithmen der complexen Zahlen in die Normalform $a + ib$.

Über sie bleibt noch zu bemerken, dass bei den drei ersten die Vermehrung der Argumente um $k \cdot 2\pi$ keine Veränderung im Transformationsresultat hervorruft, weil das Argument des letzteren dadurch auch nur um ein ganzes Vielfaches von 2π geändert wird. Man spricht dies so aus:

Die Producte, Quotienten und Potenzen complexer Zahlen sind **eindeutige** Functionen der letzteren.

Anders verhält es sich beim Radiciren und Logarithmiren.

Denn da nach (10) das Argument der n^{ten} Wurzel durch

$$\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$$

ausgedrückt wird, so entspricht der zulässigen Veränderung von φ um eine Periode der Exponentialfunction $e^{i\varphi}$ des Radicanden nur ein Zuwachs um den n^{ten} Theil der Periode der Exponentialfunction der Wurzel; und man muss k in $(k + n)$ verwandeln, damit das Argument der Wurzel um die Periode ihrer Exponentialfunction vergrössert, d. i. damit

$$\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \text{ in } \frac{\varphi}{n} + (k + n)\frac{2\pi}{n} = \left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + 2\pi$$

übergeführt werde.

Daher besitzt die n^{te} Wurzel aus einer **complexen** Zahl (mit Einschluss der positiven und negativen Zahlen) n von einander verschiedene Werthe,[1]) welche aus (10) erhalten werden, wenn man dort n auf einander folgende ganze Zahlen für k setzt:

Die n^{te} Wurzel aus einer complexen Zahl ist eine n-**deutige** Function derselben.

— Die n^{te} Wurzel aus einer **absoluten** Zahl aber,

---

[1]) Mehr complexe Werthe kann der Ausdruck $z = \sqrt[n]{x + iy}$ nicht haben. Denn diese Gleichung sagt dasselbe aus, wie $z^n = x + iy$ oder $z^n - (x + iy) = 0$. Und wir wissen, dass eine algebraische Gleichung in z, welche mehr Wurzelwerthe besitzt, als ihr Grad beträgt, für jeden Werth von z gelten muss — was hier offenbar nicht zutrifft, z. B. nicht für $z = 0$.

z. B. $\sqrt[n]{v}$, hat selbstverständlich nur **einen** Werth, weil derselbe wieder absolut ist: sie ist **eindeutig**.

Die Gleichung (11) endlich zeigt,

dass jede complexe Zahl (mit Einschluss der positiven und negativen) eine unbeschränkte Anzahl von Logarithmen besitzt, welche eine arithmetische Reihe mit einer rein imaginären Differenz bilden. Bei der Basis e ist diese Differenz $= i \cdot 2\pi$, im Allgemeinen aber $= i \cdot \frac{2\pi}{l b}$, wenn b die Basis bedeutet.

— Der Logarithmus einer absoluten Zahl, z. B. $l\,v$, hat wieder selbstverständlich nur einen Werth, nämlich einen positiven oder negativen.[1])

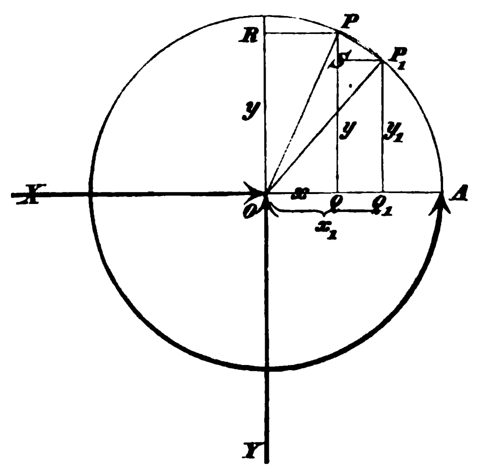
§ 63.

Geometrische Veranschaulichung der complexen Zahlen.

Wählt man bei der complexen Zahl

(1) $z = x + iy = v \cdot e^{i\varphi}$

deren reelle Bestandtheile x und y zu Maasszahlen der rechtwinkligen Coordinaten OQ und OR eines Punktes P und zieht die Grade OP, so ist im rechtwinkligen $\triangle$ OQP nach dem Pythagoreischen Satze:



$$\overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2 = \overline{OP}^2.$$

Nach § 62, (3) ist:

(2) $$x^2 + y^2 = v^2.$$

Mithin ist der Modul v die Maasszahl der Strecke OP.

---

[1]) Wollte man auch beim Logarithmiren noch bloss mit absoluten Zahlen rechnen, so würde $\frac{l a}{b}$ nur dann einen Sinn haben, wenn der Numerus a und die Basis b zugleich > 1 oder < 1 sind. Deshalb hat man sich

Zieht man ferner mit OP als Radius um O einen Kreis, so liegt demnach auf dem letzteren jeder andere Punkt P_1, welcher durch eine ähnliche Construction aus der im Modul v mit z übereinstimmenden complexen Zahl

$$(3) \qquad z_1 = x_1 + i\,y_1 = v \cdot e^{i\varphi_1}$$

gefunden wird.

Wir fällen P_1S senkrecht auf PQ und ziehen die Sehne PP_1. Dann ist im rechtwinkligen $\triangle PSP_1$:

$$\overline{PP_1}^2 = SP_1^2 + \overline{SP}^2$$

oder, weil es beim Quadriren auf die Vorzeichen der Differenzen $SP_1 = \pm(x - x_1)$, $SP = \pm(y - y_1)$ nicht ankommt:

$$\overline{PP_1}^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Substituirt man hier noch die aus (1) und (3) fliessende Werthe

$$x = v\cos\varphi, \quad y = v\sin\varphi, \quad x_1 = v\cos\varphi_1, \quad y_1 = v\sin\varphi_1,$$

so folgt:

$$\overline{PP_1}^2 = v^2\left\{(\cos\varphi - \cos\varphi_1)^2 + (\sin\varphi - \sin\varphi_1)^2\right\}$$

$$= v^2\left\{\begin{matrix} \cos\varphi^2 - 2\cos\varphi\cos\varphi_1 + \cos\varphi_1^2 \\ + \sin\varphi^2 - 2\sin\varphi\sin\varphi_1 + \sin\varphi_1^2 \end{matrix}\right\}$$

$$= 2v^2\left\{1 - \cos(\varphi - \varphi_1)\right\}$$

$$= 4v^2\left(\sin\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\right)^2.$$

---

schon in den Elementen der Arithmetik entschlossen, nie von **absoluten** Logarithmen zu sprechen.

Die negativen Zahlen haben, da bei ihnen nach (11) ein Werth von $\varphi = \pi$ ist, nur complexe Logarithmen.

Nun hat übrigens, wie bereits zu § 44 (7) bemerkt wurde, auch für negative x die Formel

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C$$

einen völlig bestimmten reellen Sinn, da die in lx enthaltene imaginäre Constante sich durch einen imaginären Theil von C aufheben lässt.

Mithin ist:

$$PP_1 = 2v \sin\frac{\varphi - \varphi_1}{2},$$

falls $\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}$ einen positiven Werth besitzt; und dies trifft jedenfalls zu, so lange der Werth der Differenz $\frac{\varphi-\varphi_1}{2}$ positiv ist und dem ersten Viertel der Periode der Kreisfunctionen angehört. Für unsere Figur bedeutet diese Bedingung, dass man den in der Richtung $XYAP_1$ gezogenen Kreisbogen hinreichend wenig verlängern muss, um zum Punkte P zu gelangen; denn die aus den Gleichungen

$$x = v\cos\varphi, \quad y = v\sin\varphi$$

wegen der Constanz von v folgenden Relationen

$$dx = -v\sin\varphi\, d\varphi = -y\, d\varphi, \quad dy = +v\cos\varphi\, d\varphi = x\, d\varphi$$

oder

$$d\varphi = \frac{-dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

zeigen nach § 4 an, dass φ stetig wächst, wenn der Punkt P in der fraglichen Richtung auf dem Kreise verschoben wird.

Denkt man sich nun auf dem Bogen AP eine beliebige Anzahl von Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots$ interpolirt und zwischen ihnen ihrer Folge nach die Sehnen gezogen, so ist die Summe derselben nach der so eben für PP_1 entwickelten Formel

$$= \sum 2v\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \sum v \cdot \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \Delta\varphi.$$

Für $\varphi = 0$ wird $x = v\cos 0 = +v$, $y = v\sin 0 = 0$; was den Punkt A anzeigt.

Mithin erhält man für die Länge des Kreisbogens, welchem sich die Sehnenfolge zwischen den festen Endpunkten P und A bei unendlicher Annäherung der Punkte $P, P_1, P_2, P_3, \ldots, A$ an einander unendlich nahe anschmiegt:

$$AP = v \cdot \int_0^{\varphi} \left[\lim_{\Delta\varphi=0} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \right] d\varphi .$$

Beachtet man endlich, dass aus § 61, (3) der Grenzwerth

$$(4) \qquad \lim_{u=0} \cdot \frac{\sin u}{u} = \lim_{u=0} \cdot \left\{ 1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - \frac{u^6}{7!} + \cdots \right\} = 1$$

hervorgeht, so folgt:

$$AP = v \int_0^{\varphi} d\varphi = v\varphi .$$

Damit ist auch für das Argument φ eine geometrische Veranschaulichung gewonnen.

Wir fassen die Resultate zusammen in dem

Lehrsatz.

Um den Nullpunkt 0 eines rechtwinkligen Coordinatensystems als Centrum werde mit einem Radius v ein Kreis in solcher Umlaufsrichtung gezogen, wie man am kürzesten von der Abscissenaxe XO zur Ordinatenaxe YO gelangt, und der in der Verlängerung der Abscissenaxe liegende Punkt A des Kreises werde als Endpunkt der beschriebenen Kreislinie angesehn.

Bedeutet dann φ das positive oder negative (ganze, gebrochene oder irrationale) Vielfache des Radius v, welches man zu der letzteren (von A aus als Bogen) addiren muss, um zu einem Punkte P zu gelangen, so besteht zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y des Punktes P und seinen „**Polarcoordinaten**" v, φ stets die Gleichung:

$$x + iy = v \cdot e^{i\varphi} .$$

Da man in der analytischen Geometrie die Strecke $OP = v$ den **Vector** und die mit dem gehörigen Vorzeichen versehene Maasszahl $\varphi = \frac{AP}{OP}$ des Bogens AP den **Arcus** oder den **Richtungswinkel** von P nennt, so kann man dies in Folge der Gleichungen § 62, (2) auch so aussprechen:

Bedeutet v den Vector und φ den Arcus oder Richtungswinkel eines Punktes in der Ebene, so sind $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ die Maasszahlen von Abscisse und Ordinate desselben Punktes, sobald die Coordinaten als rechtwinklig, und der Vector als Längeneinheit angenommen wird.

Zusatz.

Die kleinste Wurzel der Gleichung $\cos x = 0$, nämlich $\omega = \frac{\pi}{2}$, ist gleich der Maasszahl des Kreisquadranten, wenn man den letzteren durch den Radius misst.

Die hier besprochene geometrische Veranschaulichung der Kreisfunctionen stützt sich, wie aus dem Obigen genügend hervorgeht, auf den Pythagoreischen Satz, dessen Gültigkeit bekanntlich nicht unbezweifelt dasteht, weil er nur zugleich mit der Hypothese zutrifft, dass die Winkelsumme keines Dreiecks unter einen beliebig kleinen Werth herabsteigt, oder — was auf dasselbe hinauskommt — dass es durch jeden Punkt nur eine Parallele zu einer Graden giebt. Lässt man diese Hypothese als eine nicht genügend durch die Anschauung beglaubigte fallen, so entsteht ein eben so widerspruchfreies Gebäude der Geometrie,[1]) wie das Euklidische, welches die fragliche Hypothese anerkennt.

In jenem stellt sich die Länge des Kreisquadranten q vom Radius v durch die Formel dar:

$$q = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{+cv} - e^{-cv}}{2c} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(icv)}{ic}$$

$$= \frac{\pi}{2} v \cdot \left\{ 1 + \frac{c^2 v^2}{3!} + \frac{c^4 v^4}{5!} + \frac{c^6 v^6}{7!} + \cdots \right\},$$

wo c eine noch nicht ermittelte und nur durch Messungen im vorhandenen Raum bestimmbare Constante bedeutet. — Die Euklidische Geometrie, an welche wir uns halten wollen, setzt $c = 0$.

Es verdient noch besonders hervorgehoben zu werden, dass die oben klargelegte Verwendbarkeit der reellen Bestandtheile complexer Zahlen

[1]) Man vergl. u. a.: Frischauf. Absolute Geometrie. Leipzig bei Teubner. 1872.

$$z = x + iy = v e^{i\varphi}$$

als Coordinaten von Punkten einer Ebene Alles leistet, was in Absicht auf die Veranschaulichung der complexen Zahlen verlangt werden kann, und in keiner Weise der gewohnten Veranschaulichung der reellen Zahlen nachsteht.

Denn einerseits zeigt die **„complexe Coordinate“** z einen einzelnen Punkt ganz bestimmt an — und umgekehrt jeder einzelne Punkt eine einzige complexe Zahl, andrerseits entspricht jeder stetigen Veränderung der complexen Zahl z, d. i. ihrer reellen Bestandtheile x, y oder v, φ, eine stetige Verschiebung des Punktes in der Ebene — und umgekehrt.

Ändern sich die beiden reellen Bestandtheile x und y oder v und φ der complexen Zahl z gleichzeitig, so erfordert dies, damit die Veränderung bestimmt sei, eine Gleichung zwischen x und y oder v und φ, d. i.: eine Linie, auf welcher der Punkt (x, y) oder (v, φ) gleitet.

Diese Linie $\varphi(x, y) = 0$ oder $\psi(v, \varphi) = 0$ zeigt bei der Differentiation die **„Differentiationsrichtung“**, bei der Integration den **„Integrationsweg“** an; und die Symbole der Differentiation und Integration haben **ohne** Bezug auf eine solche Linie oder Gleichung keinen Sinn, während sie **mit** Bezug auf eine solche aus ihrem Grundbegriff völlig klar sind.

Wir kommen später auf diesen Gegenstand wieder zurück.

§ 64.

Inversion der Kreisfunctionen.

Definition.

Betrachtet man in den Gleichungen

(1) $$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad z = \cot\varphi, \quad u = \operatorname{tng}\varphi$$

den Arcus φ als Function der linken Seite, so schreibt man dieselben:

(2) $$\varphi = \operatorname{arc}\cos x, \quad \varphi = \operatorname{arc}\sin y, \quad \varphi = \operatorname{arc}\cot z, \quad \varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tng} u;$$

und liest beispielsweise „arcus cosinus x" in dem Sinne: arcus, dessen cosinus $= x$ ist.[1])

Die Functionen x, y, z, u sind periodische Functionen von φ, und zwar die beiden ersteren mit der Periode $4\omega = 2\pi$, die beiden letzteren (nach § 61, (21)) mit der halb so grossen Periode $2\omega = \pi$; d. h., es ist:

$$x = \cos(\varphi + k \cdot 2\pi), \quad y = \sin(\varphi + k \cdot 2\pi), \quad z = \cot(\varphi + k \cdot \pi),$$
$$u = \operatorname{tng}(\varphi + k \cdot \pi).$$

Hieraus folgt:

Die inversen Kreisfunctionen sind in der Weise **vieldeutig**, dass **arc cos x** und **arc sin x** bei jedem Argument x um $k \cdot 2\pi$, dagegen **arc cot x** und **arc tng x** um $k \cdot \pi$ vergrössert und verkleinert werden dürfen.

Ausserdem ergiebt sich aus den Relationen (22) und (23) des § 61 noch folgendes:

Man darf das Vorzeichen eines jeden nur durch sein Argument bestimmten **arc cos** ändern, den **arc sin** aber durch sein Supplement ersetzen; endlich darf man jeden von beiden durch das Complement des andern ersetzen. — Das Letztere gilt auch für **arc cot x** und **arc tng x.**

Die identische Gleichung

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

gestattet unter der Voraussetzung, dass entweder $\cos\varphi = x$ oder $\sin\varphi = x$ zur unabhängigen Variablen gemacht werde, wegen der Beziehung

$$\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$$

folgende Abänderungen ihrer Form:

$$e^{i \cdot \operatorname{arc}\cos x} = x + i\sqrt{1 - x^2},$$
$$e^{i \cdot \operatorname{arc}\sin x} = \sqrt{1 - x^2} + ix;$$

und es steht hier frei, $\sqrt{1 - x^2}$ nach Belieben als den positiven oder den negatixen Werth der Quadratwurzel anzunehmen, da nur x als gegeben angesehn wird.

---

[1]) Man findet auch häufig geschrieben: arc cos (= x). Wir ziehn die kürzere Schreibweise vor.

Logarithmirt man beide Seiten dieser Gleichungen nach e, so erhält man wegen der Vieldeutigkeit der Logarithmen [§ 62, (11)]:

$$i \cdot (\text{arc} \cos x + k \cdot 2\pi) = l\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right),$$

$$i \cdot (\text{arc} \sin x + k \cdot 2\pi) = l\left(\sqrt{1 - x^2} + ix\right).$$

Analoge Formen für arc cot x und arc tng x findet man durch Division der Gleichung

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

mit

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \sin\varphi.$$

Es folgt nämlich:

$$e^{i.2\varphi} = \frac{\cos\varphi + i \sin\varphi}{\cos\varphi - i \sin\varphi} = \frac{\cot\varphi + i}{\cot\varphi - i} = \frac{1 + i \operatorname{tng}\varphi}{1 - i \operatorname{tng}\varphi};$$

also, je nachdem man $\cot\varphi = x$ oder $\operatorname{tng}\varphi = x$ setzt:

$$e^{i.2 \text{ arc} \cot x} = \frac{x + i}{x - i},$$

$$e^{i.2 \text{ arc} \operatorname{tng} x} = \frac{1 + ix}{1 - ix};$$

$$i \cdot 2 (\text{arc} \cot x + k\pi) = l \frac{x + i}{x - i},$$

$$i \cdot 2 (\text{arc} \operatorname{tng} x + k\pi) = l \frac{1 + ix}{1 - ix}.$$

Es sind hier vier Gleichungen erhalten worden, welche Arcus in Logarithmen transformiren. Das Entgegengesetzte wird erreicht, wenn man in jeder von ihnen den Numerus als unabhängige Variable einführt und x durch dieselbe ausdrückt. Die einfache Rechnung braucht hier nicht durchgeführt zu werden.

Wir fassen die Resultate zusammen:

Lehrsatz.

Die Arcus und Logarithmen sind Functionen, welche sich in einander transformiren lassen. Es ist nämlich:

(3) $$\operatorname{arc}\cos x = \frac{1}{i} \cdot l\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right) + k \cdot 2\pi,$$

(4) $$\operatorname{arc}\sin x = \frac{1}{i} \cdot l\left(\sqrt{1 - x^2} + ix\right) + k \cdot 2\pi,$$

(5) $$\operatorname{arc}\cot x = \frac{1}{2i} \cdot l\,\frac{x + i}{x - i} + k \cdot \pi,$$

(6) $$\operatorname{arc}\operatorname{tng} x = \frac{1}{2i} \cdot l\,\frac{1 + ix}{1 - ix} + k \cdot \pi;$$

(7) $$lx = i \cdot \operatorname{arc}\cos\frac{x^2 + 1}{2x} + ik \cdot 2\pi,$$

(8) $$lx = i \cdot \operatorname{arc}\sin\frac{x^2 - 1}{i \cdot 2x} + ik \cdot 2\pi,$$

(9) $$lx = i \cdot 2\operatorname{arc}\cot\left(i\frac{x + 1}{x - 1}\right) + ik \cdot 2\pi,$$

(10) $$lx = i \cdot 2\operatorname{arc}\operatorname{tng}\left(i\frac{1 - x}{1 + x}\right) + ik \cdot 2\pi.$$

In jeder von diesen acht Formeln bedeutet k eine willkürliche ganze, positive oder negative Zahl. Die Quadratwurzeln in (3) und (4) dürfen mit jedem ihrer beiden Werthe genommen werden.

Die Arcus lassen sich in Potenzreihen entwickeln. Verlassen wir die Reihenfolge, in welcher sie oben aufgezählt sind, so folgt aus § 42 (7) und (9), wenn man ix für z substituirt:

$$l\,\frac{1+ix}{1-ix} = 2\left\{\frac{ix}{1} + \frac{i^3x^3}{3} + \frac{i^5x^5}{5} + \cdots + \frac{i^{r-2}x^{r-2}}{r-2} + \frac{i^rx^r}{r} \cdot \int_0^1 \frac{dv}{1 - i^2x^2v^{\frac{2}{r}}}\right\},$$

wo r eine ungrade Nummer ist.

Mithin ergiebt sich aus (6) für jeden Werth von x:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tng} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots - (-1)^{\frac{r-1}{2}} \cdot \frac{x^{r-2}}{r-2}$$
$$+ (-1)^{\frac{r-1}{2}} \cdot \frac{x^r}{r} \cdot \int_0^1 \frac{dv}{1 + x^2v^{\frac{2}{r}}} + k \cdot \pi.$$

Das Integral $\int_0^1 \frac{dv}{1+x^2 v^{\frac{2}{r}}}$ fällt unter die Form von J_r in § 39, (8), wenn man dort $n=0$, $z=x^2$ und $\frac{r}{2}$ für r setzt. Mithin kann man bei jedem reellen x und bei jedem rein imaginären x die Formel § 39, (11) auf dasselbe anwenden, und findet:

Bedeutet r eine ungrade Nummer und k eine willkürlich zu wählende positive oder negative ganze Zahl, so ist

$$(11) \qquad \operatorname{arc\,tng} x = k\pi + \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\cdots - (-1)^{\frac{r-1}{2}} \cdot \frac{x^{r-2}}{r-2} + (-1)^{\frac{r-1}{2}} \cdot \frac{x^r}{r} \cdot J_r$$

mit der Bedeutung:

$$(12) \qquad J_r = \int_0^1 \frac{dv}{1+x^2 \cdot \sqrt[r]{v^2}}.$$

Ausser denjenigen rein imaginären Werthen von x, für welche $1+x^2 \cdot \sqrt[r]{v^2}$ zwischen $v=0$ und $v=1$ verschwindet, giebt es sicher[1]) keinen Ausnahmefall.

Ist x **reell**, so folgt:

$$(13) \qquad J_r = 1 : \left\{ 1 + x^2 - \frac{x^2}{\frac{1}{2} r + \theta} \right\}$$

$$= 1 : \left\{ 1 + \frac{r^2 - 4\theta}{r(r+2)} x^2 \right\}, \quad (0 < \theta < 1);$$

und ist x unter Erfüllung der Scala $+0 > x^2 > -1$ **rein imaginär**, so folgt:

$$(14) \qquad J_r = 1 : \left\{ 1 + x^2 - \frac{x^2}{\frac{1}{2} r + \theta^{-1}} \right\}$$

$$= 1 : \left\{ 1 + \frac{r + 2\theta}{r+2} x^2 \right\}, \quad (0 < \theta < 1).$$

---

[1]) d. h.: ob jenes Ausnahmefälle sind, wir wollen hier nicht untersuchen.

Nimmt man x als reell und arc tng x als einen Arcus des ersten Quadranten an, so ergiebt sich:

$$(15)\qquad \operatorname{arc\,tng} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

für $-1 \overline{\overline{<}} x \leqq +1$. Wird $x = +1$ gesetzt, so folgt, weil $\operatorname{arc\,tng} 1 = \frac{\pi}{4}$ ist, **die Leibnitzsche Reihe:**

$$(16)\qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Um noch arc sin x in eine Potenzreihe zu entwickeln, ohne den Taylorschen Satz direct zu benutzen, gehen wir davon aus, dass nach § 61, (9) aus

$$\varphi = \arcsin x, \quad x = \sin\varphi$$

hervorgeht:

$$dx = \cos\varphi\, d\varphi = \sqrt{1-x^2}\, d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Soll daher $\varphi = 0$ für $x = 0$ sein, so muss die Grösse $\cos\varphi = \sqrt{1-x^2}$ für $x = 0$ den Werth $+1$ haben, weil $\cos 0 = +1$ ist. Daher muss die Quadratwurzel in der hieraus entstehenden Relation

$$(17)\qquad \varphi = \arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

mit ihrem positiven Werthe eingeführt werden.

Das Differential lässt sich nach dem binomischen Satze (§ 39) für $x^2 < 1$ als Summe einer Potenzreihe darstellen:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1} x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2} x^4 - \binom{-\frac{1}{2}}{3} x^6 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} x^6 + \cdots$$

Hieraus ergiebt sich nach (14) durch Integration:

$$(18)\qquad \arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Und diese Gleichung gilt auch noch für $x = \pm 1$, weil ihre linke Seite an den Stellen $x = \pm 1$ stetig, und ihre rechte Seite eine für $x = \pm 1$ unbedingt convergirende Potenzreihe ist.

Für $x = +1$ nämlich ist ihr allgemeines Glied

$$(-1)^r \binom{-\frac{1}{2}}{r} \cdot \frac{1}{2r+1} \text{ äquivalent mit } \frac{C}{r^{\frac{1}{2}}(2r+1)} \text{ oder } \frac{C'}{r^{\frac{3}{2}}}$$

(nach § 58, Beispiel I); und es giebt positive Werthe von p, z. B. $p = +\frac{1}{2}$, für welche

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{C'}{r^{\frac{3}{2}}} \cdot r^{1+p} = \lim_{r=\infty} \cdot C' \cdot r^{p-\frac{1}{2}}$$

einen endlichen Werth besitzt.

Macht man aber $x = +1$, so folgt:

$$(19) \qquad \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \cdots$$

Schliesslich mag noch die aus § 42, (13) durch Substitution von e^{ix} für x folgende Formel

$$(20) \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tng} \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tng} \frac{x}{8} + \frac{1}{16} \operatorname{tng} \frac{x}{16} + \cdots$$

erwähnt werden.

Man erhält sie sofort, wenn nach der fraglichen Substitution auf die einzelnen Glieder jener Reihe die Formel anwendet:

$$\frac{e^{iu}-1}{e^{iu}+1} = \frac{e^{i\frac{u}{2}} - e^{-i\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}} + e^{-i\frac{u}{2}}} = \frac{2i \cdot \sin\frac{u}{2}}{2 \cdot \cos\frac{u}{2}} = i \cdot \operatorname{tng}\frac{u}{2},$$

deren Gültigkeit aus § 61, (11) und (12) erkannt wird.

Bricht man die Reihe (20) hinter dem r^{ten} Gliede $\frac{1}{2^r} \operatorname{tng} \frac{x}{2^r}$ ab, so begeht man einen Fehler φ_r, welcher der Scala

$$\frac{x}{3 \cdot 2^{2r}} < \varphi_r < \frac{1}{2^r} \operatorname{tng} \frac{x}{2^{r+1}}$$

genügt, sobald r gross genug geworden ist, damit der Werth von $\frac{x}{2^{r+1}}$ im ersten Quadranten liegt. — Denn dann werden die weggelassenen Glieder sämmtlich verkleinert, wenn man in ihnen jeden Tangens durch den Arcus ersetzt, und vergrössert, wenn man in ihnen jeden Tangens durch $\operatorname{tng} \frac{x}{2^{r+1}}$ ersetzt.

Übrigens lässt sich die Gleichung (20) auch so schreiben:

(21) $$\frac{1}{x} = \frac{1}{2^r} \cdot \cot \frac{x}{2^r} + \varphi_r,$$

was sich durch directe Summation ergiebt; hierdurch wird sie unter Benutzung der Relation $\lim_{n=0} \cdot \frac{\sin u}{u} = 1$ zugleich verificirt.

Für $x = \pi$ folgt aus (20) die Reihe

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} \operatorname{tng} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tng} \frac{\pi}{8} + \frac{1}{16} \operatorname{tng} \frac{\pi}{16} + \cdots,$$

deren Glieder berechnet werden können, weil $\operatorname{tng} \frac{\pi}{4} = 1$ und

$$\operatorname{tng} \frac{u}{2} = -\frac{1}{\operatorname{tng} u} + \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tng} u^2}}$$

ist.

§ 65.

Numerische Berechnung von π.

Indem wir hier diejenigen Methoden, welche sich mehr oder weniger auf geometrische Betrachtungen stützen, bei Seite lassen, so bleiben uns aus dem Vorhergehenden zwei Wege offen: 1. die Einschliessung der kleinsten Wurzel der Gleichung $\cos x = 0$ in immer engere Grenzen, wie sie in § 61 begonnen wurde, um die Existenz und ungefähre Grösse derselben nachzuweisen; 2. die Annäherung vermittelst der Formeln des vorigen § für die inversen Kreisfunctionen.

Auf die erste Weise haben wir bereits gesehn, dass $\frac{\pi}{2} = \omega$ zwischen $\sqrt{2}$ und 2 liegt. Ohne weitläufige numerische Rechnungen zu machen, findet man bald eine genügende Annäherung.

Da nämlich die gesuchte Wurzel der Gleichung

$$0 = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

so klein ist, dass bei der Substitution ihrer zwischen $\sqrt{2} = 1{,}414 \cdots$ und 2 liegenden Näherungswerthe der Rest der unendlichen Reihe im Vorzeichen mit dem ersten vernachlässigten Gliede übereinstimmt und, absolut genommen, dasselbe nicht erreicht (§ 61), und da $\cos x$ bei wachsendem x vom Positiven zum Negativen übergeht, so ist derjenige Werth von x zu gross, für welchen

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 0$$

wird. Die kleinste Wurzel dieser Gleichung, $x = 1{,}592\ldots$, ist demnach zu gross; und es liegt, weil das arithmetische Mittel zwischen ihr und 1,414 den Werth 1,503 hat, der bequemen Rechnung wegen nahe, den Versuch mit $x = 1{,}5 = \frac{3}{2}$ zu machen.

Man findet:

$$\cos 1{,}5 = 1 - \frac{9}{8} + \frac{27}{128} - \frac{81}{5120} + \frac{729}{1146880} - \cdots$$

$$\cdots = + \frac{359}{5120} + \frac{729}{1146880} - \cdots,$$

weshalb

$$1{,}5 < \frac{\pi}{2} < 1{,}59\ldots$$

sein muss.

Setzen wir nun zum Zweck der weiteren Annäherung

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}5 + z,$$

so folgt aus § 61, (14):

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 1{,}5 \cdot \cos z - \sin 1{,}5 \cdot \sin z,$$

$$\operatorname{tng} z = \frac{\cos 1{,}5}{\sin 1{,}5} = \frac{\frac{359}{5120} + \frac{729}{1146880} - \cdots}{\frac{3}{2} \cdot \left[\frac{427}{640} - \frac{81}{35840} + \cdots\right]},$$

da sich der im Nenner stehende Werth für sin 1,5 aus § 61, (3) ergiebt. Ziehen wir den Zähler und den Nenner, so weit sie geschrieben sind, in Rechnung, und setzen für tng z den nicht voll so grossen Werth z, so ist der resultirende Näherungswerth:

$$z = 0{,}0709\ldots$$

Mithin ist

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}5709\ldots$$

etwas zu gross, schon weil wir den Nenner von tng z zu klein und den Zähler zu gross gemacht haben.

Bekanntlich ist $\frac{\pi}{2} = 1{,}570\,796\ldots$ — Man wird diesem Werthe noch bedeutend näher kommen, wenn man von Neuem $\frac{\pi}{2} = 1{,}5709 - z_1$, setzt und dieses z_1 in der zuletzt dargestellten Weise berechnet. Uns genügt es hier, die Wirksamkeit dieser Methode illustrirt und durch den Vergleich mit dem wahren Werth gezeigt zu haben, dass der Fehler z_1 nur noch ungefähr 0,0001 beträgt.

Die geringste Mühe macht die Berechnung von π, sobald man die in § 64 gefundenen Ausdrücke für die Arcus zu Grunde legt, nur muss man sich nicht der langsam convergirenden Reihen (16) und (19) bedienen wollen.

Wirksamer sind schon die Formeln, welche aus (15) für $\operatorname{arc\,tng}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ und aus (18) für $\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ entstehn, nämlich:

$$(1)\qquad \frac{\pi}{2} = \sqrt{3}\cdot\left\{1 - \frac{1}{3\cdot 3^1} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \cdots\right\},$$

$$(2)\qquad \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot 3}{8\cdot 16} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 16\cdot 24} + \cdots$$

Man kann aber leicht eine beliebige Anzahl weit schneller convergirender Ausdrücke bilden, wenn man über (2n) Zahlen $\alpha_1, a_1; \alpha_2, a_2; \ldots; \alpha_n, a_n$ so disponirt, dass

$$(3)\qquad \alpha_1\cdot\operatorname{arc\,tng} a_1 + \alpha_2\cdot\operatorname{arc\,tng} a_2 + \cdots + \alpha_n\cdot\operatorname{arc\,tng} a_n = \frac{\pi}{4}\,[1])$$

---

[1]) Es liesse sich jeder andere aliquote Theil von π, dessen Tangens bekannt ist, in ähnlicher Weise verwenden.

wird. Nun folgt aber aus der Transformationsformel (6) des vorigen §:

$$\alpha_1 \cdot \operatorname{arc\,tng} a_1 + \alpha_2 . \operatorname{arc\,tng} a_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \operatorname{arc\,tng} a_n$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \alpha_1 \cdot l \frac{1+ia_1}{1-ia_1} + \alpha_2 \cdot l \frac{1+ia_2}{1-ia_2} + \cdots + \alpha_n \cdot l \frac{1+ia_n}{1-ia_n} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \, l \left\{ \left(\frac{1+ia_1}{1-ia_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1+ia_2}{1-ia_2} \right)^{\alpha_2} \cdot \cdot \cdot \left(\frac{1+ia_n}{1-ia_n} \right)^{\alpha_n} \right\}.$$

Daher erkennt man durch Vergleichung dieser Relation mit

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tng} 1 = \frac{1}{2i} \, l \, \frac{1+i}{1-i},$$

dass unser Zweck erreicht wird, wenn die fraglichen Zahlen der Gleichung

$$(4) \qquad \left(\frac{1+ia_1}{1-ia_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1+ia_2}{1-ia_2} \right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{1+ia_n}{1-ia_n} \right)^{\alpha_n} = \frac{1+i}{1-i}$$

genügen. Dieselbe enthält (2n) Unbekannte a_1, α_1; ...; a_n, α_n und gestattet daher, (2n—1) Unbekannten willkürliche Werthe zu geben und dann die (2n)te zu bestimmen.

Wir wollen einen besondern Fall weiter verfolgen, indem wir $n = 2$, $\alpha_2 = 1$ setzen.

Eine Rechnung, welche so einfach ist, dass sie hier nicht vorgeführt zu werden braucht, giebt folgendes Resultat:

Nimmt man in der Gleichung

$$(5) \qquad \left(\frac{1+ia}{1-ia} \right)^{\alpha} \cdot \frac{1+ib}{1-ib} = \frac{1+i}{1-i}$$

für α eine ganze und für a eine rationale Zahl, so wird auch b eine rationale Zahl; und zwar ergiebt sich, wenn

$$(6) \qquad \left(\frac{1+ia}{1-ia} \right)^{\alpha} = \frac{p+iq}{p-iq}$$

gesetzt wird:

$$(7) \qquad b = \frac{p-q}{p+q}.$$

Ausserdem ist:

(8) $$\frac{\pi}{4} = \alpha \cdot \operatorname{arc\,tng} a + \operatorname{arc\,tng} b,$$

wenn man für diese Arcus ihre dem absoluten Betrage nach kleinsten Werthe setzt.

Z. B. ergiebt sich für $a = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$:

$$\left(\frac{1+ia}{1-ia}\right)^{\alpha} = \frac{2+i}{2-i}, \quad p = 2, \quad q = 1, \quad b = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3};$$

(9) $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tng}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tng}\frac{1}{3}.$$

Für $a = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2$ folgt:

$$\left(\frac{1+ia}{1-ia}\right)^{\alpha} = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^{2} = \frac{3+i4}{3-i4}, \quad p = 3, \quad q = 4, \quad b = \frac{3-4}{3+4} = -\frac{1}{7};$$

(10) $$\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \operatorname{arc\,tng}\frac{1}{2} - \operatorname{arc\,tng}\frac{1}{7}.$$

Für $a = \frac{1}{5}$, $\alpha = 4$ folgt:

$$\left(\frac{1+ia}{1-ia}\right)^{\alpha} = \left(\frac{5+i}{5-i}\right)^{4} = \frac{119+i\,120}{119-i\,120}, \quad b = -\frac{1}{239}:$$

(11) $$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \operatorname{arc\,tng}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tng}\frac{1}{239}.$$

Will man die Formel (11) zur Berechnung von π benutzen, so findet man aus § 64, (15):

$$\operatorname{arc\,tng}\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots$$

$$= \frac{2}{10} - \frac{2^3}{3\cdot 1000} + \frac{2^5}{5\cdot 100\,000} - \frac{2^7}{7\cdot 10\,000\,000} + \cdots,$$

wo das bei der numerischen Rechnung zuletzt benutzte Glied noch mit einer Zahl $J_\mathfrak{r}$ multiplicirt werden muss, welche nach

§ 64, (13) sich dem Grenzwerthe $\frac{25}{26}$ nähert und, falls man hier mit dem zuletzt geschriebenen Gliede abbricht, zwischen $\frac{35}{36}$ und $\frac{225}{232}$ liegt. Der Subtrahend auf der rechten Seite von (11) ist noch schneller convergent und berechnet sich nach der Formel:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,tng} \frac{1}{239} &= \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots \\ &= \frac{1}{239} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{3 \cdot 57121} + \frac{1}{5 \cdot 57121^2} - \frac{1}{7 \cdot 57121^3} + \cdots \right\}; \end{aligned}$$

wo dasjenige Glied, mit welchem man die Rechnung abbricht, mit einer zwischen $\frac{57121}{57122}$ und 1 liegenden Zahl multiplicirt werden muss, um $\operatorname{arc\,tng} \frac{1}{239}$ genau zu erhalten.

Es erfordert deshalb keine grosse Mühe, um π aus (11) auf eine beträchtliche Anzahl von Decimalstellen genau zu berechnen. Durch 36 Decimalstellen dargestellt ist:

$$(12) \begin{cases} \pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\ldots, \\ \frac{\pi}{2} = 1,570\,796\,326\,794\,896\,619\,231\,321\,691\,639\,751\,442\ldots. \end{cases}$$

Bekanntlich hat man bei den Anwendungen der Arithmetik auf die Geometrie den rechten Winkel in 90 gleiche Theile getheilt und gebraucht die Benennung „Grad" eines solchen Theils sowohl für den Winkel selbst, wie für dessen Maasszahl, d. i. für die Maasszahl desjenigen mit dem Radius gemessenen Bogens, auf welchem der 90ste Theil des rechten Winkels als Centriwinkel steht.

Da nun nach § 63 die Maasszahl des rechten Winkels $= \frac{\pi}{2}$ ist, so versteht man demnach unter der Zahl 1^0 den Werth von $\frac{\pi}{180}$, d. i.:

$$(13)\ 1^0 = \frac{\pi}{180} = 0,017\,453\,292\,519\,943\,295\,769\,236\,907\,684\,886\,127\ldots$$

Desgleichen nennt man den 60sten Theil hiervon „eine Minute":

$$1' = \frac{\pi}{10\,800} = 0,000\,290\,888\,208\,666\ldots,$$

und den 60sten Theil hiervon „eine Secunde":

$$1'' = \frac{\pi}{648\,000} = 0,000\,004\,848\,136\,811\ldots$$

Umgekehrt ist:

$$\begin{aligned} 1 &= 57^0,\,295\,779\,513\,082\,321 \\ &= 3\,437',\,746\,770\,784\,939\,253 \\ &= 206\,264'',\,806\,247\,096\,355\,152. \end{aligned}$$

§ 66.

Darstellung der Kreisfunctionen durch unendliche Reihenproducte nebst den nächstliegenden Folgerungen auf Reihensummen und die Bernoullischen Zahlen.

Um zunächst nur mit reellen Formen zu operiren, beginnen wir mit der Zerfällung

$$\text{(1)} \qquad \sin x = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} = 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

und wiederholen dieselbe eine beliebige Anzahl mal bei jedem Factor der rechten Seite. Es ergiebt sich nach und nach:

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \cdot 2 \sin\frac{x}{4} \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2^3 \sin\frac{x}{4} \sin\frac{x+\pi}{4} \sin\frac{x+2\pi}{4} \sin\frac{x+3\pi}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x = 2^3 \cdot 2 \sin\frac{x}{8} \sin\left(\frac{x}{8} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 \sin\frac{x+\pi}{8} \sin\left(\frac{x+\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cdot 2 \sin\frac{x+2\pi}{8} \sin\left(\frac{x+2\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 \sin\frac{x+3\pi}{8} \sin\left(\frac{x+3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) \\ = 2^7 \cdot \sin\frac{x}{8} \sin\frac{x+\pi}{8} \sin\frac{x+2\pi}{8} \sin\frac{x+3\pi}{8} \sin\frac{x+4\pi}{8} \sin\frac{x+5\pi}{8} \\ \cdot \sin\frac{x+6\pi}{8} \sin\frac{x+7\pi}{8}, \end{aligned}$$

u. s. w.; allgemein:

$$(2)\quad \sin x = 2^{2n-1}\cdot \sin\frac{x}{2n}\,\sin\frac{x+\pi}{2n}\,\sin\frac{x+2\pi}{2n}\,\sin\frac{x+3\pi}{2n}\cdots$$
$$\cdots\sin\frac{x+(2n-1)\pi}{2n},$$

wo n eine Potenz von 2 bedeutet. — Um $\sin x$ in dieser Form zu erhalten, braucht man nur bei jeder neuen Anwendung der Zerfällung (1) nach der Zusammenfassung der Factoren 2 zuerst die ersten und dann die zweiten noch übrigen Factoren der einzelnen Producte nach einander hinzuschreiben.

Bedenkt man nun, dass

$$\sin\frac{x+(2n-k)\pi}{2n} = \sin\left(\pi - \frac{k\pi - x}{2n}\right) = \sin\frac{k\pi - x}{2n},$$

mithin:

$$\sin\frac{x+k\pi}{2n}\cdot\sin\frac{x+(2n-k)\pi}{2n} = \sin\frac{k\pi+x}{2n}\cdot\sin\frac{k\pi-x}{2n}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2x}{2n} - \cos\frac{k\cdot 2\pi}{2n}\right] = \sin^2\frac{k\pi}{2n} - \sin^2\frac{x}{2n}$$

ist, so lässt sich die Formel (2) — wenn man die nach der Absonderung von $2^{2n-1}\sin\frac{x}{2n}$ noch übrig bleibenden Factoren in der Weise zusammennimmt, wie sie gleich weit von den Enden abstehn — auch so schreiben:

$$\sin x = 2^{2n-1}\sin\frac{x}{2n}\cdot\left(\sin^2\frac{\pi}{2n} - \sin^2\frac{x}{2n}\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{2n} - \sin^2\frac{x}{2n}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n} - \sin^2\frac{x}{2n}\right)\cdot\sin\frac{n\pi+x}{2n},$$

oder weil

$$\sin\frac{n\pi+x}{2n} = \cos\frac{x}{2n},\quad 2\sin\frac{x}{2n}\cos\frac{x}{2n} = \sin\frac{x}{n}$$

ist, auch so:

$$(3)\ \sin x = 2^{2n-2}\sin\frac{x}{n}\cdot\left(\sin^2\frac{\pi}{2n} - \sin^2\frac{x}{2n}\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{2n} - \sin^2\frac{x}{2n}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n} - \sin^2\frac{x}{2n}\right).$$

Dividirt man beide Seiten dieser Gleichung durch x und nimmt den Grenzwerth für $\lim \cdot x = 0$, so erhält man, weil nach § 63, (4)

$$\lim_{x=0} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x=0} \cdot \frac{\sin \frac{x}{n}}{x} = \frac{1}{n}$$

ist, die sogleich weiter zu verwendende Relation:

$$1 = 2^{2n-2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2n} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{2n} \cdots\cdots \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Diese letztere liefert nämlich durch die Division in (3):

$$\sin x = n \sin \frac{x}{n} \cdot \left\{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n}}\right\} \cdot \left\{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n}}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n}}\right\} \cdot \left\{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n}}{\sin^2 \frac{3\pi}{2n}}\right\} \cdots\cdots \left\{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n}}{\sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}}\right\};$$

und hieraus geht bei unendlich wachsendem n hervor:

$$(4) \qquad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2 \pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2}\right)\cdots,$$

weil

$$\lim_{n=\infty} \cdot n \sin \frac{x}{n} = x \cdot \lim_{n=\infty} \cdot \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = x \cdot 1, \quad \lim_{n=\infty} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2n}}{\sin \frac{k\pi}{2n}} = \frac{x}{k\pi}$$

ist, und das Product auf der rechten Seite von (4) für jedes x **unbedingt** convergirt (§ 57, Beisp. II, wenn man in diesem $-\frac{x^2}{\pi^2}$ für x und $p = +1$ setzt).

In einer etwas bequemeren Form stellt sich (4) durch die Substitution von πx für x so dar:

(5) $$\sin(\pi x) = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\cdots$$

Für $x = \frac{1}{2}$ ergiebt sich hieraus:

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\cdots$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdots,$$

mithin:

(6) $$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdots$$ [1])

Substituirt man in (5) aber $\left(\frac{1}{2} - x\right)$ für x, so geht die linke Seite in $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) = \cos(\pi x)$ über; und rechts kann man

$$1 - \frac{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2}{k^2} = \frac{4k^2 - (1-2x)^2}{4k^2} = \frac{(2k - 1 + 2x)}{2k}\cdot\frac{(2k + 1 - 2x)}{2k}$$

schreiben. Daher folgt:

(7) $$\cos(\pi x)$$

$$= \pi\cdot\frac{1-2x}{2}\cdot\frac{(1+2x)\cdot(3-2x)}{2\cdot 2}\cdot\frac{(3+2x)\cdot(5-2x)}{4\cdot 4}\cdot\frac{(5+2x)\cdot(7-2x)}{6\cdot 6}\cdots$$

Führt man hier noch den Ausdruck (6) für π ein, so erhält man:

$$\cos(\pi x)$$

$$= (1-2x)\cdot\frac{(1+2x)(3-2x)}{1\cdot 3}\cdot\frac{(3+2x)(5-2x)}{3\cdot 5}\cdot\frac{(5+2x)(7-2x)}{5\cdot 7}\cdots$$

oder:

(8) $$\cos(\pi x) = \left(1 - \frac{4x^2}{1^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{4x^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{7^2}\right)\cdots;$$

was ebenfalls ein unbedingt convergenter Ausdruck ist.

---

[1]) Dies ist die nach John Wallis (1616—1703) benannte Formel.

Substituirt man in (5) und (8) ix für x und benutzt links die Transformationsformeln § 61, (26) und (27), nämlich

$$\sin(i\pi x) = i\frac{e^{+\pi x} - e^{-\pi x}}{2}, \quad \cos(i\pi x) = \frac{e^{+\pi x} + e^{-\pi x}}{2},$$

so ergiebt sich:

$$(9) \qquad \frac{e^{+\pi x} - e^{-\pi x}}{2} = \pi x\left(1 + \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{3^2}\right)\cdots,$$

$$(10) \qquad \frac{e^{+\pi x} + e^{-\pi x}}{2} = \left(1 + \frac{4x^2}{1^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{3^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{5^2}\right)\cdots$$

Dividirt man (5) und (7) oder (8) durch einander, so erhält man unbedingt convergente Ausdrücke für $\operatorname{tng}(\pi x)$ und $\cot(\pi x)$, von denen wir hier nur einen notiren wollen, die Aufstellung der übrigen dem Leser überlassend. Aus (5) und (7) folgt, wenn man noch x in $\frac{x}{2}$ verwandelt:

$$(11) \quad \operatorname{tng}\frac{\pi x}{2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{(2+x)(4-x)}{(3-x)(3+x)} \cdot \frac{(4+x)(6-x)}{(5-x)(5+x)} \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1-2x}{1^2-x^2}\right)\left(1 - \frac{1-2x}{3^2-x^2}\right)\left(1 - \frac{1-2x}{5^2-x^2}\right)\cdots,$$

wo x nur keine ungrade Zahl sein darf.

Logarithmirt man die Gleichungen (5) und (8), so erhält man rechts unbedingt convergente Reihen, deren Glieder die Form

$$u_r = l\left(1 - \frac{x^2}{(a+r)^2}\right)$$

bei einem ganzzahlig wachsenden r haben.

Es ist daher einerseits gestattet, diese Logarithmen in Potenzreihen zu entwickeln, so weit dieselben convergiren, und dabei die Doppelsumme nach steigenden Potenzen von x zu gruppiren; andrerseits darf man die fraglichen Gleichungen gliedweise differentiiren, weil wegen der Ausdrücke

$$\frac{du_r}{dx} = -\frac{2x}{(a+r)^2 - x^2}, \quad \frac{d^2u_r}{dx^2} = -2 \cdot \frac{(a+r)^2 + x^2}{[(a+r)^2 - x^2]^2}$$

die Reihe der zweiten Derivirten convergirt, (§ 59 L. I).

Thun wir zunächst das Letztere zuerst, so erhalten wir aus (5) ohne eine andere Einschränkung, als dass x keine ganze Zahl sei:

$$(12) \begin{cases} \pi x \cot(\pi x) = 1 - \frac{2x^2}{1^2 - x^2} - \frac{2x^2}{2^2 - x^2} - \frac{2x^2}{3^2 - x^2} - \cdots, \\ \pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} \\ \qquad - \frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x} - \cdots \end{cases}$$

$$(13) \quad \frac{\pi}{2} \operatorname{tng}(\pi x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{3-2x} - \frac{1}{3+2x} + \frac{1}{5-2x} - \frac{1}{5+2x} + \cdots$$

oder, wenn man hier $\frac{x}{2}$ für x setzt:

$$(14) \quad \frac{\pi}{2} \operatorname{tng} \frac{\pi x}{2}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} + \frac{1}{5-x} - \frac{1}{5+x} + \cdots$$

$$= 2x \cdot \left\{ \frac{1}{1^2 - x^2} + \frac{1}{3^2 - x^2} + \frac{1}{5^2 - x^2} + \frac{1}{7^2 - x^2} + \cdots \right\};$$

und hieraus durch Substitution von $\frac{1+x}{2}$ für x:

$$(15) \quad \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tng} \frac{\pi(1+x)}{4}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3+x} + \frac{1}{5-x} - \frac{1}{7+x} + \frac{1}{9-x} - \frac{1}{11+x} + \cdots.$$

Wegen der Identitäten

$$\frac{1}{\sin\varphi} = 2\cdot\left\{\cot\frac{\varphi}{2} + \operatorname{tng}\frac{\varphi}{2}\right\}, \quad \cos\frac{\pi x}{2} = \sin\frac{\pi(1-x)}{2}$$

folgt aus diesen Gleichungen noch:

$$(16)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\pi}{\sin(\pi x)} \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} - \cdots, \\
&\frac{\pi x}{\sin(\pi x)} \\
&= 1 + \frac{2x^2}{1^2-x^2} - \frac{2x^2}{2^2-x^2} + \frac{2x^2}{3^2-x^2} - \frac{2x^2}{4^2-x^2} + \cdots;
\end{aligned}\right.$$

$$(17) \qquad \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} + \frac{1}{5-x} + \frac{1}{5+x} - \cdots$$

$$= \frac{2\cdot 1}{1^2-x^2} - \frac{2\cdot 3}{3^2-x^2} + \frac{2\cdot 5}{5^2-x^2} - \frac{2\cdot 7}{7^2-x^2} + \cdots.$$

Gehen wir jetzt zur Entwickelung der Logarithmen, der Ausdrücke (5) und (8), wie auch der übrigen, in Potenzreihen über, so ist es von vorne herein ersichtlich, dass in den Coefficienten dieser Reihen Summen der reciproken Potenzen der ganzen Zahlen vorkommen: mit gleichen und mit abwechselnden Vorzeichen. Sieht man näher zu, so sind dies folgende Formen:

$$(18) \qquad s_{2m} = \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \cdots,$$

$$(19) \qquad s'_{2m} = \frac{1}{1^{2m}} - \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} - \frac{1}{4^{2m}} + \cdots,$$

$$(20) \qquad c_m = \frac{1}{1^m} + \frac{(-1)^m}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{(-1)^m}{7^m} + \cdots.$$

Die beiden ersteren lassen sich leicht durch die dritte ausdrücken. Zuerst nämlich ist augenscheinlich:

$$s_{2m} = c_{2m} + \frac{1}{2^{2m}} \cdot s_{2m},$$

(21) $$s_{2m} = \frac{2^{2m}}{2^{2m}-1} \cdot c_{2m}, \quad c_{2m} = \left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right) \cdot s_{2m} = \frac{2^{2m}-1}{2^{2m}} \cdot s_{2m};$$

und ferner:

$$s_{2m} + s'_{2m} = 2c_{2m}, \quad s_{2m} - s'_{2m} = \frac{s_{2m}}{2^{2m-1}} = \frac{2}{2^{2m}-1} \cdot c_{2m};$$

also:

(22) $$s'_{2m} = \frac{2^{2m}-2}{2^{2m}-1} \cdot c_{2m} = \left(1 - \frac{1}{2^{2m-1}}\right) \cdot s_{2m} = 2c_{2m} - s_{2m}.$$

Lassen wir die ferner liegenden Beziehungen vorläufig ausser Acht, so folgt aus (5) und (8) sofort:

(23) $$l\,\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$= -\frac{1}{1}s_2 x^2 - \frac{1}{2}s_4 x^4 - \frac{1}{3}s_6 x^6 - \frac{1}{4}s_8 x^8 - \cdots$$

$$= -\frac{1}{1} \cdot \frac{c_2}{1-\frac{1}{4^1}} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{c_4}{1-\frac{1}{4^2}} \cdot x^4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{c_6}{1-\frac{1}{4^6}} \cdot x^6 - \frac{1}{4} \cdot \frac{c_8}{1-\frac{1}{4^8}} \cdot x^8 - \cdots,$$

(24) $$l \cos\frac{\pi x}{2}$$

$$= -\frac{1}{1} \cdot c_2 \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot c_4 \cdot x^4 - \frac{1}{3} \cdot c_6 \cdot x^6 - \frac{1}{4} \cdot c_8 \cdot x^8 - \cdots.$$

Nimmt man hinzu, dass

$$l\,\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} - 2\,l\cos\frac{\pi x}{2} = l\,\frac{\operatorname{tng}\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}$$

ist, so ergiebt sich hieraus ferner:

(25)
$$l\,\frac{\operatorname{tng}\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}$$
$$=+\frac{1}{1}\cdot(2c_2-s_2)x^2+\frac{1}{2}\cdot(2c_4-s_4)x^4+\frac{1}{3}\cdot(2c_6-s_6)x^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1}\cdot s'_2\,x^2+\frac{1}{2}\cdot s'_4\,x^4+\frac{1}{3}\cdot s'_6\,x^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1}\cdot\frac{4^1-2}{4^1-1}\,c_2\,x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{4^2-2}{4^2-1}\,c_4\,x^4+\frac{1}{3}\cdot\frac{4^3-2}{4^3-1}\,c_6\,x^6+\cdots$$

Ausserdem folgt aus (12) bis (17):

(26)
$$\pi x\cdot\cot(\pi x)$$
$$=1-2s_2x^2-2s_4x^4-2s_6x^6-2s_8x^8-\cdots$$
$$=1-\frac{2c_2}{1-\frac{1}{4^1}}x^2-\frac{2c_4}{1-\frac{1}{4^2}}x^4-\frac{2c_6}{1-\frac{1}{4^3}}x^6-\frac{2c_8}{1-\frac{1}{4^4}}x^8-\cdots,$$

(27)
$$\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tng}\frac{\pi x}{2}=c_2x+c_4x^3+c_6x^5+c_8x^7+\cdots,$$

(28)
$$\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tng}\frac{\pi(1+x)}{4}=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+c_5x^4+\cdots,$$

(29)
$$\frac{\pi x}{\sin(\pi x)}=1+2s'_2x^2+2s'_4x^4+2s'_6x^6+\cdots,$$
$$=1+\frac{4^1-2}{4^1-1}\cdot 2c_2x^2+\frac{4^2-2}{4^2-1}\cdot 2c_4x^4+\frac{4^3-2}{4^3-1}\cdot 2c_6x^6+\cdots,$$

(30)
$$\frac{\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=2c_1+2c_3x^2+2c_5x^4+2c_7x^6+\cdots$$

Die Entwickelungen (23) bis (30) gelten sämmtlich im Bereich $-1<x<1$. Substituirt man ferner in ihnen für das bisher als reell angesehne x eine rein imaginäre Zahl, so behalten sie sämmtlich ihre Gültigkeit in demselben Umfange. Z. B. folgt aus (26) und (27):

(31) $$\pi x \frac{e^{+\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{+\pi x} - e^{-\pi x}}$$

$$= 1 + 2s_2 x^2 - 2s_4 x^4 + 2s_6 x^6 - 2s_8 x^8 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{2c_2}{1 - \frac{1}{4^1}} x^2 - \frac{2c_4}{1 - \frac{1}{4^2}} x^4 + \frac{2c_6}{1 - \frac{1}{4^3}} x^6 - \frac{2c_8}{1 - \frac{1}{4^4}} x^8 + \cdots,$$

(32) $$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{+\frac{\pi x}{2}} - e^{-\frac{\pi x}{2}}}{e^{+\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}} = c_2 x - c_4 x^3 + c_6 x^5 - c_8 x^7 + \cdots$$

Diese beiden Gleichungen ergeben vermittelst einer einfachen Transformation:

(33) $$\frac{2\pi x}{e^{2\pi x} - 1} = 1 - \pi x + 2s_2 x^2 - 2s_4 x^4 + 2s_6 x^6 - 2s_8 x^8 + \cdots$$

$$= 1 - \pi x + \frac{2c_2}{1 - \frac{1}{4^1}} x^2 - \frac{2c_4}{1 - \frac{1}{4^2}} x^4 + \frac{2c_6}{1 - \frac{1}{4^3}} x^6 - \frac{2c_8}{1 - \frac{1}{4^4}} x^8 + \cdots,$$

(34) $$\frac{\pi}{e^{\pi x} + 1} = \frac{\pi}{2} - 2c_2 x + 2c_4 x^3 - 2c_6 x^5 + 2c_8 x^7 - \cdots.$$

Aus (29) und (30) folgt:

(35) $$\frac{2\pi x}{e^{+\pi x} - e^{-\pi x}} = 1 - 2s'_2 x^2 + 2s'_4 x^4 - 2s'_6 x^6 + 2s'_8 x^8 - \cdots$$

$$= 1 - \frac{4^1 - 2}{4^1 - 1} \cdot 2c_2 x^2 + \frac{4^2 - 2}{4^2 - 1} \cdot 2c_4 x^4 - \frac{4^3 - 2}{4^3 - 1} \cdot 2c_6 x^6 + \cdots,$$

(36) $$\frac{\frac{\pi}{2}}{e^{+\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}}$$

$$= 2c_1 - 2c_3 x^2 + 2c_5 x^4 - 2c_7 x^6 + 2c_9 x^8 - \cdots.$$

Die Gleichungen (26) bis (36) sind sämmtlich geeignet, die hier als Hülfsgrössen auftretenden Reihensummen s_m, s'_m, c_m aus π zu berechnen — und umgekehrt. Man braucht nämlich bloss die einzelne Gleichung mit dem Nenner der linken Seite zu multipliciren, die für ihn bekannte Potenzreihe anstatt seiner einzuführen und das Product nach der Vorschrift von § 55, (4) wieder in eine Potenzreihe zu verwandeln. Da dann die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung gleich werden müssen (§ 59 Z.), so ergiebt sich eine ausreichende Anzahl synthetischer Gleichungen für die s_m, s'_m, c_m.

Richten wir unser Augenmerk zunächst auf die Bestimmung der c_m, so folgt aus (30):

$$\frac{\pi}{2} = \left(2c_1 + 2c_3 x^2 + 2c_5 x^4 + \cdots\right)\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{2!\,2^2} + \frac{\pi^4 x^4}{4!\,2^4} - \cdots\right),$$

also:

(37) $$\frac{\pi}{2} = 2c_1, \quad c_1 = \frac{\pi}{4},$$

(38) $$0 = c_{2m+1} - c_{2m-1}\cdot\frac{\pi^2}{2!\,2^2} + c_{2m-3}\cdot\frac{\pi^4}{4!\,2^4} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^m\cdot c_1\cdot\frac{\pi^{2m}}{(2m)!\,2^{2m}};$$

und aus (27):

$$\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\pi^1 x^1}{1!\,2^1} - \frac{\pi^3 x^3}{3!\,2^3} + \frac{\pi^5 x^5}{5!\,2^5} - \cdots\right)$$
$$= \left(c_2 x + c_4 x^3 + c_6 x^5 + \cdots\right)\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{2!\,2^2} + \frac{\pi^4 x^4}{4!\,2^4} - \cdots\right),$$

also:

(39) $$0 = c_{2m} - c_{2m-2}\cdot\frac{\pi^2}{2!\,2^2} + c_{2m-4}\cdot\frac{\pi^4}{4!\,2^4} - \cdots$$
$$\cdots - (-1)^m\cdot c_2\cdot\frac{\pi^{2m-2}}{(2m-2)!\,2^{2m-2}} + (-1)^m\cdot\frac{\pi^{2m}}{(2m-1)!\,2^{2m+1}}.$$

Die Formeln (38) und (39) lassen sich durch die Substitution

(40) $$c_m = \frac{\pi^m}{(m-1)!\; 2^{m+1}} \cdot u_m$$

auf eine einzige Grundform

(41) $$u_m - \binom{m-1}{2} \cdot u_{m-2} + \binom{m-1}{4} \cdot u_{m-4} - \binom{m-1}{6} \cdot u_{m-6} + \cdots \cdots = \sin \frac{(m-1)\pi}{2}$$

bringen, in welcher die linke Seite bei einem graden m mit

$$-(-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \binom{m-1}{m-2} \cdot u_2 = -(-1)^{\frac{m}{2}} \cdot (m-1) \cdot u_2,$$

bei einem ungraden m mit

$$+(-1)^{\frac{m-1}{2}} \binom{m-1}{m-1} \cdot u_1 = +(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot u_1$$

abschliesst; — bei einem graden m ist die rechte Seite $= (-1)^{\frac{m}{2}-1}$ $= +1$, bei jedem ungraden m aber $= 0$.

Die Gleichung (41) gestattet die succesive Berechnung der u_m mit gradem Index und ebenso derjenigen mit ungradem Index aus einander. Sie giebt beispielsweise für grade Indices:

(42) $$u_2 = \sin \frac{\pi}{2} = +1;$$

$$u_4 - \binom{3}{2} \cdot u_2 = \sin \frac{3\pi}{2} = -1,$$

(43) $$u_4 = 2;$$

$$u_6 - \binom{5}{2} \cdot u_4 + \binom{5}{4} u_2 = \sin \frac{5\pi}{2} = +1,$$

(44) $$u_6 = 16;$$

$$u_8 - \binom{7}{2} \cdot u_6 + \binom{7}{4} u_4 - \binom{7}{6} u_2 = \sin \frac{7\pi}{2} = -1,$$

(45) $$u_8 = 272.$$

Für die ungraden Indices folgt, weil nach (37) $c_1 = \frac{\pi}{4}$ ist, aus (40):

(46) $$u_1 = 1;$$

und dann aus (41):

$$u_3 - \binom{2}{2} u_1 = 0,$$

(47) $$u_3 = 1;$$

$$u_5 - \binom{4}{2} u_3 + \binom{4}{4} u_1 = 0,$$

(48) $$u_5 = 5;$$

$$u_7 - \binom{6}{2} \cdot u_5 + \binom{6}{4} \cdot u_3 - \binom{6}{6} \cdot u_1 = 0,$$

(49) $$u_7 = 61;$$

$$u_9 - \binom{8}{2} \cdot u_7 + \binom{8}{4} \cdot u_5 - \binom{8}{6} \cdot u_3 + \binom{8}{8} \cdot u_1 = 0,$$

(50) $$u_9 = 1385.$$

Da die Binomialcoefficienten, welche in die Gleichung (41) oder

$$u_m = \binom{m-1}{2} \cdot u_{m-2} - \binom{m-1}{4} \cdot u_{m-4} + \binom{m-1}{6} \cdot u_{m-6} - \cdots$$
$$\cdots + \sin \frac{(m-1)\pi}{2}$$

eingehn, und die u mit den niedrigeren Indices, so wie auch der Sinus, ganze Zahlen sind, und da die u nach ihrer Definition (40) positive Werthe haben, so folgt:

Alle u_m sind ganze positive Zahlen.

Sehen wir jetzt die oben theilweise berechneten und bei steigendem Index leicht weiter berechenbaren Zahlen u_m als bekannt an, so ist demnach:

$$(51)\quad c_m = \frac{u_m \pi^m}{(m-1)!\, 2^{m+1}} = 1 + \frac{(-1)^m}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{(-1)^m}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \cdots,$$

$$(52)\quad s_{2m} = \frac{u_{2m} \cdot \pi^{2m}}{(2m-1)!\, 2(2^{2m}-1)} = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \cdots.$$

$$(53)\quad s'_{2m} = \frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m}-1} \cdot \frac{u_{2m}\, \pi^{2m}}{(2m-1)!\, 2^{2m}} = 1 - \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} - \frac{1}{4^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} - \cdots$$

Um bei jeder von diesen drei Formeln einen speciellen Fall herauszugreifen, so ist nach dem Obigen:

$$c_5 = \frac{5}{1536} \cdot \pi^5 = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \cdots,$$

$$s_6 = \frac{1}{945} \cdot \pi^6 = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots,$$

$$s'_6 = \frac{1}{1440} \cdot \pi^6 = 1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \cdots.$$

Schliesslich sei noch erwähnt, dass man sehr häufig bei diesen Entwickelungen andere Coefficienten benutzt findet, welche mit den unsrigen in der Weise zusammenhängen, dass man die aus (26) fliessende Gleichung

$$\frac{x}{2} \cot \frac{x}{2} = 1 - \frac{s_2}{2^1 \cdot \pi^2} \cdot x^2 - \frac{s_4}{2^3 \cdot \pi^4}\, x^4 - \frac{s_6}{2^5 \cdot \pi^6}\, x^6 - \frac{s_8}{2^7 \cdot \pi^8}\, x^8 - \cdots$$

$$\{-2\pi < x < +2\pi\}$$

in folgender Weise schreibt:

$$\frac{x}{2} \cot \frac{x}{2} = 1 - \frac{B_1}{2!} x^2 - \frac{B_2}{4!} x^4 - \frac{B_3}{6!} x^6 - \frac{B_4}{8!} x^8 - \cdots.$$

Zur Berechnung dieser sogenannten „**Bernoulli**schen Zahlen“[1]) B_1, B_2, B_3, ... dient demnach die Relation:

$$(54)\quad B_m = \frac{(2m)!}{2^{2m-1} \cdot \pi^{2m}} \cdot s_{2m} = \frac{m \cdot u_{2m}}{2^{2m-1} \cdot (2^{2m}-1)}.$$

[1]) Zuerst dargestellt von Jacob Bernoulli in seiner „Ars conjectandi. Basileae. 1713.“

Im Besondern giebt dies:

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_4=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66},$$

$$B_6=\frac{691}{2730},\ B_7=\frac{7}{6},\ B_8=\frac{3617}{510},\ B_9=\frac{43867}{798},\ldots$$

Um die Art der Veränderung der Bernoullischen Zahlen bei unendlich wachsendem Index zu constatiren, dividiren wir mit Gleichung (54) in die analoge für den um 1 vergrösserten Index. Es folgt:

$$(55)\qquad \frac{B_{m+1}}{B_m}=\frac{(m+1)(2m+1)}{2\pi^2}\cdot\frac{s_{2m+2}}{s_{2m}}=\frac{(m+1)(2^{2m}-1)}{4m(2^{2m+2}-1)}\cdot\frac{u_{2m+2}}{u_{2m}}.$$

Und hieraus ergiebt sich, weil $\lim\limits_{m=\infty}\cdot\frac{s_{2m+2}}{s_{2m}}=1$ ist:

$$(56)\qquad \lim_{m=\infty}\cdot\frac{m^2\cdot B_m}{B_{m+1}}=\pi^2,$$

$$(57)\qquad \lim_{m=\infty}\cdot\frac{m^2\cdot u_{2m}}{u_{2m+2}}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Aus (51) folgt:

$$(58)\qquad \lim_{m=\infty}\cdot\frac{m\cdot u_m}{u_{m+1}}=\frac{\pi}{2}.$$

— Nimmt man in (55) $m=8$ und berechnet aus dieser Formel π, indem man $\frac{s_{2m+2}}{s_{2m}}=1$ setzt, mit Hülfe der bekannten Werthe von B_8 und B_9 oder u_{16} und u_{18}, so wird π schon auf 5 Decimalstellen genau.

Das einfachste Äquivalent für B_m bei unendlich wachsendem m ist nach § 58, (6)

$$=2f(0)\cdot\sqrt{2\pi e}\cdot\left(\frac{m}{\pi e}\right)^{2m+\frac{1}{2}},$$

wo $f(0)$ die dort näher definirte Constante bedeutet. Dieselbe besitzt den Werth

$$f(0) = \sqrt{\pi} \cdot e^{\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x \, dx},$$

was sich durch Anwendung der Formeln dieses § leicht zeigen lässt.

§ 67.

Differentiation und Integration der Kreisfunctionen.

Geht man von den in § 61, (9) und (10) bereits gewonnenen Formeln aus, so erhält man durch Differentiation:

(1) $$\frac{d \sin x}{dx} = + \cos x,$$

(2) $$\frac{d \cos x}{dx} = - \sin x,$$

(3) $$\frac{d \operatorname{tng} x}{dx} = + \frac{1}{\cos x^2} = + 1 + \operatorname{tng} x^2,$$

(4) $$\frac{d \cot x}{dx} = - \frac{1}{\sin x^2} = - 1 - \cot x^2.$$

— Um (3) und (4) aus (1) und (2) abzuleiten, hat man nämlich nur die Gleichungen

$$\operatorname{tng} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

nach der Regel über die Differentiation eines Bruches zu behandeln und die Formel § 61, (13) zu benutzen.

Aus (1) bis (4) ergeben sich unter Berücksichtigung des Differentiationssatzes

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$$

für die inversen Functionen die Formeln:

(5) $$\frac{d \cdot \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

(6) $$\frac{d \cdot \operatorname{arc} \cos x}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

(7) $$\frac{d \cdot \operatorname{arc\,tng} x}{dx} = + \frac{1}{1 + x^2},$$

(8) $$\frac{d \cdot \operatorname{arc\,cot} x}{dx} = - \frac{1}{1 + x^2}.$$

Hinsichtlich (5) und (6) ist zu bemerken, dass die Quadratwurzel rechts nicht als eine absolute, sondern als eine positive oder negative Zahl aufgefasst werden muss, deren Vorzeichen

in (5) mit demjenigen von $\cos(\operatorname{arc\,sin} x)$,
in (6) mit demjenigen von $\sin(\operatorname{arc\,cos} x)$

übereinstimmt. — Das Quadratwurzelzeichen darf hier also nur dann als dasjenige für die absolute Zahl angesehn werden:

in (5), wenn $\operatorname{arc\,sin} x$ dem ersten oder vierten Viertel,
in (6), wenn $\operatorname{arc\,cos} x$ dem ersten oder zweiten Viertel

der Periode der Kreisfunctionen angehört.

Integrirt man die Gleichungen (1) bis (8), so erhält man:

(9) $$\int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

(10) $$\int \sin x \, dx = - \cos x + C,$$

(11) $$\int \frac{dx}{\cos x^2} = \int (1 + \operatorname{tng} x^2) \, dx = \operatorname{tng} x + C,$$

(12) $$\int \frac{dx}{\sin x^2} = \int (1 + \cot x^2) \, dx = - \cot x + C;$$

(13) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x + C = - \operatorname{arc\,cos} x + C_1,$$

(14) $$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tng} x + C = - \operatorname{arc\,cot} x + C_1.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich leicht noch die folgenden:

(15) $$\int \operatorname{tng} x \, dx = - l \cos x + C,$$

(16) $$\int \cot x \, dx = + l \sin x + C,$$

(17) $$\int \frac{dx}{\sin x} = + l \operatorname{tng} \frac{x}{2} + C,$$

(18) $$\int \frac{dx}{\cos x} = + l \operatorname{tng}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C;$$

und zwar findet man

(15) durch die Transformation:

$$\operatorname{tng} x \, dx = \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = - \frac{d \cos x}{\cos x} = - d \, l \cos x,$$

(16) durch die Transformation:

$$\cot x \, dx = \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = + \frac{d \sin x}{\sin x} = + d \, l \sin x,$$

(17) durch die Transformation:

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{d \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{d \frac{x}{2}}{\operatorname{tng} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}^2} = \frac{d \operatorname{tng} \frac{x}{2}}{\operatorname{tng} \frac{x}{2}} = d \, l \operatorname{tng} \frac{x}{2},$$

(18) durch die Substitution von $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ für x in (17).

Die Integrale der Arcus lassen sich auf dem Wege der partiellen Integration ermitteln. Es ist:

$$\int \operatorname{arc} \sin x \, dx = \operatorname{arc} \sin x \int dx - \int dx \frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} \int dx,$$

$$= x \cdot \operatorname{arc} \sin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= x \cdot \operatorname{arc} \sin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= x \cdot \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1 - x^2} + C,$$

$$\int \operatorname{arc} \cos x \, dx = \int \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin x\right) dx = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin x\right) - \sqrt{1 - x^2} - C$$

$$= x \cdot \operatorname{arc} \cos x - \sqrt{1 - x^2} - C,$$

$$\int \text{arc tng}\, x\, dx = \text{arc tng}\, x \int dx - \int dx \cdot \frac{d\, \text{arc tng}\, x}{dx} \int dx$$

$$= x \cdot \text{arc tng}\, x - \int \frac{x\, dx}{1 + x^2}$$

$$= x \cdot \text{arc tng}\, x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2}$$

$$= x \cdot \text{arc tng}\, x - \frac{1}{2}\, l(1 + x^2) + C,$$

$$\int \text{arc cot}\, x\, dx = \int \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tng}\, x\right) dx$$

$$= x \cdot \text{arc cot}\, x + \frac{1}{2}\, l(1 + x^2) - C.$$

Mithin:

(19) $$\int_0^x \text{arc sin}\, x\, dx = x \cdot \text{arc sin}\, x + \sqrt{1 - x^2} - 1,$$

(20) $$\int_0^x \text{arc cos}\, x\, dx = x \cdot \text{arc cos}\, x - \sqrt{1 - x^2} + 1,$$

(21) $$\int_0^x \text{arc tng}\, x\, dx = x \cdot \text{arc tng}\, x - l\sqrt{1 + x^2},$$

(22) $$\int_0^x \text{arc cot}\, x\, dx = x \cdot \text{arc cot}\, x + l\sqrt{1 + x^2}.$$

In (19) bis (22) zeigen die Quadratwurzelzeichen **positive** Wurzelwerthe an.

Schliesslich wollen wir, weil es mit den bisherigen Hülfsmitteln leicht bewerkstelligt wird, noch die allgemeine Form der Derivirten höherer Ordnung von arc tng x ableiten.

Es ist nach (7):

$$\frac{d \cdot \text{arc tng}\, x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + ix} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - ix}$$

$$= 2^{-1} \cdot (1 + ix)^{-1} + 2^{-1} \cdot (1 - ix)^{-1};$$

daher nach § 30, (6):

$$\frac{d^r \cdot \operatorname{arc\,tng} x}{dx^r}$$

$$= 2^{-1} \cdot (r-1)! \binom{-1}{r-1} \cdot i^{r-1} (i + ix)^{-r}$$

$$+ 2^{-1} \cdot (r-1)! \binom{-1}{r-1} (-i)^{r-1} (1 - ix)^{-r}$$

$$= 2^{-1} \cdot (r-1)! \, (-1)^{r-1} i^{r-1} \left[(1+ix)^{-r} + (-1)^{r-1} (1-ix)^{-r}\right]$$

Substituirt man der bequemeren Bezeichnung wegen

$$\operatorname{arc\,tng} x = \theta, \quad x = \operatorname{tng} \theta, \quad 1 \pm ix = \frac{\cos\theta \pm i \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{e^{\pm i\theta}}{\cos\theta},$$

so kommt:

$$\frac{d^r \cdot \operatorname{arc\,tng} x}{dx^r} = (r-1)! \cos\theta^r \cdot (-1)^{r-1} i^{r-1} \frac{e^{-ir\theta} + (-1)^{r-1} e^{+ir\theta}}{2}$$

$$= (r-1)! \cos\theta^r \cdot i^r \frac{e^{+ir\theta} - (-1)^r e^{-ir\theta}}{2i};$$

und dies giebt wegen der Identitäten

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad i^r = e^{ir\frac{\pi}{2}}, \quad -1 = e^{-i\pi}, \quad (-1)^r = e^{-ir\pi}$$

das Resultat:

$$\frac{d^r \cdot \operatorname{arc\,tng} x}{dx^r} = (r-1)! \cos\theta^r \cdot \frac{e^{+ir\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} - e^{-ir\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}{2i},$$

(23) $$\frac{d^r \cdot \operatorname{arc\,tng} x}{dx^r} = (r-1)! \cos\theta^r \sin\left[r\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right], \quad (\operatorname{tng}\theta = x).$$

Die Derivirten von arc cot x unterscheiden sich hiervon nach (14) nur durch das Vorzeichen, diejenigen von arc sin x, arc cos x, tng x, cot x folgen einem zu verwickelten Bildungsgesetz, um hier mit Nutzen dargestellt zu werden.

§ 68.

Entwickelung der Potenzen der Kreisfunctionen nach Functionen der Vielfachen des Arcus, und umgekehrt. — Methode der unbestimmten Coefficienten.

Lehrsatz.

Jede unendliche Reihensumme mit complexen Gliedern

$$a_1 e^{i\alpha_1} + a_2 e^{i\alpha_2} + a_3 e^{i\alpha_3} + \cdots$$

convergirt, sobald es die Reihe der Moduln

$$a_1 \quad + a_2 \quad + a_3 \quad + \cdots$$

thut.

Denn die erstere ist identisch mit dem Ausdruck

$$a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3 + \cdots$$
$$+ i \cdot \left\{a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3 + \cdots\right\},$$

in welchem die beiden reellen Reihen convergiren, weil die absoluten Werthe ihrer Glieder diejenigen der Reihe der Moduln nicht übertreffen.

Betrachtet man nun die identischen Gleichungen

$$2^n \cos x^n = \left(e^{+ix} + e^{-ix}\right)^n = e^{+inx}\left(1 + e^{-i2x}\right)^n,$$

$$2^n \sin x^n = \left(\frac{e^{+ix} - e^{-ix}}{i}\right)^n = \frac{e^{+inx}}{i^n} \cdot \left(1 - e^{-i2x}\right)^n,$$

so erkennt man mit Hülfe des obigen Satzes, dass die zuletzt geschriebenen Ausdrücke bei jedem positiven n nach der binomischen Formel entwickelt werden können, weil die Entwickelung von $(1+z)^n$ für $n > 0$ und $z = \pm 1$ nach § 39 unbedingt convergent ist, und der Modul von $e^{\pm i2x}$ den Werth 1 hat.

Indem wir hier auf den aus § 39 ebenfalls darstellbaren Rest nicht eingehn, haben wir daher bei jedem positiven n:

$$(1)\quad 2^n \cos x^n = e^{inx} + \binom{n}{1} e^{i(n-2)x} + \binom{n}{2} e^{i(n-4)x} + \binom{n}{3} e^{i(n-6)x} + \cdots,$$

$$(2)\quad 2^n \sin x^n = \frac{1}{i^n} \cdot \left\{ e^{inx} - \binom{n}{1} e^{i(n-2)x} + \binom{n}{2} e^{i(n-4)x} - \binom{n}{3} e^{i(n-6)x} + \cdots \right\}.$$

Jede von diesen Gleichungen liefert nach einer bekannten Eigenschaft von i eine neue, welche sich von ihr nur durch das Vorzeichen des Symboles i unterscheidet.

Bildet man aus je zwei in dieser Weise correspondirenden Gleichungen die halbe Summe und die halbe Differenz, so erhält man — immer mit Rücksicht auf § 61, (11) und (12) — die folgenden Relationen. Aus (1) ergiebt sich:

$$(3)\quad 2^n \cos x^n = \cos nx + \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x + \binom{n}{3}\cos(n-6)x + \cdots,$$

$$\{n \gtreqless 0\}$$

$$(4)\quad 0 = \sin nx + \binom{n}{1}\sin(n-2)x + \binom{n}{2}\sin(n-4)x + \binom{n}{3}\sin(n-6)x + \cdots;$$

$$\{n \gtreqless 0\}$$

Aus (2) folgt, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet:

$$(5)\quad (-1)^m \cdot 2^{2m} \sin x^{2m} = \cos 2mx - \binom{2m}{1}\cos(2m-2)x + \binom{2m}{2}\cos(2m-4)x - \binom{2m}{3}\cos(2m-6)x + \cdots$$

$$(6)\quad 0 = \sin 2mx - \binom{2m}{1}\sin(2m-2)x + \binom{2m}{2}\sin(2m-4)x - \binom{2m}{3}\sin(2m-6)x + \cdots$$

$$(7)\quad (-1)^m \cdot 2^{m+1} \sin x^{2m+1} = \sin(2m+1)x - \binom{2m+1}{1}\sin(2m-1)x$$
$$+\binom{2m+1}{2}\sin(2m-3)x - \binom{2m+1}{3}\sin(2m-5)x + \cdots$$

$$(8)\quad 0 = \cos(2m+1)x - \binom{2m+1}{1}\cos(2m-1)x$$
$$+\binom{2m+1}{2}\cos(2m-3)x - \binom{2m+1}{3}\cos(2m-5)x + \cdots$$

Die aus (2) für jedes positive n folgenden Formeln erhält man am bequemsten, wenn man dort

$$\frac{1}{i} = e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{1}{i^n} e^{-in\frac{\pi}{2}}$$

einführt, mit diesem Factor durchmultiplicirt und endlich die analogen Operationen vornimmt, wie bisher.

Es ergiebt sich dadurch successive:

$$2^n \sin x^n$$
$$= e^{\pm i\left[nx - \frac{n\pi}{2}\right]} - \binom{n}{1} e^{\pm i\left[(n-2)x - \frac{n\pi}{2}\right]} + \binom{n}{2} e^{\pm i\left[(n-4)x - \frac{n\pi}{2}\right]} - \cdots,$$

$$(9)\quad 2^n \sin x^n = \cos\left[nx - \frac{n\pi}{2}\right] - \binom{n}{1}\cos\left[(n-2)x - \frac{n\pi}{2}\right]$$
$$+\binom{n}{2}\cos\left[(n-4)x - \frac{n\pi}{2}\right] - \cdots,$$
$$\{n \gtreqless 0\}$$

$$(10)\quad 0 = \sin\left[nx - \frac{n\pi}{2}\right] - \binom{n}{1}\sin\left[(n-2)x - \frac{n\pi}{2}\right]$$
$$+\binom{n}{2}\sin\left[(n-4)x - \frac{n\pi}{2}\right] - \cdots$$
$$\{n \gtreqless 0\}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (9) und (10) beziehungsweise mit $\cos\frac{n\pi}{2}$ und $\sin\frac{n\pi}{2}$ und subtrahirt, oder multiplicirt man sie

beziehungsweise mit $\sin\frac{n\pi}{2}$ und $\cos\frac{n\pi}{2}$ und addirt dann, so folgt:

$$(11)\ 2^n \cdot \cos\frac{n\pi}{2}\sin x^n = \cos nx - \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x - \cdots, \quad \{n > 0\}$$

$$(12)\ 2^n \cdot \sin\frac{n\pi}{2}\sin x^n = \sin nx - \binom{n}{1}\sin(n-2)x + \binom{n}{2}\sin(n-4)x - \cdots: \quad \{n > 0\}$$

was übrigens auch in der Weise aus (2) hervorgeht, dass man dort mit $\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2} = i^n$ multiplicirt und dann die reellen Bestandtheile sondert.

In allen Fällen, in welchen n eine ganze positive Zahl ist, brechen die rechten Seiten wegen verschwindender Binomialcoefficienten ab, sobald deren unterer Index den oberen erreicht hat, und es erlangen je zwei Glieder, welche gleich weit von den Enden abstehn, wegen der Formeln

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \cos\varphi = \cos(-\varphi), \quad \sin\varphi = -\sin(-\varphi),$$

absolut genommen, gleiche Werthe, die sich entweder aufheben oder summiren. Das Erstere geschieht oben in allen denjenigen Gleichungen, welche links eine Null haben, das Zweite in den übrigen; sie können demnach mit Unterscheidung eines graden und eines ungraden n auch so geschrieben werden:

$$(13)\ 2^{2m-1} \cdot \cos x^{2m} = \cos 2mx + \binom{2m}{1}\cos(2m-2)x + \cdots$$
$$\cdots + \binom{2m}{m-1}\cos 2x + \frac{1}{2}\binom{2m}{m},$$

$$(14)\ 2^{2m} \cdot \cos x^{2m+1} = \cos(2m+1)x + \binom{2m+1}{1}\cos(2m-1)x + \cdots$$
$$\cdots + \binom{2m+1}{m}\cos x;$$

$$(15)\quad (-1)^m \cdot 2^{2m-1} \cdot \sin x^{2m} = \cos 2mx - \binom{2m}{1} \cos(2m-2)x + \cdots$$

$$\cdots - (-1)^m \cdot \binom{2m}{m-1} \cos 2x + (-1)^m \cdot \frac{1}{2}\binom{2m}{m},$$

$$(16)\quad (-1)^m \cdot 2^{2m} \cdot \sin x^{2m+1} = \sin(2m+1)x$$

$$- \binom{2m+1}{1} \sin(2m-1)x + \cdots + (-1)^m \cdot \binom{2m+1}{m} \sin x.$$

Als besondere Fälle von (3), (9), (11) und (12) mögen noch diejenigen für $n = \frac{1}{2}$ hervorgehoben werden. Es sind, wenn wir zugleich $2x$ für x schreiben, die folgenden:

$$(17)\quad \sqrt{2 \cos 2x} = \cos x + \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2 \cdot 4} \cos 7x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos 11x$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cos 15x + \cdots,$$

$$(18)\quad \sqrt{2 \sin 2x} = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$- \frac{1}{2 \cdot 4} \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cdots,$$

$$(19)\quad \sqrt{\sin 2x} = \cos x - \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2 \cdot 4} \cos 7x - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos 11x$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cos 15x - \cdots,$$

$$(20)\quad \sqrt{\sin 2x} = \sin x + \frac{1}{2} \sin 3x + \frac{1}{2 \cdot 4} \sin 7x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin 11x$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \sin 15x + \cdots$$

Die Potenzen von $\operatorname{tng} x$ und $\operatorname{cotg} x$ können wir hier nicht in analoger Weise entwickeln, weil wir das n in den obigen Formeln nicht negativ nehmen dürfen. Nach § 73 und 74 ist es für $n + 1 > 0$ möglich.

Um die Functionen der vielfachen Arcus durch Potenzen von Functionen der einfachen Arcus auszudrücken, kann man so verfahren, dass man in der identischen Gleichung

$$\cos nx + i \sin nx = e^{inx} = (\cos x + i \sin x)^n = \cos x^n \cdot (1 + i \operatorname{tng} x)^n$$

die letzte Form nach dem binomischen Satz entwickelt und dann die reellen Bestandtheile sondert. Dadurch ergiebt sich sofort:

$$(21)\quad \cos nx = \cos x^n \cdot \left\{1 - \binom{n}{2} \operatorname{tng} x^2 + \binom{n}{4} \operatorname{tng} x^4 - \binom{n}{6} \operatorname{tng} x^6 + \cdots \right\}$$

$$= \cos x^n - \binom{n}{2} \cos x^{n-2} \sin x^2 + \binom{n}{4} \cos x^{n-4} \sin x^4$$

$$- \binom{n}{6} \cos x^{n-6} \sin x^6 + \cdots,$$

$$(22)\quad \sin nx = \cos x^n \cdot \left\{\binom{n}{1} \operatorname{tng} x - \binom{n}{3} \operatorname{tng} x^3 + \binom{n}{5} \operatorname{tng} x^5 - \binom{n}{7} \operatorname{tng} x^7 + \cdots \right\}$$

$$= \binom{n}{1} \cos x^{n-1} \sin x^1 - \binom{n}{3} \cos x^{n-3} \sin x^3$$

$$+ \binom{n}{5} \cos x^{n-5} \sin x^5 - \cdots$$

$$(23)\quad \operatorname{tng} nx = \frac{\binom{n}{1} \operatorname{tng} x^1 - \binom{n}{3} \operatorname{tng} x^3 + \binom{n}{5} \operatorname{tng} x^5 - \cdots}{1 \quad - \binom{n}{2} \operatorname{tng} x^2 + \binom{n}{4} \operatorname{tng} x^4 - \cdots}$$

Und diese Gleichungen gelten ohne Einschränkung, wenn n eine ganze positive Zahl ist, für $\text{abs} \cdot \operatorname{tng} x < 1$ bei jedem beliebigen n, und auch noch für $\text{abs} \cdot \operatorname{tng} x = 1$ bei jedem positiven n.

Die Formeln (21) und (22) lassen auf den ersten Blick erkennen, dass cos nx bei jedem positiven ganzen n rational durch Potenzen von cos x allein ausgedrückt werden kann, weil rechts nur grade Potenzen von sin x vorkommen, so wie, dass sin nx sich nur dann rational durch Potenzen von sin x ausdrücken lässt, wenn n eine ganze ungrade Zahl ist.

Wir wollen die fragliche Entwickelung von cos nx vermittelst der sogenannten „Methode der unbestimmten Coefficienten" ausführen und dabei diejenigen Punkte hervorheben, welche stets beachtet werden müssen, wenn diese Methode anwendbar sein soll.

Zunächst hat man sich zu überzeugen, dass die präsumirte Entwickelungsform — hier:

$$(24)\qquad \cos n x = c_n \cdot \cos x^n + c_{n-2} \cdot \cos x^{n-2} + c_{n-4} \cdot \cos x^{n-4} + \cdots$$

— der Natur der zu entwickelnden Function gemäss ist. Und dies geht in unserm Falle aus (21) unmittelbar hervor, weil die einzelnen Glieder von der Form

$$\binom{n}{2r} \cos x^{n-2r} \sin x^{2r} = \binom{n}{2r} \cos x^{n-2r} (1 - \cos x^2)^r$$
$$= \binom{n}{2r} \cdot \left\{ \cos x^{n-2r} - \binom{r}{1} \cos x^{n-2r+2} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} \cos x^n \right\}$$

sind.

Nachdem die Form der Entwickelung gesichert ist, tritt als Zweites die Bestimmung der Coefficienten hinzu. Allgemeine Regeln darüber, wie man dies zu bewerkstelligen habe, lassen sich weiter nicht angeben, als dass man aus der präsumirten Gleichung eine zweite ableite, welche durch Vergleichung mit ihr Relationen zwischen den Coefficienten liefert.

Wir wollen zu diesem Zweck die Gleichung (24) zweimal differentiiren. Es ist:

$$\frac{d^2 \cos n x}{dx^2} = - n^2 \cos n x;$$

$$\frac{d^2 \cdot \cos x^{n-2r}}{dx^2}$$
$$= -(n - 2r)^2 \cdot \cos x^{n-2r} + (n - 2r)(n - 2r - 1) \cdot \cos x^{n-2r-2}.$$

Daher müssen, weil die rechte Seite von (24) eine Potenzreihe ist, die Coefficienten der entsprechenden Glieder übereinstimmen in der aus (24) durch Multiplication mit $(-n^2)$ und in der durch die Differentiation erhaltenen Gleichung. Es muss daher

$$n^2 \cdot c_{n-2r} = (n - 2r)^2 \cdot c_{n-2r} - (n - 2r + 2)(n - 2r + 1) \cdot c_{n-2r+2},$$

d. i.:

$$2^2 r(n-r)\,c_{n-2r} = -(n-2r+2)(n-2r+1)\,c_{n-2r+2}$$

sein.

Hieraus folgt, weil durch directe Berechnung aus (21)

$$\begin{aligned} c_n &= 1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\cdots \\ &= 1+\left[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}\right]+\left[\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{4}\right] \\ &\qquad +\left[\binom{n-1}{5}+\binom{n-1}{6}\right]+\cdots \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

hervorgeht, dass

$$\begin{aligned} c_n &= +2^{n-1}, \\ 2^2\cdot 1\cdot(n-1)\cdot c_{n-2} &= -n\cdot(n-1)\cdot c_n, \\ 2^2\cdot 2\cdot(n-2)\cdot c_{n-4} &= -(n-2)\cdot(n-3)\cdot c_{n-2}, \\ 2^2\cdot 3\cdot(n-3)\cdot c_{n-6} &= -(n-4)\cdot(n-5)\cdot c_{n-4}, \\ &\text{u. s. w.} \\ 2^2\cdot r\cdot(n-r)\cdot c_{n-2r} &= -(n-2r+2)\cdot(n-2r+1)\cdot c_{n-2r-2} \end{aligned}$$

ist. Aus der Multiplication dieser Gleichungen ergiebt sich, nachdem noch mit dem Coefficienten von c_{n-2r} dividirt ist:

$$(25) \qquad c_{n-2r} = (-1)^r \cdot \frac{n}{r\cdot 4^r}\binom{n-r-1}{r-1}\cdot 2^{n-1}.$$

Nach (24) ist daher bei jedem ganzen positiven n:

$$(26) \quad \cos nx = 2^{n-1}\cdot\left\{\cos x^n - \frac{n}{1\cdot 4^1}\cdot\binom{n-2}{0}\cos x^{n-2} + \frac{n}{2\cdot 4^2}\cdot\binom{n-3}{1}\cos x^{n-4} - \cdots\right\}$$

— Wollte man dem n einen andern Charakter beilegen, so würde rechts eine divergente Reihe entstehn, weil deren allgemeines Glied mit $C:\left(r^{\frac{3}{2}}\cos x^{2r}\right)$ äquivalent ist.

Substituirt man hier $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ für x, so folgt für jedes ganze positive m:

$$27)\quad (-1)^m \cdot \cos 2mx = 2^{2m-1} \cdot \left\{ \sin x^{2m} - \frac{2m}{1 \cdot 4^1} \cdot \binom{2m-2}{0} \sin x^{2m-2} + \frac{2m}{2 \cdot 4^2} \cdot \binom{2m-3}{1} \sin x^{2m-4} - \cdots \right\},$$

$$28)\quad (-1)^m \cdot \sin(2m+1)x = 2^{2m} \cdot \left\{ \sin x^{2m+1} - \frac{2m+1}{1 \cdot 4^1} \cdot \binom{2m-1}{0} \sin x^{2m-1} + \frac{2m+1}{2 \cdot 4^2} \cdot \binom{2m-2}{1} \sin x^{2m-3} - \cdots \right\}.$$

§ 69.

Folgerungen aus dem binomischen Satz für ganze Exponenten.

In § 39, II und III sind geschlossene algebraische Ausdrücke für die Entwickelung von $(1+z)^n$ nach Potenzen von z für den Fall gefunden worden, dass n eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Dieselben gestatten, da sie durch rein formale Transformationen entstehn, welche auch bei complexen Zahlen gelten, die Substitution

$$z = e^{ix}.$$

Bedenkt man, dass dann

$$(1+z)^n = (1+e^{ix})^n = e^{i\frac{nx}{2}} \cdot \left(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}\right)^n = \left[\cos\frac{nx}{2} + i \sin\frac{nx}{2}\right] \cdot 2^n \cos\frac{x}{2}^n$$

$$= 2^n \cos\frac{x}{2}^n \cos\frac{nx}{2} + i \cdot 2^n \cos\frac{x}{2}^n \sin\frac{nx}{2}$$

und

$$z^r = e^{irx} = \cos rx + i \sin rx$$

ist, so ergiebt die Gleichung (5) des § 39 vermittelst der Sonderung der reellen Bestandtheile:

$$(1)\ 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2} = 1 + \binom{n}{1}\cos x + \binom{n}{2}\cos 2x + \binom{n}{3}\cos 3x + \cdots$$
$$\cdots + \binom{n}{n}\cos nx,$$

$$(2)\ 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2} = \quad \binom{n}{1}\sin x + \binom{n}{2}\sin 2x + \binom{n}{3}\sin 3x + \cdots$$
$$\cdots + \binom{n}{n}\sin nx.$$

Bedeutet $n = -(m+1)$ eine ganze negative Zahl, so hat man nach § 39, III oder IV:

$$1 + \binom{-m-1}{1}\cdot z + \binom{-m-1}{2}\cdot z^2 + \binom{-m-1}{3}\cdot z^3 + \cdots$$
$$\cdots + \binom{-m-1}{r-1}\cdot z^{r-1}$$
$$= \frac{1}{(1+z)^{m+1}}\cdot\left[1 - \binom{-m-1}{r} z^r \cdot \left\{1 + \binom{m}{1}\frac{rz}{r+1} + \binom{m}{2}\frac{rz^2}{r+2} + \cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots + \binom{m}{m}\frac{rz^m}{r+m}\right\}\right].$$

Nach der Substitution von $z = e^{ix}$, welche

$$\frac{1}{(1+z)^{m+1}} = (1+z)^{-m-1} = 2^{-m-1}\cos^{-m-1}\frac{x}{2}\cdot e^{-i\cdot\frac{(m+1)x}{2}}$$

ergiebt, verwandelt sich die rechte Seite dieser Gleichung in:

$$\frac{1}{2^{m+1}\cos^{m+1}\frac{x}{2}}\cdot\left[e^{-i\frac{(m+1)x}{2}} - \binom{-m-1}{r}\cdot\left\{e^{i\left(r-\frac{m+1}{2}\right)x}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \binom{m}{1}\frac{r\cdot e^{i\left(r+1-\frac{m+1}{2}\right)x}}{r+1} + \cdots + \binom{m}{m}\frac{r\cdot e^{i\left(r+m-\frac{m+1}{2}\right)x}}{r+m}\right\}\right];$$

und man kann nun die reellen Bestandtheile nach der Formel

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

sondern. Dies giebt:

$$1 + \binom{-m-1}{1}\cos x + \binom{-m-1}{2}\cos 2x + \cdots + \binom{-m-1}{r-1}\cos(r-1)x$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}\cos\frac{x}{2}^{m+1}} \cdot \left[+ \cos\frac{(m+1)x}{2} - \binom{-m-1}{r} \cdot r \left\{ \frac{\cos\left(r - \frac{m+1}{2}\right)x}{r} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \binom{m}{1} \frac{\cos\left(r+1-\frac{m+1}{2}\right)x}{r+1} + \cdots + \binom{m}{m} \frac{\cos\left(r+m-\frac{m+1}{2}\right)x}{r+m} \right\}\right]$$

und:

$$\binom{-m-1}{1}\sin x + \binom{-m-1}{2}\sin 2x + \cdots + \binom{-m-1}{r-1}\sin(r-1)x$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}\cos\frac{x}{2}^{m+1}} \cdot \left[- \sin\frac{(m+1)x}{2} - \binom{-m-1}{r} \cdot r \left\{ \frac{\sin\left(r - \frac{m+1}{2}\right)x}{r} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \binom{m}{1} \frac{\sin\left(r+1-\frac{m+1}{2}\right)x}{r+1} + \cdots + \binom{m}{1} \frac{\sin\left(r+m-\frac{m+1}{2}\right)x}{r+m} \right\}\right].$$

Wir schreiben jetzt r für $(r+1)$ und n für $(m+1)$, so dass n irgend eine ganze positive Zahl bedeutet; dadurch erhalten wir:

$$(3)\quad 1 - \frac{n}{1}\cos x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cos 2x - \frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\cos 3x + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^r \frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdots\frac{n+r-1}{r}\cos rx$$

$$=\frac{\cos\frac{nx}{2}}{2^n\cos\frac{x}{2}^n}$$

$$+(-1)^r\cdot n\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}{r!\,2^n\cos\frac{x}{2}^n}\cdot\left\{\frac{\cos\left(r+1-\frac{n}{2}\right)x}{r+1}\right.$$

$$\left.+\binom{n-1}{1}\cdot\frac{\cos\left(r+2-\frac{n}{2}\right)x}{r+2}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\frac{\cos\left(r+n-\frac{n}{2}\right)x}{r+n}\right\}$$

und:

$$(4)\qquad \frac{n}{1}\sin x-\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\sin 2x+\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\sin 3x-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{r-1}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdots\frac{n+r-1}{r}\sin rx$$

$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{2^n\cos\frac{x}{2}^n}$$

$$+(-1)^{r-1}\cdot n\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}{r!\,2^n\cos\frac{x}{2}^n}\cdot\left\{\frac{\sin\left(r+1-\frac{n}{2}\right)x}{r+1}\right.$$

$$\left.+\binom{n-1}{1}\cdot\frac{\sin\left(r+2-\frac{n}{2}\right)x}{r+2}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\frac{\sin\left(r+n-\frac{n}{2}\right)x}{r+n}\right\}.$$

Will man auf den linken Seiten von (3) und (4) lauter positive Vorzeichen erhalten, will man also die Summen

$$1+\frac{n}{1}\cos x+\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cos 2x+\cdots+\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdots\frac{n+r-1}{r}\cos rx$$

und

$$\frac{n}{1}\sin x+\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{1}\sin 2x+\cdots+\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdots\frac{n+r-1}{r}\sin rx$$

ausdrücken, so braucht man nur $(\pi + x)$ für x in (3) und (4) zu substituiren und dann noch in (4) die Vorzeichen umzukehren.

Für $n = 1$ erhält man aus (3) und (4) durch directe Substitution und das gedachte weitere Verfahren als besondere Fälle:

(5) $$1 - \cos x + \cos 2x - \cdots + (-1)^r \cos rx$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 + (-1)^r \cdot \frac{\cos\left(r + \frac{1}{2}\right)x}{\cos\frac{x}{2}} \right\} = + \frac{\cos\frac{r\pi + (r+1)x}{2} \cos\frac{r(\pi + x)}{2}}{\cos\frac{x}{2}},$$

(6) $$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \cdots + (-1)^{r-1} \sin rx$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \operatorname{tng}\frac{x}{2} - (-1)^r \frac{\sin\left(r + \frac{1}{2}\right)x}{\cos\frac{x}{2}} \right\} = - \frac{\cos\frac{r\pi + (r+1)x}{2} \sin\frac{r(\pi + x)}{2}}{\cos\frac{x}{2}};$$

(7) $$1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos rx$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 + \frac{\sin\frac{(2r+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right\} = + \frac{\sin\frac{(r+1)x}{2} \cos\frac{rx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

(8) $$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin rx$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cot\frac{x}{2} - \frac{\cos\frac{(2r+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right\} = + \frac{\sin\frac{(r+1)x}{2} \sin\frac{rx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

— Diese vier Relationen sind demnach unmittelbare Folgerungen aus der geometrischen Reihe

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^r = \frac{z^{r+1} - 1}{z - 1}$$

vermittelst der Substitution $z = + e^{ix}$.

Für $n = 2$ folgt aus (3) und (4):

(9)
$$1 - 2\cos x + 3\cos 2x - \cdots + (-1)^r \cdot (r+1)\cos rx$$
$$= \frac{\cos x + (-1)^r \left\{(r+2)\cos rx + (r+1)\cos(r+1)x\right\}}{4\cos\frac{x}{2}^2},$$

(10)
$$2\sin x - 3\sin 2x + \cdots + (-1)^{r-1} \cdot (r+1)\sin rx$$
$$= \frac{\sin x - (-1)^r \left\{(r+2)\sin rx + (r+1)\sin(r+1)x\right\}}{4\cos\frac{x}{2}^2};$$

(11)
$$1 + 2\cos x + 3\cos 2x + \cdots + (r+1)\cos rx$$
$$= \frac{(r+2)\cos rx - (r+1)\cos(r+1)x - \cos x}{4\sin\frac{x}{2}^2},$$

(12)
$$2\sin x + 3\sin 2x + \cdots + (r+1)\sin rx$$
$$= \frac{(r+2)\sin rx - (r+1)\sin(r+1)x + \sin x}{4\sin\frac{x}{2}^2}.$$

Capitel XII.

Differentiation und Integration nach complexen Variabeln.

§ 70.

Differentiation nach einer complexen Variabeln. Monogene Functionen.

Jede Function einer complexen Variabeln

$$z = x + iy$$

ist gleichbedeutend mit einer Function zweier reellen Variabeln x und y. Sie lässt sich daher nach den Gesetzen behandeln, welche für die Functionen letztgedachter Gattung Gültigkeit haben; denn dass das i unter den Constanten vorkommt, ändert an diesen Gesetzen nichts, wie wir im vorigen Capitel gesehn haben.

Wird die eine von den beiden Variabeln x und y als constant oder als Function der andern angesehn, so bietet sich demnach kein Anlass zu einer besondern Betrachtung der Functionen mit complexen Variabeln; sondern dies geschieht nur dann, wenn man voraussetzt, dass x und y als von einander völlig unabhängig variirend gedacht werden, und dabei nach der Bedeutung des Symbols

$$\frac{d f(z)}{dz}$$

fragt.

Es ist zunächst klar, dass man jede Function $f(x, y)$ der beiden unabhängigen Variabeln x und y als Function der einen complexen Variabeln $z = x + iy$ ansehn kann, weil die beiden Grössen x und y unzweideutig gegeben sind, wenn es z ist, und umgekehrt.

Nimmt man, wie es von jetzt ab stets geschehen soll, x und y zu rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene, so bedeutet jede bestimmte Veränderung von z eine bestimmte Verschiebung des Bildpunktes, wie auch umgekehrt — vergl. § 63; und das Eine charakterisirt vollständig das Andere.

Zerlegt man ferner die Function $f(x, y)$ in ihre reellen Bestandtheile und setzt

$$f(x,y) = X + iY,$$

— wobei im Allgemeinen sowohl X, als auch Y, eine Function der beiden Variabeln x und y sein wird — so kann man X und Y zu Coordinaten eines Punktes in einer zweiten Ebene nehmen. Und dieser Punkt (X, Y) oder $f(x,y)$ wird eine Linie beschreiben, wenn sich der Punkt (x, y) oder z längs einer Linie verschiebt.

Es sei beispielsweise gegeben:

$$f(x,y) = xy + i(x+y),$$

also

$$X = xy, \quad Y = x + y.$$

Verschiebt man nun den Punkt z längs der Graden $y = ax$, so gleitet der Punkt $f(x,y)$ längs der Parabel

$$Y^2 = \frac{(1+a)^2}{a} \cdot X,$$

wie man durch Elimination von x und y aus diesen Gleichungen sofort ersieht.

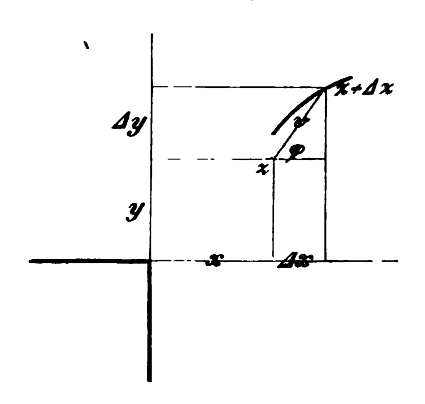
Wenden wir uns nach diesen einleitenden Bemerkungen nunmehr zur Betrachtung des Grenzwerthes von

$$\frac{\Delta f(x,y)}{\Delta z}$$

für ein unendlich kleines

$$\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y,$$

so ist es einleuchtend, dass derselbe sehr verschieden ausfallen kann, bei der unbeschränkten Mannichfaltigkeit der Relationen, welchen gemäss man Δx und Δy gleichzeitig oder nach einander abnehmen lässt; m. a. W.: es ist einleuchtend, dass Gestalt und Lage derjenigen Linie, auf welcher sich der Punkt $z + \Delta z = (x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$ dem Punkte $z = x + iy$ unendlich nähert, im Allgemeinen Einfluss auf den Werth der Derivirten $\frac{d f(x,y)}{dz}$ haben werden.



Die bequemste Übersicht über diese Vorgänge erhält man, wenn man, die geometrische Entfernung der beiden Punkte z und $(z + \Delta z)$ durch v und den Richtungswinkel der Graden $\overline{z, (z + \Delta z)}$ durch φ bezeichnend,

$$\Delta z = \Delta x + i \Delta y = v \cdot e^{i\varphi} = v \cos\varphi + i \cdot v \sin\varphi$$

einführt. Dann hat man:

$$\lim_{\Delta z = 0} \cdot \frac{\Delta f(x,y)}{\Delta z} = \lim_{v=0} \cdot \left[\frac{\Delta f(x,y)}{v} \cdot e^{-i\varphi}\right],$$

wo φ entweder constant ist — Annäherung auf einer Graden, oder sich zugleich mit v ändert — Annäherung auf einer Curve, welche nicht einmal einen Grenzwerth von φ zu ergeben braucht, da sie u. A. auch eine Spirale sein kann, welche sich dem Punkte z asymptotisch nähert.[1])

Bei dem oben citirten Beispiel ergiebt eine einfache Rechnung:

$$\frac{d f(x,y)}{dz} = \lim_{v=0} \cdot \left\{\left[y \cos\varphi + x \sin\varphi + i(\cos\varphi + \sin\varphi)\right] \cdot e^{-i\varphi}\right\},$$

wo sich die Abhängigkeit von dem grade beliebten Grenzwerthe von φ deutlich ausprägt, so dass beispielsweise

$$\frac{df}{dz} = y + i \quad \text{für } \lim \cdot \varphi = 0,$$

$$\frac{df}{dz} = 1 - ix \quad \text{für } \lim \cdot \varphi = \frac{\pi}{2}$$

hervorgeht, während gar kein bestimmter Werth von $\frac{df}{dz}$ existirt, wenn φ keinen bestimmten Grenzwerth hat.

Die Möglichkeit, dass $\frac{df}{dz}$ bei verschiedenen Differentiationsrichtungen — verschiedenen Werthen von φ — verschiedene Werthe annimmt, kann übrigens nicht überraschen, da wir schon bei der Differentiation nach einer reellen Variabeln in § 2 auf dieselbe Erscheinung gestossen sind. Und wir dürfen vermuthen, dass es

[1]) etwa $\varphi = \frac{1}{v}$.

auch in dem hier vorliegenden allgemeineren Fall Functionen geben wird, deren Derivirte **nicht** von der Differentiationsrichtung abhängen.

Wir wollen jetzt die Bedingung dafür aufsuchen.

Betrachten wir zu dem Zweck zunächst x und y als beliebig zu wählende Functionen einer dritten Veränderlichen t, d. i.: bestimmen wir ganz nach Belieben eine Curve, auf welcher die Punkte $(z + \Delta z)$ liegen sollen, welche sich dem Punkte z nähern, so ist dadurch die Function

$$f(z) = X + i \cdot Y$$

zu einer ganz bestimmten Function einer einzigen Veränderlichen t gemacht; und es findet demnach der § 9 Anwendung, nach welchem

$$(1) \qquad \frac{d f(z)}{dt} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(z)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= \left[\frac{\partial X}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial Y}{\partial x}\right] \cdot \frac{dx}{dt} + \left[\frac{\partial X}{\partial y} + i \frac{\partial Y}{\partial y}\right] \cdot \frac{dy}{dt}$$

gesetzt werden kann.

Nun ist aber:

$$(2) \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} - i \frac{dy}{dt};$$

mithin durch Substitution:

$$\frac{d f(z)}{dt} = \left[\frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial Y}{\partial x}\right] \cdot \frac{dz}{dt} + \left[\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right) + i \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)\right] \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Trifft es sich also, dass gleichzeitig

$$(3) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = + \frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$(4) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

ist, so hat man:

$$(5) \qquad \frac{d f(z)}{dt} = \left[\frac{\partial X}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial Y}{\partial x}\right] \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Da diese Gleichung (5) keine Rücksicht auf die Function von t nimmt, welche man für y gesetzt hat, und auch die Function x

von t völlig willkürlich belässt, so darf man, indem y als constant angesehn wird,

$$t = x + iy = z, \quad dt = dx = dz$$

einführen und erhält:

$$(6) \qquad \frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial x};$$

was nicht mehr von der Differentiationsrichtung und überhaupt nicht von demjenigen Wege abhängt, auf welchem sich der Punkt $(z + \Delta z)$ dem Punkte z nähert.

Ausserdem sieht man, dass die Gleichungen (3), (4) und (5) nicht bloss eine ausreichende, sondern auch die nothwendige Bedingung für den Schluss auf (6) ausmachen, so dass jene folgen, wenn man von dieser ausgeht. Demnach gilt der

Lehrsatz.

Enthält eine Function $f(z) = X + i \cdot Y$ einer complexen Variabeln

$$z = x + iy$$

x und y nur in der Verbindung $(x + iy)$ oder lässt sie sich in eine solche Gestalt transformiren, so ist $\frac{df(z)}{dz}$ unabhängig vom Differentiationswege, und man hat zwischen den partiellen Derivirten der reellen Bestandtheile X und Y die Relationen:

$$(7) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = + \frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$(8) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Auch ist bei solchen Functionen stets:

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0, \text{ [1]}$$

so lange diese zweiten Derivirten einen Sinn haben.

Dies lässt sich in jeder Weise umkehren.

---

[1] Unmittelbare Folge aus (7) und (8).

Definition.

Unter einer **monogenen** Function $f(z)$ einer complexen Variabeln z versteht man eine solche, deren Derivirte $\frac{df(z)}{dz}$ unabhängig vom Differentiationswege ist.

Zusatz.

Behält eine Function $f(x)$ einer reellen Variablen x einen Sinn, wenn man an die Stelle der letzteren die complexe Variable $z = x + iy$ setzt, so ist sie in demjenigen Umfange, in welchem dies zutrifft und $\frac{df(x)}{dx}$ einen bestimmten Werth hat, monogen.

Beispielsweise ist cos z ohne Einschränkung eine monogene Function von z, weil

$$\frac{d \cdot \cos x}{dx} = - \sin x$$

einen bestimmten Werth hat, und

$$\cos(x + iy) = \cos x \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

dem Begriff nach bestimmt ist.

§ 71.

Integration nach einer complexen Variabeln.

Als Grenzwerth einer Summe hat das Integral

$$(1) \qquad \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(x, y)\, dz = \int_{\xi_0 + i\eta_0}^{\xi + i\eta} f(x, y)(dx + i dy)$$

einen völlig bestimmten Sinn, wenn alle Summanden völlig bestimmt sind. Dies geschieht, wenn in der Ebene der z eine bestimmte, vom Punkt $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ bis zum Punkt $\zeta = \xi + i\eta$ führende Linie, der „Integrationsweg", gegeben ist, um die als zusammengehörig gedachten Werthe von x und y als Coordinaten der Punkte des Integrationsweges zur Anschauung zu bringen oder — was dasselbe besagen will — wenn x und y bestimmte Functionen von

einander sind. Denn dann ist das Integral (1) im Grunde nichts Anderes als ein Integral einer einzigen reellen Variabeln und fällt durchaus unter die Beurtheilungskriterien der letzteren, wie sie aus früheren Capiteln bekannt sind.

Es gelten mithin namentlich auch die Grundformeln:

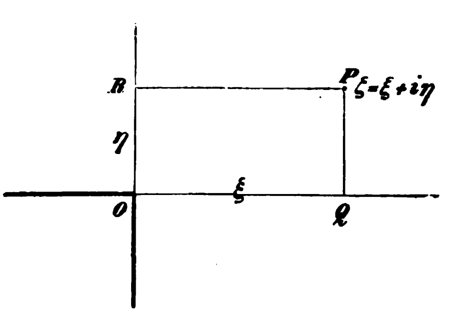
$$(2)\qquad \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(x,y)\,dz = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} f(x,y)\,dz + \int_{\zeta_1}^{\zeta} f(x,y)\,dz,$$

$$(3)\qquad \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(x,y)\,dz = -\int_{\zeta}^{\zeta_0} f(x,y)\,dz,$$

$$(4)\qquad \frac{d}{d\zeta}\int_{\zeta_0}^{\zeta} f(x,y)\,dz = f(\xi,\eta), \quad (\zeta = \xi + i\eta);$$

wenn man sich nur gegenwärtig erhält, dass alle in (2), (3) und (4) zu verwendenden Werthe von z auf dem Integrationswege liegen müssen.

Eine Veränderung der Gestalt des Integrationsweges — des Abhängigkeitsgesetzes zwischen x und y — wird im Allgemeinen eine Veränderung des Werthes des Integrals (1) nach sich ziehn.



Setzen wir beispielsweise, wie im vorigen §, $f(x,y) = xy + i(x+y)$ und bestimmen das Integral (1) auf dem Integrationswege OQP, so folgt

$$\int_0^{\zeta} f(x,y)\,dz = \int_0^{\xi} ix\,dx + \int_0^{\eta}\Big[\xi y + i(\xi + y)\Big]\,i\,dy$$

$$= i\cdot\frac{1}{2}\xi^2 + i\left\{\xi\cdot\frac{1}{2}\eta^2 + i\left(\xi\eta + \frac{1}{2}\eta^2\right)\right\}$$

$$= -\eta\left(\xi + \frac{1}{2}\eta\right) + i\cdot\frac{1}{2}\xi\left(\xi + \eta^2\right).$$

Dagegen erhält man auf dem Integrationswege ORP:

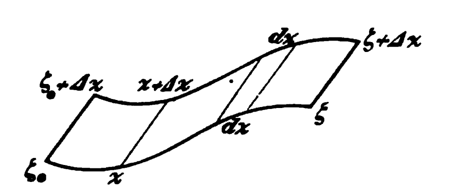
$$\int_0^{\zeta} f(x,y)\,dz = \int_0^{\eta} iy\cdot i\,dy + \int_0^{\xi}\Big((x\eta) + i(x+\eta)\Big)dx$$
$$= -\frac{1}{2}\eta^2 + \left[\frac{1}{2}\xi^2\eta + i\left(\frac{1}{2}\xi^2 + \xi\eta\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\eta\left(\xi^2 - \eta\right) + i\xi\left(\frac{1}{2}\xi + \eta\right).$$

Der auf dem zweiten Wege gewonnene Werth ist mithin um

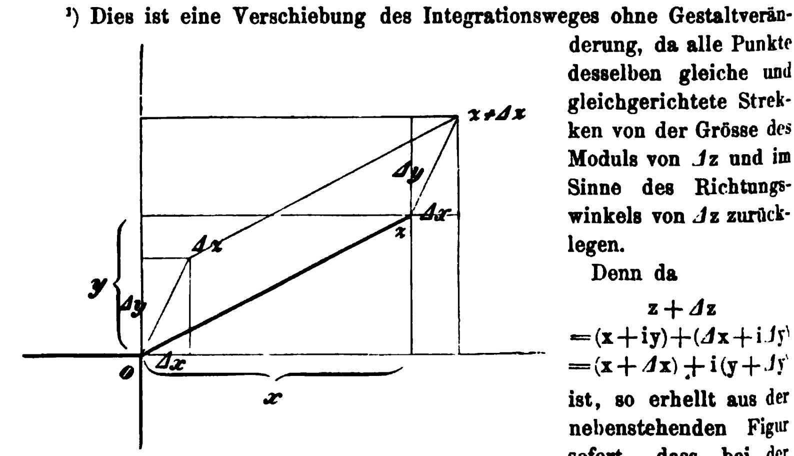
$$\frac{1}{2}\xi\eta\cdot\Big[(2+\xi) + i\,(2-\eta)\Big]$$

grösser als derjenige längs des ersten Integrationsweges.

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Veränderung mit dem Werthe des Integrals $\int_{\zeta_0}^{\zeta} f(x,y)\,dz$ vorgeht, wenn man den Integrationsweg $\overline{\zeta_0, z, \zeta}$ so verschiebt, dass jeder von seinen Punkten z eine gleiche Dislocation Δz erleidet.[1]) Dieselbe ist nicht mit den Elementen dz des Integrationsweges zu verwechseln, von denen jedes einzelne hierdurch parallel mit sich selbst verschoben ist.



[1]) Dies ist eine Verschiebung des Integrationsweges ohne Gestaltveränderung, da alle Punkte desselben gleiche und gleichgerichtete Strecken von der Grösse des Moduls von Δz und im Sinne des Richtungswinkels von Δz zurücklegen.



Denn da

$$z + \Delta z$$
$$= (x + iy) + (\Delta x + i\Delta y)$$
$$= (x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$$

ist, so erhellt aus der nebenstehenden Figur sofort, dass bei der geometrischen Veranschaulichung der Addition von z und Δz für die Summe

Das Integral längs des Integrationsweges $\overline{\zeta_0 + \varDelta z, z + \varDelta z, \zeta + \varDelta z}$ lässt sich demnach so ausdrücken:

$$\int_{\zeta_0+\varDelta z}^{\zeta+\varDelta z} f(x,y)\,dz = \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y)\cdot dz,$$

wo $\varDelta x$ und $\varDelta y$ längs des ganzen Integrationsweges constant sind.

Wir fügen, um dieselben Endpunkte wie beim Ausgangsintegral zu erhalten, noch die Integrale längs der Integrationswege $\overline{\zeta_0, \zeta_0 + \varDelta z}$, $\overline{\zeta + \varDelta z, \zeta}$ hinzu, begnügen uns aber dabei mit den Näherungswerthen

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\zeta_0}^{\zeta_0+\varDelta z} f(x,y)\,\delta z = \varDelta z\cdot\Big[f(\xi_0,\eta_0)+\varepsilon_0\Big], \\ \displaystyle\int_{\zeta+\varDelta z}^{\zeta} f(x,y)\,\delta z = -\varDelta z\cdot\Big[f(\xi,\eta)+\varepsilon\Big], \end{cases}$$

in welchen die unbestimmt gebliebenen Grössen ε_0 und ε zugleich mit $\varDelta z$ verschwinden, falls die Function $f(x,y)$ auf den fraglichen Integrationswegen stetig ist. — Unter δz werden die bei der Integration unendlich abnehmenden Elemente von $\varDelta z$ verstanden.

Demnach hat der Überschuss des Integrals längs des Integrationsweges $\overline{\zeta_0, \zeta_0 + \varDelta z, \zeta + \varDelta z, \zeta}$ über dasjenige längs des Weges $\overline{\zeta_0, z, \zeta}$ folgenden Werth:

$$(6)\qquad \varDelta\int_{\zeta_0}^{\zeta} f(x,y)\,dz = -\varDelta z\cdot\Big[f(\xi,\eta)-f(\xi_0,\eta_0)+\varepsilon-\varepsilon_0\Big] + \int_{\zeta_0}^{\zeta}\Big[f(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y)-f(x,y)\Big]\,dz.$$

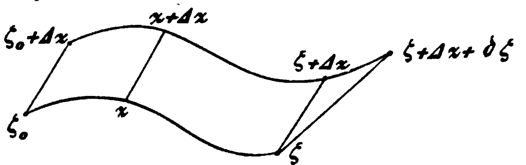
Dividiren wir diese Gleichung durch $\varDelta z$ und lassen dann $\varDelta z$ sich der Null nähern, so erhalten wir:

$(z + \varDelta z)$ der vierte Eckpunkt eines Parallelogramms gefunden wird, dessen drei übrige Ecken ihrer Folge nach die complexen Coordinaten $z, 0, \varDelta z$ haben. — Um die Stelle $(z + \varDelta z)$ zu finden, braucht man daher nur die Strecke $\overline{0, \varDelta z}$ in gleicher Richtung mit ihrer Anfangslage vom Punkte z aus zu zeichnen.

$$(7)\quad \frac{\delta}{\delta z}\int_{\zeta_0}^{\zeta} f(x,y)\,dz = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\delta f(x,y)}{\delta z}\,dz - f(\xi,\eta) + f(\xi_0,\eta_0).$$

Diese Relation setzt voraus, dass die gegenüberliegenden Seiten derjenigen Figur, welche von den Integrationswegen gebildet wird, congruent seien.

Um diese Bedingung wegzuschaffen, sei der mit $\overline{\zeta_0\,\zeta}$ congruente Integrationsweg $\overline{\zeta_0 + \Delta z, \zeta + \Delta z}$ gegen den Weg $\overline{\zeta_0, \zeta}$ nach beliebiger Richtung verlängert so dass die complexe Coordinate $(\zeta + \Delta z + \mathfrak{d}\zeta)$ seinen Endpunkt bestimmt. Dann tritt an Stelle des zweiten Integrals (5) in die Formel (6) die Summe



$$\int_{\zeta+\Delta z}^{\zeta+\Delta z+\mathfrak{d}\zeta} f(x,y)\,dz + \int_{\zeta+\Delta z+\mathfrak{d}\zeta}^{\zeta} f(x,y)\,dz$$

$$= \mathfrak{d}\zeta \cdot \left[f(\xi,\eta) + \varepsilon_1\right] - (\Delta z + \mathfrak{d}\zeta)\cdot\left[f(\xi,\eta) + \varepsilon\right]$$

$$= -\Delta z \cdot \left[f(\xi,\eta) + \varepsilon\right] - \mathfrak{d}\zeta \cdot \left[\varepsilon - \varepsilon_1\right]$$

ein, so dass die rechte Seite von (7) noch um

$$-\lim_{\Delta z = 0} \cdot \frac{\mathfrak{d}\zeta}{\Delta z}(\varepsilon - \varepsilon_1)$$

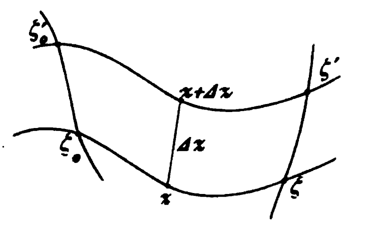
zu vergrössern wäre. Diese Grösse verschwindet jedoch sicher, wenn die Grösse $\mathfrak{d}\zeta$ in solcher Weise zugleich mit Δz abnimmt, dass die Grade $\overline{\zeta, \zeta + \Delta z + \mathfrak{d}\zeta}$ sich nicht einer Grenzlage nähert, welche Tangente des Integrationsweges $\overline{\zeta_0, \zeta}$ in ζ ist; in diesem Falle nämlich würde der Modul von $\frac{\mathfrak{d}\zeta}{\Delta z}$ unendlich wachsen.

Eine Abänderung des Integrationsweges am andern Ende führt selbstverständlich zu dem analogen Resultat.

Hieraus ergiebt sich der

Lehrsatz I.

Wird derjenige Theil einer Linie, welcher zwischen ihren Schnittpunkten ζ_0 und ζ mit zwei festen Linien der z-Ebene liegt, als Integrationsweg für das Integral $\int_{\zeta_0}^{\zeta} f(x,y)\,dz$ genommen, wird dann der Integrationsweg so verschoben, dass seine sämmtlichen Punkte z gleiche Dislocationen Δz erleiden, und hierauf das Integral längs des neuen Weges von ζ_0 bis ζ über die neuen Schnittpunkte ζ'_0 und ζ' genommen, so wächst das Integral um eine Grösse $\Delta \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(x,y)\,dz$. Den Grenzwerth des Verhältnisses der letzteren zu dem unendlich abnehmenden Δz kann man nach der Formel



$$(7)\quad \frac{\delta}{\delta z}\int_{\zeta_0}^{\zeta} f(x,y)\,dz = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\delta f(x,y)}{\delta z}\,dz - f(\xi,\eta) + f(\xi_0,\eta_0)$$

berechnen: mit etwaiger Ausnahme derjenigen Fälle, in welchen ζ_0 und ζ Berührungspunkte der dort sich schneidenden Curven sind,[1]) d. i. solcher Fälle, welche sich durch eine geeignete Wahl der Gestalt des Integrationsweges stets vermeiden lassen.

Der in (7) dargestellte Ausdruck ist für die Erkenntniss der allgemeinen Eigenschaften der Functionen zweier reellen oder einer complexen Variabeln von der grössten Bedeutung, da die Gleichung (7) die Basis des ganzen hierüber handelnden Wissensgebietes, der sogenannten „Functionentheorie", bildet.

---

[1]) Sieht man von den auf die Wege $\overline{\zeta_0\zeta'_0}$ und $\overline{\zeta'\zeta}$ bezüglichen beiden letzten Summanden der rechten Seite ab, so ist die Gleichung (7) im Grunde nichts Anderes als die Gleichung (4) des § 33. Die obige Ableitung haben wir gewählt, um von vorne herein die allgemeinste Fassung zu gewinnen und alle dabei auftretenden Rücksichten noch einmal klarzulegen.

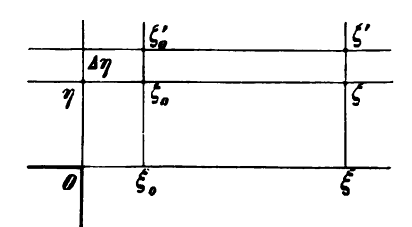
Da es jedoch nützlich ist, den Zusammenhang mit dem Früheren überall vor Augen zu haben, so sei Folgendes bemerkt:

Wir können wegen des Zwecks dieses Buches hier nicht näher in Ansehung beliebiger Functionen auf den Gegenstand eingehn. Es sei deshalb nur erwähnt, dass in allen Fällen zunächst die Integration der Gleichung (7) über die δz auszuführen ist. Hier beschränken wir uns auf die Betrachtung der monogenen Functionen

---

Die Gleichung (4) des § 33 oder

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi_0}^{\xi} f(x, \eta)\, dx = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial \eta}\, dx$$



giebt das Grenzverhältniss des Augments des Integrals $\int_{\xi_0}^{\xi} f(x, \eta) dx$ zu dem Augment $\Delta\eta$, welches den mit der x-Axe parallelen Integrationsweg $\zeta_0 \zeta$ in die parallele Lage $\zeta'_0 \zeta'$ verschiebt.

Bestimmt man nun die Punkte der Ebene durch complexe Coordinaten $x + iy = z$, so ist längs der Graden $\zeta_0 \zeta$ und $\zeta'_0 \zeta'$ das y constant $= \eta$ oder $= \eta + \Delta\eta$, also: $dx = dz$ und: $z = \zeta_0$ für $x = \xi_0$, $z = \zeta$ für $x = \xi$. Dagegen ist auf der Graden $\zeta_0 \zeta'_0$ und auf allen ihren Parallelen das x constant, mithin: $i\partial y = \delta z$, $i\partial\eta = \delta\zeta$, wenn wir das Symbol δ zur Bezeichnung des Differentials benutzen, welche der alleinigen Veränderung von y entsprechen.

Dividirt man daher die Gleichung (8) durch i, so kann sie auch in der Weise

$$\frac{\delta}{\delta z} \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(x, y)\, dz = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\delta f(x, y)}{\delta z}\, dz$$

geschrieben werden.

Damit der Integrationsweg des veränderten Integrals nicht nur von ζ'_0 bis ζ' führe, sondern wieder in ζ_0 beginne und in ζ endige, müssen wir auf der rechten Seite der letzten Gleichung offenbar die Grenzwerthe der Verhältnisse der Integrale

$$\int_{\eta}^{\eta+\Delta\eta} f(\xi_0, y)\, dy \text{ und } \int_{\eta+\Delta\eta}^{\eta} f(\xi, y)\, dy$$

zu dem Increment $\Delta\eta$ hinzufügen. Dieselben sind augenscheinlich

$$+ f(\xi_0, \eta) \text{ und } - f(\xi, \eta).$$

Somit entsteht die oben aufgestellte Gleichung (7); nur dass man noch ihre Gültigkeit bei der allgemeineren Bedeutung der dz und δz darthun muss. Dies bietet indessen keine erhebliche Schwierigkeit.

und befassen uns auch mit diesen nur so weit, als es für die Entwickelung der Functionen complexer Variabeln nach dem Taylorschen Satz unumgänglich nöthig ist.

Da die Gleichung

$$f(\xi,\eta)-f(\xi_0,\eta_0)=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{d f(x,y)}{dz}dz$$

eine identische ist, wenn man festsetzt, dass die Differentiationsrichtungen der Derivirten

$$\frac{d f(x,y)}{dz}$$

sämmtlich auf dem Integrationswege $\zeta_0\,\zeta$ liegen sollen, so lässt sich die Gleichung (7) auch so schreiben:

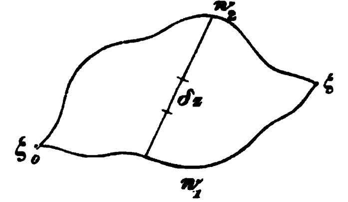
$$\frac{\delta}{\delta z}\int_{\zeta_0}^{\zeta}f(x,y)\,dz=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\left[\frac{\delta f(x,y)}{\delta z}-\frac{d f(x,y)}{dz}\right]\cdot dz.$$

Nun ist aber bei jeder monogenen Function nach dem Lehrsatz des vorigen §:

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta z}=\frac{d f(x,y)}{dz},$$

mithin in Folge der letzten Gleichung:

$$\frac{\delta}{\delta z}\int_{\zeta_0}^{\zeta}f(x,y)\,dz=0.$$



Und hieraus folgt durch eine Integration nach δz, bei welcher der ursprüngliche Integrationsweg w_1 in eine beliebig andere Gestalt w_2 übergeführt wird:

$$(9)\qquad {}^{w_2}\!\int_{\zeta_0}^{\zeta}f(x,y)\,dz-{}^{w_1}\!\int_{\zeta_0}^{\zeta}f(x,y)\,dz=0,$$

$$(10)\qquad {}^{w_1}\!\int_{\zeta_0}^{\zeta}f(x,y)\,dz+{}^{w_2}\!\int_{\zeta}^{\zeta_0}f(x,y)\,dz=0.$$

Fasst man die Voraussetzungen zusammen, unter welchen dieses Resultat zu Stande gekommen ist, so ergiebt sich der

Lehrsatz II.

Ist die Function $f(z)$ einer complexen Variabeln $z = x + iy$ innerhalb eines Gebietes G der z-Fläche **monogen und eindeutig bestimmt**,[1]) so gilt dasselbe von dem Integral

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

falls der Integrationsweg $\overline{z_0 z}$ nirgends aus dem Gebiete G heraustritt. — Der Werth des Integrals ist also völlig unabhängig von der Gestalt[2]) des Integrationsweges —

---

[1]) d. h. besitzt die Function $f(z)$ für jedes z des Gebietes G einen bestimmten endlichen Werth, welcher nicht von dem Wege abhängt, auf welchem man innerhalb G von ζ_0 bis ζ gelangt. — Dass $f(z)$ sich innerhalb G stetig ändere, ist in der Voraussetzung dadurch ausgesprochen, dass sie monogen sein, also überall eine Derivirte $\frac{df(z)}{dz}$ haben soll.

Als Beispiel einer monogenen Function, welche nicht eindeutig ist, kann die Function $f(z) = \sqrt{z^3}$ dienen. Setzt man in ihr $z = v\,e^{i\varphi}$ und lässt φ bei einem constanten Werthe von v um 2π wachsen, geht also um den Punkt $z = 0$ auf einem Kreise einmal bis zum Ausgangspunkte herum, so verwandelt sich $f(v\,e^{i\varphi}) = +v^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3\varphi}{2}}$ allmählich in $f(v\,e^{i(\varphi+2\pi)}) = +v^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3(\varphi+2\pi)}{2}} = -v^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3\varphi}{2}}$. Die Function hat demnach ihr Vorzeichen gewechselt. Ihre Derivirte $f'(z) = \frac{3}{2}\sqrt{z}$ genügt dabei allen Ansprüchen, welche die monogenen Functionen an ihre Derivirten stellen.

[2]) Man findet häufig als eine Beschränkung unseres Satzes die Behauptung aufgestellt, dass der Integrationsweg eine Linie sein müsse, welche in jedem Punkt eine Tangente hat. Unsere Ableitungsweise zeigt, dass seine Zuverlässigkeit im entgegengesetzten Fall nicht leidet; denn es kommt die Länge des Integrationsweges — ein Begriff, welcher sich mit der Existenz der Tangente deckt — nirgends in Betracht.

Bei nicht monogenen Functionen liegt die Sache aber möglicher Weise anders; was wir hier nicht entscheiden wollen, weil die Integration der Gleichung (7) bei ihnen nicht so einfach von statten geht, wie oben.

(9) — und wird stets $=0$, sobald der letztere in seinen Anfangspunkt zurückführt — (10).

§ 72.

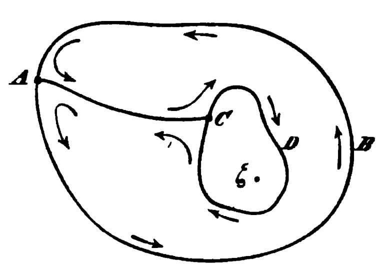
Der Taylorsche Satz für eindeutige monogene Functionen einer complexen Variabeln.

Es sei $f(z)$ eine in dem Gebiete G der z-Fläche endlich bestimmte, eindeutige und monogene Function von z, und ζ ein Punkt desselben Gebietes G.

Dann gilt dasselbe von der Function

$$\frac{f(z)}{z-\zeta}$$

mit alleiniger Ausnahme des Punktes $z=\zeta$, in welchem sie unendlich wird.



Nun integrirt man diese Function nach z längs des Weges ABACDCA, welcher um den Punkt ζ so herumgelegt ist, dass er zu seinem Ausgangspunkte zurückkehrt, ohne den Punkt ζ zwischen sich einzuschliessen. Dann muss der Werth des Integrals $=0$ werden nach dem Lehrsatz II des vorigen §.

Zerlegt man aber den Integrationsweg in die Theilstrecken ABA, AC, CDC, CA, so heben sich die beiden Integrale

$$\int_A^C \frac{f(z)}{z-\zeta} dz, \int_C^A \frac{f(z)}{z-\zeta} dz$$

offenbar auf, weil sie längs derselben Linie AC verlaufen und deshalb der Gleichung

$$\int_A^C \frac{f(z)}{z-\zeta} dz = -\int_C^A \frac{f(z)}{z-\zeta} dz$$

genügen. Es bleiben demnach nur die beiden Integrale J(ABA) längs ABA und J(CDC) längs CDC übrig, so dass die Summe

dieser beiden Integrale $=0$ sein muss. Hat die Integrationsrichtung — welche in der Figur durch Pfeile angezeigt ist — beim ersten Integral den Punkt ζ auf ihrer linken Seite, so hat ihn diejenige des zweiten Integrals rechter Hand. Das zweite Integral ändert sein Vorzeichen daher, wenn man es durch Umkehrung der Integrationsrichtung bei ihm dahin bringt, dass die Integrationsrichtungen beider Integrale von rechts nach links um ζ herumgehn. Dann geht aber die Gleichung

$$J(ABA)+J(CDC)=0,$$

welche bei den entgegengesetzt verlaufenden Integrationsrichtungen bestand, in die Gleichung

$$J(ABA)-J(CDC)=0,$$
$$J(ABA)=J(CDC)$$

über, in welcher die Integrationsrichtungen um ζ herum gleichlaufend sind.

Nun sei ferner der Weg CDC ein Kreis vom Radius r, d. i. es sei auf ihm $z-\zeta=re^{i\varrho}$ mit constantem r, also:

$$l(z-\zeta)=lr+i\varrho, \quad \frac{dz}{z-\zeta}=i\,d\varrho.$$

Mithin ergiebt sich, wenn wir das ϱ als wachsend auf CDC annehmen:

$$J(CDC)=\int_0^{2\pi} f(\zeta+re^{i\varrho})\cdot i\,d\varrho,$$

welchen hinreichend kleinen Werth man auch für den Radius r setzen mag, so dass der Werth des gleich grossen Integrals

$$J(ABA)=\int_0^{2\pi} f(\zeta+re^{i\varrho})\cdot i\,d\varrho$$

unabhängig von r ist.

Daher darf man wegen der Stetigkeit von $f(z)$ auch $r=0$ machen und erhält dadurch:

$$J(ABA)=\int_0^{2\pi} f(\zeta)\cdot i\,d\varrho=i\,2\pi\cdot f(\zeta).$$

Dies giebt den

Lehrsatz I.

Bezeichnet man durch w irgend einen geschlossenen Integrationsweg, welcher einmal um den Punkt $z = \zeta$ herumführt und nur solche Punkte der z-Fläche enthält und einschliesst, in denen die Function $f(z)$ **endlich, eindeutig bestimmt und monogen** ist, so gilt stets die Gleichung

$$(1) \qquad f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int^{w} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz,$$

das Integral längs des Weges w in derjenigen Richtung genommen, in welcher der Richtungswinkel von $(z - \zeta)$ wächst.[1])

Zusatz.

Ist eine Function $f(z)$ an der Stelle $z = \zeta$ endlich bestimmt und in der ganzen Fläche, welche von einer geschlossenen Linie w um ζ herum abgegrenzt wird, auch eindeutig und monogen, so hat nicht nur ihre erste Derivirte $f'(\zeta)$, sondern jede ihrer Derivirten $f^{(r)}(\zeta)$ von beliebig hoher Ordnung r einen völlig bestimmten endlichen Werth.[2]) Sie sind ausserdem sämmtlich eindeutige monogene Functionen von ζ und werden durch die Formel

$$(2) \qquad f^{(r)}(\zeta) = \frac{r!}{2\pi i} \cdot \int^{w} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{r+1}} dz$$

identisch dargestellt.

— Denn auf der rechten Seite von (1) ist ζ ein Parameter der integrirten Function, dessen Veränderung keinen Einfluss auf die Werthe z des Integrationsweges w ausübt; weshalb die Differen-

---

[1]) Man nennt diese Richtung die „positive Umlaufsrichtung".

[2]) Dass die erste Derivirte $f'(\zeta)$ endlich und völlig bestimmt (unabhängig von der Differentiationsrichtung) sei, liegt in der Voraussetzung, weil $f(z)$ an der Stelle $z = \zeta$ monogen sein soll.

tiation nach ζ unter dem Integralzeichen ausgeführt werden darf.[1]) Man erhält also nach und nach:

$$f'(\zeta) = \frac{1!}{2\pi i} \cdot \int^{w} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^2} dz,$$

$$f''(\zeta) = \frac{2!}{2\pi i} \cdot \int^{w} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^3} dz,$$

u. s. w.

wie es die Formel (2) für alle Ordnungen zusammenfasst. Ferner ist stets $f^{(r-1)}(\zeta)$ eine monogene Function, weil ihre Derivirte $f^{(r)}(\zeta)$ nicht von der Differentiationsrichtung abhängt. Und da das Integral rechter Hand in (1) einen bestimmten endlichen Werth hat, so besitzt auch das Integral rechter Hand in (2) bei jedem r einen solchen, weil die integrirten Functionen sich nur um den endlichen Factor $\overline{(z-\zeta)}^{-r}$ unterscheiden.

Substituirt man nun nach der bekannten Summationsformel der geometrischen Reihe in (1):

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \frac{\zeta^2}{z^3} + \frac{\zeta^3}{z^4} + \cdots + \frac{\zeta^{r-1}}{z^r} + \frac{\zeta^r}{z^r(z-\zeta)},$$

so erhält man rechts das Integral einer Summe, welche gliedweise integrirt werden darf, weil die Anzahl der Summanden endlich (nämlich $= r+1$) ist. Es folgt auf diese Weise:

$$2\pi i \cdot f(\zeta) = \int^{w} \frac{f(z)}{z} dz + \zeta^1 \cdot \int^{w} \frac{f(z)}{z^2} dz + \zeta^2 \cdot \int^{w} \frac{f(z)}{z^3} dz + \cdots$$

$$\cdots + \zeta^{r-1} \cdot \int^{w} \frac{f(z)}{z^r} dz + \int^{w} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^r \frac{f(z)}{z-\zeta} dz.$$

---

[1]) Die Phasen des Differentiationsvorganges sind bei der Herleitung der ersten Derivirten:

$$\Delta f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left\{ \int^{w} \frac{f(z)}{z-\zeta-\Delta\zeta} dz - \int^{w} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz \right\} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int^{w} \left\{ \Delta \cdot (z-\zeta)^{-1} \right\} f(z)\, dz,$$

$$\frac{d f(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int^{w} \frac{d \cdot (z-\zeta)^{-1}}{d\zeta} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 1! \int^{w} (z-\zeta)^{-2} f(z)\, dz;$$

analog bei wiederholter Differentiation.

Wenn wir daher über die Lage des Integrationsweges w die weitere Voraussetzung machen, dass er ausser dem Punkte $z = \zeta$ auch den Punkt $z = 0$ umschliesse, und aus den Relationen

$$\int^{w} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0), \int^{w} \frac{f(z)}{z^{m+1}} = 2\pi i \cdot \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

substituiren, welche dann nach (1) und (2) Gültigkeit haben, so ergiebt sich sofort:

$$(3) \quad f(\zeta) = f(0) + \zeta^1 \cdot \frac{f'(0)}{1!} + \zeta^2 \cdot \frac{f''(0)}{2!} + \cdots + \zeta^{r-1} \cdot \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} + \varphi_r,$$

wo

$$(4) \qquad \varphi_r = \frac{1}{2\pi i} \int^{w} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^r \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

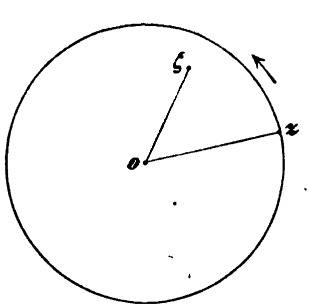
bedeutet.

Dies ist aber der aus § 36, (6) und (7) bekannte Maclaurinsche Satz, nur dass hier der Rest φ_r in einer andern Form erscheint, und dass die Bedingung für die Gültigkeit der Entwickelung unmittelbar an Eigenschaften der Function $f(z)$ — anstatt an solche ihrer r^{ten} Derivirten — geknüpft ist.

Die Transformation unserer Restform (4) in die Form (7) des § 36 lässt sich leicht bewerkstelligen. Es ist jedoch zum Zwecke der Auffindung der Convergenzbedingungen weit bequemer, die Veränderungen unmittelbar zu betrachten, welche mit dem Werthe unseres Ausdruckes (4) vorgehn, wenn r unendlich wächst.

Denn um zunächst den einfachsten Fall zu betrachten, dass man zum Integrationswege einen den Punkt ζ einschliessenden Kreis wählen darf, dessen Centrum im Coordinatenanfang liegt, so besitzt bei dieser Wahl der Modul des Bruchs

$$\frac{\zeta}{z} = m e^{i\mu}$$



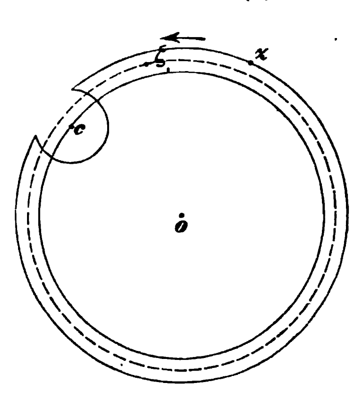
einen auf dem ganzen Integrationswege constanten Werth, welcher die 1 nicht erreicht, und es ist:

$$\lim_{r=\infty} \cdot \left(\frac{\zeta}{z}\right)^r = \lim_{r=\infty} \cdot m^r e^{ir\mu} = 0,$$

also nach (4) auch:

$$\lim_{r=\infty} \cdot \varphi_r = 0;$$

weshalb die Reihe (3) in diesem Falle stets convergirt.



Es ist jedoch nicht bei jedem beliebigen Werthe von ζ möglich, zum Integrationswege einen Kreis um den Nullpunkt herum zu wählen, dessen Radius den Modul von ζ übertrifft. Denn wenn wir den Radius eines um den Nullpunkt herum beschriebenen, zunächst kleinen Kreises allmählich wachsen lassen, so wird es bei vielen Functionen $f(z)$ dahin kommen, dass der Kreis einen oder mehr Punkte $z = c$ trifft, wo $f(z)$ aufhört, eindeutig oder endlich oder monogen zu sein; weshalb der Kreis, wenn man ihn noch weiter wachsen liesse, nicht mehr den Anforderungen genügte, welche unsere Formeln an den Integrationsweg w stellen.

Ist also $\mathrm{mod} \cdot \zeta > \mathrm{mod} \cdot c$ und die Anzahl der Punkte c endlich, so kann man den Integrationsweg zwar in den Zwischenräumen zwischen diesen Punkten so weit hinausschieben, dass auf diesen Theilstrecken $m < 1$ und daher $\lim_{r=\infty} \cdot \left(\frac{\zeta}{z}\right)^r = 0$ wird, was das Verschwinden der entsprechenden Theile des Integrals

$$2\pi i \cdot \varphi_r = \int^{w} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^r \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

zur Folge hat. Es bleibt aber bei jedem Punkte c eine unvermeidliche Einbiegung des Integrationsweges nach dem Innern des begrenzten Flächenstücks hin übrig, auf welcher $\mathrm{mod} \cdot z$ mindestens von $\mathrm{mod} \cdot \zeta$ bis $\mathrm{mod} \cdot c$ abnimmt, so dass auf diesem Theil des Integrationsweges

$$m > 1, \quad \lim_{r=\infty} \cdot \left(\frac{\zeta}{z}\right)^r = \lim_{r=\infty} \cdot m^r e^{ir\mu} = \infty$$

ist. Dies ist aber ein ausreichender Grund, um zu schliessen, dass der Rest φ_r gleichzeitig mit r unendlich wachse.

Der durch c gehende Kreis grenzt also zwei Theile der z-Fläche so gegen einander ab, dass der innere alle Punkte ζ enthält, für welche die Reihe (3) convergirt, der äussere aber alle diejenigen, für welche dies nicht der Fall ist.

Setzen wir, um auf die allgemeinere Form der Taylorschen Reihe zu kommen, in der Gleichung

$$f(\zeta) = f(0) + \zeta^1 \cdot \frac{f'(0)}{1!} + \zeta^2 \cdot \frac{f''(0)}{2!} + \cdots$$

$\zeta = z - a$, $f(z-a) = F(z)$, also $f^{(r)}(0) = F^{(r)}(a)$, und schreiben dann wieder f für F, so ergiebt sich daher der

Lehrsatz II.

Zieht man um den Punkt $z = a$ einen Kreis, in dessen Felde die Function $f(z)$ überall eindeutig verläuft, endlich und monogen ist, während er selbst durch einen oder mehr Punkte hindurchgeht, wo $f(z)$ aufhört, diese Eigenschaften zu besitzen, so gilt die Entwickelung

$$(5) \quad f(z) = f(a) + (z-a)^1 \cdot \frac{f'(a)}{1!} + (z-a)^2 \cdot \frac{f''(a)}{2!} + (z-a)^3 \cdot \frac{f'''(a)}{3!} + \cdots$$

stets für jedes z, welches innerhalb des Kreisfeldes liegt, und niemals für ein z, welches ausserhalb des Kreisfeldes gelegen ist. — Die Reihe auf der rechten Seite von (5) ist innerhalb des Kreisfeldes convergent, ausserhalb desselben divergent.

Definition.

Den fraglichen Kreis nennt man die **Convergenzgrenze** oder den **Convergenzkreis** der Taylorschen Reihe (5).

§ 73.

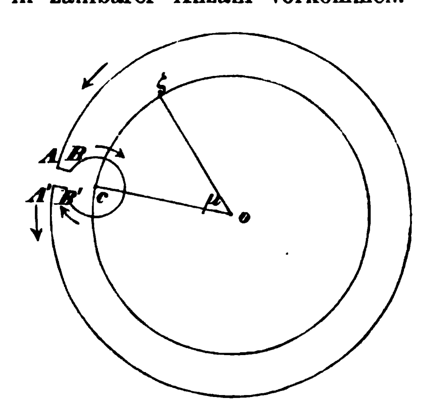
Das Verhalten der Taylorschen Reihe auf der Convergenzgrenze.

Wenden wir uns der bequemeren Darstellung wegen an die Maclaurinsche Form (3) des vorigen §, so handelt es sich um die Untersuchung, was bei unendlich wachsendem r aus dem Reste (4), oder was hierbei aus

$$(1) \qquad 2\pi i \cdot \varphi_r = \int^{w} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^r \frac{f(z)}{z-\zeta} dz$$

werde, wenn ζ einen Punkt des Convergenzkreises bezeichnet.

Es sollen auf ihm diejenigen Punkte c, in denen die Function $f(z)$ aufhört, eindeutig oder endlich oder monogen zu sein, nur in zählbarer Anzahl vorkommen. Dann kann man den Integrationsweg w zwischen ihnen über den Convergenzkreis hinausschieben, so dass — wie wir schon im vorigen § gesehn haben — von unserm Gesammtintegral (1) bei unendlich wachsendem r höchstens die in der Nähe der Punkte c auszuwerthenden Theile übrig bleiben, weil die andern sicher verschwinden. Der in der Figur verzeichnete Punkt c sei einer von den kritischen Punkten. Umgrenzen wir ihn mit einem kleinen Kreise vom Radius v, so bleibt bei ihm der Werth zu untersuchen übrig, welchen das Integral längs des Weges ABB'A' annimmt, wo die Punkte A, B, B', A' sämmtlich in der Verlängerung der Graden $\overline{oc}$ liegen.



Dieser Bestimmung gemäss ist, wenn man

$$z - c = ve^{i\varphi}$$

setzt, auf dem Wege von B nach B' der Vector v constant, während das Argument φ von einem Werthe γ, dem Richtungswinkel der

Graden $\overline{oc}$, aus um 2π abnimmt. Das Theilintegral auf diesem Wege hat also, weil auf ihm

$$d \cdot l(z-c) = \frac{dz}{z-c} = i\,d\varphi$$

ist, den Werth:

$$(2) \qquad J(BB') = i\int_{\gamma}^{\gamma-2\pi} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{r} \cdot \frac{(z-c)f(z)}{z-\zeta} \cdot d\varphi.$$

Auf den Wegen AB und B'A' ist $\varphi = \gamma$ constant und v veränderlich, daher

$$dz = e^{i\gamma}\,dv;$$

und zwar nimmt v auf dem Wege AB von einem gewissen Werthe $cA = v_1$ bis zu dem beliebig klein gewählten Radius v des Kreises BB' ab, auf dem Wege B'A' aber von diesem bis v_1 zu. Die Summe der Theilintegrale längs dieser beiden Wege ist daher:

$$J(AB,\, B'A')$$

$$= \int_{v_1}^{v} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{r} \frac{f(c+ve^{i\gamma})}{z-\zeta} e^{i\gamma} dv + \int_{v}^{v_1} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{r} \frac{f(c+ve^{i(\gamma-2\pi)})}{z-\zeta} e^{i\gamma} dv$$

$$= -\int_{v_1}^{v} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{r} \frac{f(c+ve^{i(\gamma-2\pi)}) - f(c+ve^{i\gamma})}{z-\zeta} e^{i\gamma} dv$$

oder:

$$(3) \qquad J(AB,\, B'A') = -\int_{v_1}^{v} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{r} \cdot \frac{\Delta f(z)}{z-\zeta} e^{i\gamma} dv,$$

wo also $\Delta f(z)$ den Zuwachs bedeutet, den der Functionswerth von $f(z)$ erfährt, wenn die Variable z um den Punkt c herum von einem Punkt der Graden AB zu dem identischen Punkt der Graden B'A' geführt wird.

Wir wollen bei unserer weiteren Betrachtung unser Augenmerk auf den möglichen Fall richten, dass

$$\lim_{z=c} \cdot (z-c) f(z) = C$$

bei jeder Annäherungsrichtung der Variabeln z an c irgend eine endliche Grösse ist incl. Null, schliessen aber dabei nicht aus, dass C eine Function von demjenigen Winkel φ sei, welcher die Annäherungsrichtung bestimmt.

Dann ist, wenn wir jetzt den Radius v des Kreises BB′ sich der Null nähern lassen, nach (2):

$$\lim_{v=0} \cdot J(BB') = i \int_{\gamma}^{\gamma-2\pi} e^{ir\mu} \cdot \frac{C}{c-\zeta} d\varphi$$

oder:

$$(4) \qquad \lim_{v=0} \cdot J(BB') = \frac{i e^{ir\mu}}{c-\zeta} \int_{\gamma}^{\gamma-2\pi} C d\varphi = -i 2\pi \cdot \frac{C'}{c-\zeta} \cdot e^{ir\mu},$$

wo μ den Winkel $co\zeta$ und C′ einen Mittelwerth zwischen denjenigen bedeutet, welche C zwischen $\varphi = \gamma$ und $\varphi = \gamma - 2\pi$ annimmt.

Mithin kann man

$$(5) \qquad J(BB') = -i 2\pi \frac{e^{ir\mu}}{1-e^{i\mu}} \cdot \frac{C'}{c} + F(v)$$

setzen, wo F(v) eine Grösse bedeutet, welche entweder gleichzeitig mit v unendlich abnimmt oder überhaupt $= 0$ ist.

Die Nummer r durfte bisher jeden beliebigen Werth haben. Stellen wir uns jetzt vor, dass sie unendlich wachse, so nähert sich der Modul von $\left(\frac{\zeta}{z}\right)^r$ im Integral (3) dem Grenzwerthe Null, weil in ihm der Modul von z den Modul von ζ um mehr als den Kreisradius v übertrifft. Folglich muss, weil die Werthe der $\Delta f(z)$ entweder sämmtlich verschwinden oder wenigstens endlich sind,

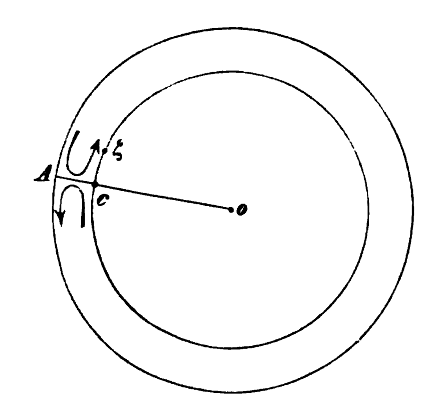
$$(6) \qquad \lim_{r=\infty} \cdot J(AB, B'A') = 0$$

sein.

Würde nun nicht gleichzeitig auch $F(v) = 0$, so entstände der Widerspruch, dass der auszuwerthende Theil von φ_r, welcher seinem Begriffe nach völlig bestimmt ist, dieses nicht sei.

Mithin bleibt für das ganze Integral längs ABB′A′ nur der Ausdruck (4) übrig, welcher aus dem Umgrenzungsintegral (2) entstanden ist.

Bei der obigen Untersuchung haben wir vorausgesetzt, dass ζ sich von c unterscheide. Direct $\zeta = c$ zu setzen, geht auch nicht an, weil man dadurch den Punkt ζ ausserhalb des vom Integrationswege umgrenzten Flächenstücks verlegen würde. Ziehen wir jedoch, wie oben geschehen ist, den Integrationsweg zunächst bei c zusammen und nähern dann ζ auf dem Convergenzkreise dem Punkte c, so bleiben unsere Resultate bei jedem Grade der Annäherung in Kraft.



Da nun der allein in Betracht kommende Ausdruck (4) wegen des von ζ unabhängigen Werthes der Grösse C′ hierbei unendlich wächst oder constant $= 0$ ist, je nachdem sich C′ von Null unterscheidet oder dies nicht thut, so hat die Verschiedenheit der Lagen des Punktes ζ auf dem Convergenzkreise gegen den Punkt c nur dann einen Einfluss, wenn C′ von Null verschieden ist: in diesem Falle ist der Modul des Ausdruckes (4) demjenigen der Differenz $(c - \zeta)$ umgekehrt proportional.

Dies führt, indem wir durch die am Ende des vorigen § angezeigte Substitution wieder zur Taylorschen Form zurückkehren, zu dem folgenden

Lehrsatz.

Liegen auf dem Convergenzkreise der Taylorschen Entwickelung

$$7)\quad f(z) = f(a) + (z-a)^1 \cdot \frac{f'(a)}{1!} + (z-a)^2 \cdot \frac{f''(a)}{2!} + (z-a)^3 \cdot \frac{f'''(a)}{3!} + \cdots$$

nur solche singulären[1]) Punkte c, und zwar in zählbarer Anzahl, bei welchen

[1]) „Singuläre" Punkte nennt man solche, in denen die Function $f(z)$ aufhört, endlich oder eindeutig oder monogen zu sein.

$$\lim_{z=c} \cdot (z-c)f(z)=0$$

ist, so ist die rechte Seite der Gleichung (7) für jeden **Punkt** z **des Convergenzkreises** mit der linken Seite identisch, convergirt also stets, wenn $f(z)$ einen bestimmten endlichen Werth besitzt, und macht die etwaigen endlichen Sprünge, so wie die unendlichen Vergrösserungen dieser Function beim Verschieben von z auf der Convergenzgrenze mit.

Liegen aber auf dem Convergenzkreise auch solche singulären Punkte $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$, bei welchen

(8) $$\lim_{z=c_k} \cdot (z-c_k)f(z)=C_k$$

einen endlichen, von Null verschiedenen Werth besitzt, so übertrifft die linke Seite der Gleichung (7) die Summe der r ersten Summanden der rechten Seite — desto genauer, je grösser r wird — um die Grösse

(9) $$\varphi_r = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{C'_k}{z-c_k} e^{ir\mu_k}.$$

In diesem Ausdruck bedeutet C'_k einen Mittelwerth zwischen allen denjenigen, welche C_k annimmt, wenn die unabhängige Variable z sich dem Werthe c_k in verschiedenen Richtungen nähert, und μ_k den Richtungswinkel des Quotienten $\frac{z-a}{c_k-a}$, in welchem z den in (7) gemeinten Punkt des Convergenzkreises bezeichnet. — Unter dieser Voraussetzung oscillirt also die Reihe (7), und die Oscillationen (9) sind desto grösser, je näher z einem der Punkte c_k liegt.

— Wächst das Product $(z-c_k)f(z)$ bei der Annäherung von z an irgend ein c_k unendlich, so divergirt die Reihe auf der rechten Seite von (7) für jedes auf dem Convergenzkreise liegende z.[1])

[1]) Dies folgt ohne Weiteres aus (4).

§ 74.

Beispiele für die Entwickelung der Functionen einer complexen Variabeln.

I.

Die Function

(1) $$f(z) = (1+z)^n$$

ist, wenn man für den Exponenten n einen beliebigen reellen oder complexen Werth

(2) $$n = \nu + i\mu$$

gestattet, an der Stelle $z = 0$ im Allgemeinen mehrdeutig, weil man die Auswahl zwischen allen denjenigen Werthen hat, welche der Ausdruck

(3) $$f(0) = 1^n = \left(e^{2\pi\mu}\right)^{-k} \cdot \left\{\cos(k \cdot 2\pi\nu) + i\sin(k \cdot 2\pi\nu)\right\}$$

annimmt, wenn man für k beliebige positive oder negative ganze Zahlen setzt.

Ist aber ein bestimmter unter diesen Werthen ausgewählt, so geht dieser bei der stetigen Veränderung von z stetig in völlig bestimmte andere Werthe über, wenn nur die Stelle $z = -1$ vermieden wird, und es ist $f(z)$ auch monogen.

Zieht man daher um den Punkt $z = 0$ einen Kreis mit dem Radius 1, so ist dieser der Convergenzkreis der Entwickelung von $f(z)$ nach dem Maclaurinschen Satz (§ 72, L. II). Und da die Rechnung sich formal nicht von derjenigen unterscheidet, welche in § 39 bei reellem z zur Ausführung kam, so ergiebt sich, wenn man in (3) für k den Werth 0 wählt:

(4) $$(1+z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \cdots$$
$$\left\{1^n = +1, \quad \mathrm{mod} \cdot z < 1\right\}.$$

Will man die Auswahl zwischen den möglichen Werthen von 1^n noch frei lassen, so muss man die rechte Seite von (4) mit dem Ausdruck (3) multipliciren.

Um zu ermitteln, wann in unserer Entwickelung $\mathrm{mod} \cdot z = 1$ sein darf, kommt es nach § 73 auf die Feststellung des Werthes von

(5) $$\lim_{z=-1} \cdot (z+1) f'(z) = \lim_{z=-1} \cdot (1+z)^{n+1}$$

an.

Setzen wir nämlich

$$z+1 = u e^{i\omega} = e^{lu + i\omega}$$

so wird

$$f(z) = (1+z)^n = e^{(lu+i\omega)(\nu+i\mu)} = e^{\nu lu - \mu\omega} \cdot e^{i(\mu lu + \nu\omega)},$$

weshalb $f(z)$ bei der Annäherung von z an (—1) (wegen des negativen Werthes von lu) unendlich wächst, wenn ν eine negative Zahl ist, sich der Null nähert, wenn $\nu > 0$ ist, und für den Fall eines verschwindenden ν den unbestimmten endlichen Werth

$$\lim_{u=0} \cdot e^{-\mu\omega} \cdot \left\{\cos(\mu \cdot lu) + i \sin(\mu \cdot lu)\right\}$$

annimmt. — Es ist daher $z = (-1)$ in der That ein singulärer Punkt, welcher die Vergrösserung des Convergenzkreises hindert.

Jedoch bleibt nach § 73 die Gültigkeit der Gleichung (4) bestehn, wenn der Ausdruck (5), d. i. wenn der Ausdruck

$$\lim_{z=-1} \cdot (1+z)^{n+1} = \lim_{u=0} \cdot e^{(\nu+1) lu - \mu\omega}\, e^{i(\mu lu + (\nu+1)\omega)}$$

bei jedem Werthe von ω verschwindet. Und dies findet offenbar stets statt, wenn $(\nu+1) > 0$ ist.

Dagegen unterliegt die Differenz der rechten und der linken Seite von (4) gewissen endlichen periodischen Schwankungen, wenn unser letzter Ausdruck einen endlichen (bestimmten oder unbestimmten) Werth hat — was bei $(\nu+1) = 0$ eintritt — und wächst unendlich, wenn dies der Ausdruck (5) thut, d. i. wenn $(\nu+1) < 0$ ist.

Lehrsatz.

Vindicirt man der Potenz 1^n den Werth $+1$, so ist bei jedem z, dessen Modul den Werth 1 nicht erreicht

(6) $$(1+z)^n = 1 + \binom{n}{1} z^1 + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \cdots,$$

welchen reellen oder complexen Werth

(7) $$n = \nu + i\mu$$

auch besitzen mag. Soll $(1+z)^n$ für $z=0$ einen andern seiner möglichen Werthe

(8) $$1^n = \left(e^{2\pi\mu}\right)^{-k} \cdot \left\{\cos(k \cdot 2\pi\nu) + i \sin(k \cdot 2\pi\nu)\right\},$$

bei denen k eine beliebige ganze positive oder negative Zahl bedeutet, annehmen, so muss man die rechte Seite der Reihenentwickelung (6) mit ihm multipliciren.

Ist in (7)

$$\nu + 1 > 0,$$

so gilt die Gleichung (6) auch noch für $\text{mod} \cdot z = 1$, d. i.: es gilt in diesem Falle, wenn $z \doteq e^{i\varphi}$ gesetzt wird, die Relation

(9) $$\left(1+e^{i\varphi}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} e^{i\varphi} + \binom{n}{2} e^{i2\varphi} + \binom{n}{3} e^{i3\varphi} + \cdots$$

ohne Ausnahme, so dass die rechte Seite bei jedem φ **convergirt**, für welches die linke Seite einen Sinn hat.

Dagegen **divergirt** die rechte Seite von (9) für jedes φ, sobald

$$\nu + 1 < 0$$

ist, und **oscillirt** bei jedem bestimmten Werth der linken Seite, sobald

$$\nu + 1 = 0$$

ist.

Um einige speciellere Folgerungen aus diesem Satze zu ziehn, so mag n zunächst eine solche reelle Zahl sein, welche der Bedingung

$$n + 1 > 0$$

genügt. Dann zerfällt die Gleichung (9), weil die $\binom{n}{r}$ reelle Werthe haben und

$$\left(1+e^{i\varphi}\right)^n = e^{i\frac{n\varphi}{2}} \left(e^{-i\frac{\varphi}{2}} + e^{+i\frac{\varphi}{2}}\right)^n = \left(\cos\frac{n\varphi}{2} + i \sin\frac{n\varphi}{2}\right) \cdot 2^n \cos^n\frac{\varphi}{2}$$

ist, in die beiden folgenden reellen Gleichungen. Da diese den Gültigkeitsbereich der Formeln § 69, (1) u. (2) erweitern, so ver-

wandeln wir der leichteren Vergleichung wegen noch φ in x. — Es ergiebt sich, dass stets

$$(10)\ 2^n \cos\frac{x}{2}^n \cos\frac{nx}{2} = 1 + \binom{n}{1}\cos x + \binom{n}{2}\cos 2x + \binom{n}{3}\cos 3x + \cdots,$$

$$(11)\ 2^n \cos\frac{x}{2}^n \sin\frac{nx}{2} = \binom{n}{1}\sin x + \binom{n}{2}\sin 2x + \binom{n}{3}\sin 3x + \cdots$$

gesetzt werden kann, sobald $(n+1)$ reell und >0 ist. — Im Fall eines negativen n (zwischen 0 und -1) werden aber die linken Seiten von (10) und (11) für $x=\pi$ sinnlos und die rechten Seiten divergent.

In ganz analoger Weise gelten auch die Gleichungen (1) und (2) des § 68 noch für diejenigen negativen n, welche $n+1>0$ ergeben, nur dass in (1) nicht $\cos x = 0$ und in (2) nicht $\sin x = 0$ sein darf. Daher behalten die dortigen Gleichungen (3) und (4) ihre Gültigkeit für $-1<n<0$ und $\cos x>0$, die Gleichungen (9) und (10) für $-1<n<0$ und $\sin x>0$. Mithin ist nach (3) und (9) u. A., wenn man noch 2x für x schreibt:

$$(12)\quad \frac{1}{\sqrt{2\cos 2x}} = \cos x - \frac{1}{2}\cos 5x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos 9x - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cos 13x + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cos 17x - \cdots$$

$$\left\{-\frac{\pi}{4} < x < +\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$(13)\quad \frac{1}{\sqrt{2\sin 2x}} = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos\left(9x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cos\left(13x-\frac{\pi}{4}\right) + \cdots$$

$$\left\{0 < x < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Ist das n complex, so sind es auch die Binomialcoefficienten $\binom{n}{r}$. Wir wollen in diesem Falle

$$(14)\qquad \binom{n}{r} = \frac{a_r}{|r} \cdot e^{i\alpha_r}$$

setzen. Zur recurrirenden Berechnung der a und α ergiebt sich aus der Relation

$$\binom{n}{r+1} = \binom{n}{r} \cdot \frac{n-r}{r+1}$$

die Gleichung:

$$a_{r-1} e^{i\alpha_{r+1}} = a_r e^{i\alpha_r} \cdot (\nu - r + i\mu),$$

d. i.:

$$(15) \quad \begin{cases} a_{r+1} \cos \alpha_{r+1} = (\nu - r)\, a_r \cos \alpha_r - \mu a_r \sin \alpha_r, \\ a_{r+1} \sin \alpha_{r+1} = (\nu - r)\, a_r \sin \alpha_r + \mu a_r \cos \alpha_r. \end{cases}$$

Und hieraus folgt:

$$(16)^{1)} \quad \begin{cases} a_{r+1} = a_r \cdot \sqrt{\mu^2 + (\nu - r)^2} = \sqrt{\prod_{s=0}^{s=r} \left[\mu^2 + (\nu - s)^2\right]}; \\ \sin(\alpha_{r+1} - \alpha_r) = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + (\nu - r)^2}}, \\ \cos(\alpha_{r+1} - \alpha_r) = \frac{\nu - r}{\sqrt{\mu^2 + (\nu - r)^2}}, \\ \operatorname{tng}(\alpha_{r+1} - \alpha_r) = \frac{\mu}{\nu - r}. \end{cases}$$

---

1) Der Modul von $\binom{n}{r}$, nämlich $\frac{a_r}{r!}$, nähert sich, falls $(\nu + 1) > 0$ ist, bei unendlich wachsendem r dem Grenzwerthe Null — wie dies sowohl aus der Convergenz der Reihe (9), als aus § 57 geschlossen werden kann — bleibt endlich, falls $(\nu + 1) = 0$ ist, und wächst unendlich, falls $(\nu + 1) < 0$ ist.

Der Richtungswinkel α_r dagegen wächst unter allen Umständen unendlich in demjenigen Sinne, welcher durch das dem Vorzeichen von μ entgegengesetzte Vorzeichen bestimmt wird. Denn nach der letzten Gleichung in (16) ist:

$$-\alpha_{r+1} = +\sum_{s=0}^{s=r} \operatorname{arc\,tng} \frac{\mu}{s - \nu}.$$

Und diese Summe wächst, weil $\lim_{r=\infty} \cdot \left[\frac{\mu}{r-\nu} : \operatorname{arc\,tng} \frac{\mu}{r-\nu}\right] = +1$ ist, nach § 52 gleichzeitig mit der unendlich wachsenden Summe

Substituiren wir nun in (6), indem wir z als reell $= x$ annehmen, so folgt:

$$(17)\quad \begin{cases} (1+x)^{\nu} \cdot \cos\left[\mu\, l(1+x)\right] \\ = 1 + a_1 \cos\alpha_1 \cdot x + a_2 \cos\alpha_2 \cdot x^2 + a_3 \cos\alpha_3 \cdot x^3 + \cdots, \\ (1+x)^{\nu} \cdot \sin\left[\mu\, l(1+x)\right] \\ = \quad a_1 \sin\alpha_1 \cdot x + a_2 \sin\alpha_2 \cdot x^2 + a_3 \sin\alpha_3 \cdot x^3 + \cdots \end{cases}$$

für jedes x, dessen absoluter Werth < 1 ist, und auch für $x = +1$, falls $\nu + 1 > 0$ ist.

Ferner findet sich für jedes $z = ve^{i\varphi}$, dessen Modul $v < 1$ ist, wenn der Abkürzung wegen

$$1 + ve^{i\varphi} = ue^{i\omega},$$

also

$$u = \sqrt{1 + 2v\cos\varphi + v^2},$$

$$\omega = \arcsin\frac{v\sin\varphi}{u} = \arccos\frac{1 + v\cos\varphi}{u} = \operatorname{arc\,tng}\frac{v\sin\varphi}{1 + v\cos\varphi}$$

gesetzt wird:

$$(18)\quad \begin{cases} u^{\nu} e^{-\mu\omega} \cos(\mu\, l\, u + \nu\omega) \\ = 1 + a_1 v^1 \cos(\alpha_1 + \varphi) + a_2 v^2 \cos(\alpha_2 + 2\varphi) + \cdots, \\ u^{\nu} e^{-\mu\omega} \sin(\mu\, l\, u + \nu\omega) \\ = \quad a_1 v^1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + a_2 v^2 \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + \cdots \end{cases}$$

Und es darf hier, wenn $(\nu + 1) > 0$ ist, auch $v = 1$ genommen werden, nur dass nicht gleichzeitig $\varphi = \pi$ sei. —

$$\sum_{s=k}^{s=r} \frac{\mu}{s-\nu} = \mu \cdot \sum_{s=k}^{s=r} \frac{1}{s-\nu}$$

so, dass der Quotient beider Summen sich dem Grenzwerthe $+1$ nähert.

Daher liegen die complexen Punkte $\binom{n}{r}$ stets auf einer sich unendlich oft um den Nullpunkt herumwindenden Spirale, welche sich in der Richtung der wachsenden Winkel verlängert, wenn μ negativ ist — und umgekehrt, wenn μ positiv ist.

Unter dieser Beschränkung geht ω in $\frac{\varphi}{2}$, u in $2\cos\frac{\varphi}{2}$ über, und es nehmen die Relationen (18) die Form an:

(19)
$$\begin{cases} 2^{\nu} e^{-\frac{\mu\varphi}{2}} \cos^{\nu}\frac{\varphi}{2} \cos\left[\frac{\nu\varphi}{2} + \mu\, l\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right] \\ = 1 + a_1 \cos(\alpha_1 + \varphi) + a_2 \cos(\alpha_2 + 2\varphi) + \cdots, \\ 2^{\nu} e^{-\frac{\mu\varphi}{2}} \cos^{\nu}\frac{\varphi}{2} \sin\left[\frac{\nu\varphi}{2} + \mu\, l\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right] \\ = \quad a_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + a_2 \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + \cdots \end{cases}$$

Wir haben dieses Beispiel so ausführlich behandelt, um zu zeigen, zu welchem Reichthum von Relationen ein an sich einfacher Satz bei seiner völligen Ausnutzung durch die Substitution complexer Zahlen Anlass geben kann.

II.

Die Function

(20) $$f(z) = l(1 + z)$$

ist vieldeutig, da man sie nach § 62, (11) in beliebiger Weise um ein ganzes Vielfaches von $i \cdot 2\pi$ vergrössern und verkleinern darf, ohne ihren Sinn zu ändern. Wählt man aber unter ihren möglichen Werthen einen bestimmten aus, so kann man sie bei stetiger Veränderung von z nur auf eine Weise stetig ändern, sobald man dabei die Stelle $z = -1$ vermeidet, und sie ist dann auch monogen.

Daher lässt sie sich innerhalb des um den Nullpunkt liegenden Kreisfeldes vom Radius 1 durch die Maclaurinsche Reihe (§ 72, L. II) entwickeln, nachdem festgesetzt ist, welchen seiner möglichen Werthe der Ausdruck

$$f(0) = l1 = i \cdot k\, 2\pi$$

erhalten soll. Wählen wir $l1 = 0$, so ergiebt sich — wie bei reellen Variabeln:

(21) $$l(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 - \cdots$$

$$\{\mathrm{mod}\cdot z < 1\}\cdot$$

Nun ist ausserdem, wenn man

$$1 + z = ue^{i\omega}$$

setzt, nach § 45, (15):

$$\lim_{z=-1} \cdot (z+1)f(z) = \lim_{u=0} \cdot ue^{i\omega} \cdot l(ue^{i\omega}) = e^{i\omega} \cdot \lim_{u=0} \cdot u\left[lu + i\omega\right] = 0.$$

Mithin gilt (nach § 73) unsere Entwickelung (21) auch für jedes

$$z = ve^{i\varphi}$$

mit dem Modul $v = 1$, wenn das Argument φ nicht $\cos\varphi = -1$ giebt.

Führt man in (21)

$$1 + z = 1 + ve^{i\varphi} = ue^{i\omega}$$

ein, wobei

(22) $$u = \sqrt{1 + 2v\cos\varphi + v^2},$$

$$\omega = \arcsin\frac{v\sin\varphi}{u} = \arccos\frac{1 + v\cos\varphi}{u} = \mathrm{arc\,tng}\frac{v\sin\varphi}{1 + v\cos\varphi}$$

wird, so ist bei der Auswahl des Quadranten, in welchem ω genommen wird, darauf zu achten, dass

$$l(1+z) = lu + i\omega$$

bei der stetigen Annäherung von v an Null in $l1 = 0$ übergehn muss.

Man erhält daher durch die Zerfällung von (19) in zwei reelle Reihen:

(23) $$l\sqrt{1 + 2v\cos\varphi + v^2}$$

$$= v\cos\varphi - \frac{1}{2}v^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}v^3\cos 3\varphi - \frac{1}{4}v^4\cos 4\varphi + \cdots,$$

$$(24)\quad \omega = \arc\sin \frac{v \sin\varphi}{\sqrt{1 + 2v\cos\varphi + v^2}}$$

$$= \arc\cos \frac{1 + v\cos\varphi}{\sqrt{1 + 2v\cos\varphi + v^2}} = \operatorname{arctng} \frac{v\sin\varphi}{1 + v\cos\varphi}$$

$$= v\sin\varphi - \frac{1}{2}v^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}v^3\sin 3\varphi - \frac{1}{4}v^4\sin 4\varphi + \cdots;$$

wo bei $v < 1$ für φ jeder beliebige Werth gesetzt, bei $v = 1$ aber **nicht** $\cos\varphi = -1$ genommen werden darf, ω endlich so gewählt werden muss, dass ω zugleich mit v verschwindet.

Substituirt man $(\pi + \varphi)$ für φ, so ändern die Cosinus und die Sinus der ungraden Vielfachen von φ ihre Vorzeichen, während diejenigen der graden Vielfachen ungeändert bleiben. Es folgt:

$$(25)\quad l\,\frac{1}{\sqrt{1 - 2v\cos\varphi + v^2}}$$

$$= v\cos\varphi + \frac{1}{2}v^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}v^3\cos 3\varphi + \frac{1}{4}v^4\cos 4\varphi + \cdots,$$

$$(26)\quad \operatorname{arctng} \frac{v\sin\varphi}{1 - v\cos\varphi}$$

$$= v\sin\varphi + \frac{1}{2}v^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}v^3\sin 3\varphi + \frac{1}{4}v^4\sin 4\varphi + \cdots;$$

wo bei $v < 1$ jeder beliebige Werth von φ, bei $v = 1$ aber **nicht** $\cos\varphi = +1$ genommen werden darf, und der $\operatorname{arctng} \frac{v\sin\varphi}{1 - v\cos\varphi}$ so zu bestimmen ist, dass er zugleich mit v verschwindet.

Machen wir nun $v = 1$ und schreiben gleichzeitig x für φ, so wird:

$$l\sqrt{1 + 2v\cos\varphi + v^2} = \frac{1}{2}l(2 + 2\cos x) = l2 + \frac{1}{2}l\cdot\cos^2\frac{x}{2},$$

$$l\,\frac{1}{\sqrt{1 - 2v\cos\varphi + v^2}} = -\frac{1}{2}l(2 - 2\cos x) = -l2 - \frac{1}{2}l\cdot\sin^2\frac{x}{2}.$$

Mithin ergiebt sich aus (23) und (25):

$$(27)\quad +l2+\frac{1}{2}l\cdot\cos^2\frac{x}{2}=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{4}\cos 4x+\cdots$$

$$\left\{-1<\cos x \overline{\gtrless} +1\right\}$$

$$(28)\quad -l2-\frac{1}{2}l\cdot\sin^2\frac{x}{2}=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos 4x+\cdots;$$

$$\left\{-1 \overline{\gtrless} \cos x<+1\right\}.$$

$$(29)\quad \frac{1}{4}l\cdot\cot^2\frac{x}{2}=\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{7}\cos 7x+\cdots\text{[1]}$$

$$\left\{-1<\cos x<+1\right\}$$

Mittelst derselben Substitution ergiebt sich aus (24):

$$\operatorname{arc\,tng}\frac{v\sin\varphi}{1+v\cos\varphi}=\operatorname{arc\,tng}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\operatorname{arc\,tng}\left(\operatorname{tng}\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}x,$$

wo der Arcus $\frac{x}{2}$ zugleich mit $\operatorname{tng}\frac{x}{2}$ verschwinden und $\cos x$ nicht $=-1$ werden soll. Man muss daher x zwischen $(-\pi)$ und $(+\pi)$ wählen.

Daher ist:

$$(30)\quad \frac{1}{2}x=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots$$

$$\left\{-\pi<x<+\pi\right\}$$

Bei der Substitution in (26) aber erhält man

$$\operatorname{arc\,tng}\frac{v\sin\varphi}{1-v\cos\varphi}=\operatorname{arc\,tng}\frac{\sin x}{1-\cos x}=\operatorname{arc\,tng}\left(\cot\frac{x}{2}\right),$$

wo x so gewählt werden muss, dass der arc tng an einer andern Stelle verschwindet, als an welcher $\cos x=+1$ wird. In dem zwischen 0 und 2π liegenden Intervall wird dies, weil

[1]) Hieraus folgt z. B.:

$$l\cot\frac{\pi}{8}=64\cdot\sqrt{2}\cdot\left\{\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{3}{9\cdot11\cdot13\cdot15}+\frac{5}{17\cdot19\cdot21\cdot23}+\frac{7}{25\cdot27\cdot29\cdot31}+\cdots\right\}.$$

$$\cot\frac{x}{2} = \operatorname{tng}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + k\pi\right)$$

ist, nur an der Stelle $x = \pi$ erfüllt; und es ist daher:

$$(31)\quad \frac{1}{2}(\pi - x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots\text{[1]}$$

$$\{0 < x < 2\pi\}$$

Aus (30) und (31) ergiebt sich durch Addition die Gleichung:

$$(32)\quad \frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots,$$

$$\{0 < x < \pi\}$$

in welcher u. A. die Leibnitzsche Reihe (§ 64, (16))

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

als besonderer Fall für $x = \frac{\pi}{2}$ enthalten ist.

Setzt man $x = \frac{\pi}{4}$, also

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin 5x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin 7x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

u. s. w.,

so folgt:

$$(33)\quad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left\{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 16\sqrt{2}\cdot\left\{\frac{3}{3\cdot5\cdot7\cdot9} + \frac{7}{11\cdot13\cdot15\cdot17} + \frac{11}{19\cdot21\cdot23\cdot25} + \cdots\right\}$$

— und durch ähnliche Substitutionen bekannter Sinus andere Relationen.

Die Gleichungen (27) bis (32) sind gute Beispiele solcher Reihenentwickelungen, welche nicht gliedweise differentiirt werden dürfen. — Dass dies nicht geschehen darf, folgt einerseits aus § 59, weil die Reihe der zweiten Derivirten zweifellos divergirt,

[1] Dasselbe folgt aus (30), wenn man dort $(\pi - x)$ für x substituirt.

andrerseits aber auch aus § 73, weil die aus (27) bis (31) abgeleiteten Reihen die reellen Bestandtheile von

$$\frac{d \cdot l(1+z)}{dz} = \frac{1}{1+z}$$

auf der Convergenzgrenze ausdrücken würden, während es aus § 73 bekannt ist, dass die Entwickelung von $\frac{1}{1+z}$ für $v=1$ oscillirt.

Dagegen ist die gliedweise Integration der Gleichungen (27) bis (32) gestattet, sowohl nach § 59, als auch nach § 73, nach welchem die reellen Bestandtheile von

$$\int l(1+z)\,dz = (1+z)\cdot\left[l(1+z)-1\right]$$

aus (27) bis (31) hervorgehn.

Ferner beachte man die Unterbrechungen der Stetigkeit, welche die Reihen in (30), (31), (32) an den Grenzen der Gültigkeit dieser Gleichungen erleiden, ohne ihre Convergenz aufzugeben. Substituirt man nämlich in ihnen einen Werth von x, welcher nach den bezüglichen Anmerkungen nicht erreicht werden darf, so erhält jede von diesen Reihen den Werth Null, während die linke Seite von Null verschieden ist.

Diese Reihen (30), (31), (32) haben also die Qualification guter Beispiele für die in § 54 gemachte Bemerkung, dass die Summe einer unendlichen Reihe nicht der Grenze Null zuzustreben braucht, wenn es ihre einzelnen Glieder thun.

Es ist eine weitere Eigenthümlichkeit der Reihe (30), dass sie, wenn man in ihr $(x+\pi)$ für x substituirt, in

$$-\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x - \cdots,$$

also nach (31) in $\frac{1}{2}(x-\pi)$ übergeht — anstatt in $\frac{1}{2}(x+\pi)$, wie man nach (30) geneigt sein möchte zu erwarten — dass sie also bei dem stetigen Durchgange des wachsenden x durch π den doppelten Sprung $+\frac{\pi}{2}, \pm 0, -\frac{\pi}{2}$ macht.

§ 75.

Die Eigenschaften der durch eine Potenzreihe definirten Functionen.

Wird eine Function als Summe einer Potenzreihe definirt:

(1) $$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + \cdots,$$

so setzt dies die Convergenz für gewisse Werthe von z voraus.

Bezeichnet man

$$A_n = a_n e^{i\alpha_n}, \quad z = v e^{i\varphi},$$

so ist der Ausdruck (1) identisch mit

(2) $$f(z) = a_0 \cos\alpha_0 + a_1 v^1 \cos(\alpha_1 + \varphi) + a_2 v^2 \cos(\alpha_2 + 2\varphi) + a_3 v^3 \cos(\alpha_3 + 3\varphi) + \cdots$$
$$+ i \cdot \left\{a_0 \sin\alpha_0 + a_1 v^1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + a_2 v^2 \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + a_3 v^3 \sin(\alpha_3 + 3\varphi) + \cdots\right\};$$

und die Convergenz der complexen Reihe (1) bedeutet, dass in (2) beide reelle Reihen convergiren.

Substituirt man nun an der Stelle des z ein solches mit einem kleineren Modul, während das Argument φ ungeändert bleibt, so erlangen beide Reihen, weil sie Potenzreihen nach v sind, die Eigenschaft der unbedingten Convergenz (§ 54, L. IV). Mithin convergirt alsdann die Reihe der absoluten Werthe ihrer Glieder, und daher auch die Reihe, welche aus der Summe der absoluten Werthe je zweier entsprechenden Glieder dieser beiden Reihen gebildet wird, d. i. die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$a_n v^n \cdot \left[\text{abs} \cdot \cos(\alpha_n + n\varphi) + \text{abs} \cdot \sin(\alpha_n + n\varphi)\right].$$

Der Werth des in der eckigen Klammer stehenden Ausdrucks ist aber so gross, wie

$$\cos\omega + \sin\omega = \sqrt{\cos\omega^2 + 2\cos\omega\sin\omega + \sin\omega^2} = \sqrt{1 + \sin 2\omega},$$

wenn ω einen Arcus des ersten Quadranten bedeutet, und liegt daher zwischen 1 und $\sqrt{2}$. Folglich convergirt dann auch die Reihe der Moduln

$$a_0 + a_1 v^1 + a_2 v^2 + \cdots + a_n v^n + \cdots,$$

weil, wie wir so eben gesehen haben, das Glied $a_n v^n$ nicht grösser ist, als das entsprechende Glied einer unbedingt convergenten Reihe. Hieraus endlich folgt weiter, dass die beiden reellen Reihen in (2) bei dem verkleinerten v unbedingt convergiren, wenn man das φ beliebig verändert.

Wird also die Convergenz der Reihe (1) für irgend einen reellen oder complexen Werth von z als bekannt vorausgesetzt, so ist damit die **unbedingte** Convergenz für jedes z von kleinerem Modul ausgesprochen: es findet Convergenz statt in dem ganzen Felde desjenigen Kreises, welcher mit dem Modul des ersteren um den Nullpunkt gezogen ist.

Verstehen wir nun unter z irgend einen im Convergenzfelde liegenden Punkt, so darf man, wenn vorläufig bloss der Modul von $z = v e^{i\varphi}$ als veränderlich, das Argument φ aber als constant angesehen wird, nach § 59 die Potenzreihe

$$(3) \qquad f(z) = A_0 + A_1 v e^{i\varphi} + A_2 v^2 e^{i2\varphi} + A_3 v^3 e^{i3\varphi} + \cdots$$

gliedweise nach v differentiiren, und die Derivirte erhält einen völlig bestimmten Werth. Man findet:

$$\frac{df(z)}{dv} = e^{i\varphi} \cdot \left\{ 1 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 v^1 e^{i\varphi} + 3 \cdot A_3 v^2 e^{i2\varphi} + \cdots \right\},$$

oder weil

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{df(z)}{dv} \cdot \frac{dv}{dz} = \frac{df(z)}{dv} \cdot \frac{1}{e^{i\varphi}}$$

ist:

$$(4) \qquad \frac{df(z)}{dz} = 1 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 z^1 + 3 \cdot A_3 z^2 + \cdots$$

Dasselbe gilt aber auch, wenn man (3) bei constantem v als Potenzreihe nach $e^{i\varphi}$ auffasst. Dann geht aus (3) hervor, wenn man diese Differentiation durch δ andeutet:

$$\frac{\delta f(z)}{\delta \cdot e^{i\varphi}} = v \cdot \left\{ 1 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 v^1 e^{i\varphi} + 3 \cdot A_3 v^2 e^{i2\varphi} + \cdots \right\},$$

oder weil hierbei

$$\frac{\delta f(z)}{\delta z} = \frac{\delta f(z)}{\delta \cdot e^{i\varphi}} \cdot \frac{\delta \cdot e^{i\varphi}}{\delta z} = \frac{\delta f(z)}{\delta \cdot e^{i\varphi}} \cdot \frac{1}{v}$$

ist:

(5) $$\frac{\delta f(z)}{\delta z} = 1 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 z^1 + 3 \cdot A_3 z^2 + \cdots$$

Mithin stimmen die Derivirten (4) und (5), welche nach zwei senkrecht auf einander stehenden Richtungen genommen sind, überein. Wir wollen sie durch F bezeichnen.

Die Differentiation nach einer beliebigen dritten Richtung werde durch $\mathfrak{d}$ angedeutet. Dann ist:

$$\mathfrak{d}z = dz + \delta z, \quad 1 = \frac{dz}{\mathfrak{d}z} + \frac{\delta z}{\mathfrak{d}z},$$

und nach dem Satze über die partielle Differentiation:

$$\frac{\mathfrak{d}f(z)}{\mathfrak{d}z} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{\mathfrak{d}z} + \frac{\delta f(z)}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\mathfrak{d}z}$$
$$= F \cdot \left[\frac{dz}{\mathfrak{d}z} + \frac{\delta z}{\mathfrak{d}z}\right] = F.$$

Dies heisst:

Jede Potenzreihe ist in ihrem Convergenzfelde eine monogene Function derjenigen Variabeln, nach deren Potenzen sie fortschreitet.

Ferner darf man die Potenzreihe längs jedes Weges, welcher in ihrem Convergenzfelde verläuft, gliedweise integriren; — denn es genügt hierzu, nach § 59, dass die in der Richtung des Integrationsweges genommene Derivirte $\frac{df(z)}{dz}$ einen endlichen Werth besitzt; und dies ist nach dem Obigen der Fall.

Anmerkung.

Aus der Erkenntniss, dass eine jede Potenzreihe (1) innerhalb ihres Convergenzfeldes eine eindeutige, endlich bestimmte und monogene Function von z ist, folgt, dass sich **nur** Functionen dieser Gattung in Potenzreihen entwickeln lassen, während in den vorhergehenden §§ das Umgekehrte gezeigt ist, nämlich, dass sämmtliche Functionen besagter Art der Darstellung durch Potenzreihen fähig sind.

Daher ist es beispielsweise unmöglich, die Function $e^{-\frac{1}{z^2}}$ in eine Potenzreihe nach z zu entwickeln. Denn führt man $z = v e^{i\varphi}$ ein, so ist die Function

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}} = e^{-\frac{1}{v^2}(\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi)} = e^{-\frac{\cos 2\varphi}{v^2}} \cdot \left[\cos\frac{\sin 2\varphi}{v^2} + i \cdot \sin\frac{\sin 2\varphi}{v^2}\right]$$

an der Stelle $z = 0$ nicht eindeutig, wie verlangt werden müsste, sondern es erlangt $f(z)$ bei der Annäherung an diese Stelle sehr verschiedene Werthe je nach der Grösse des Richtungswinkels φ. Man erhält nämlich u. A.:

$\lim\limits_{z=0} \cdot f(z) = 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$, also für reelle z;

$\lim\limits_{z=0} \cdot f(z) = +\infty$ für $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, also für rein imaginäre z;

$\lim\limits_{z=0} \cdot f(z) = \lim\limits_{z=0} \cdot \left[\cos\frac{1}{v^2} + i \sin\frac{1}{v^2}\right]$ für $\varphi = \frac{\pi}{4}$, — und dies ist ein endlich unbestimmter Grenzwerth.

Freilich würde man auch von dem Versuche, den Maclaurinschen Satz zur Entwickelung von $e^{-\frac{1}{z^2}}$ bei der Rechnung mit bloss reellen Zahlen anzuwenden, schon deshalb abstehn müssen, weil diese Function für $z = 0$ keinen Substitutionswerth besitzt, sondern nur einen Grenzwerth $\lim\limits_{z=0} \cdot e^{-\frac{1}{z^2}} = 0$ zeigt. — Denselben Grenzwerth haben auch alle ihre Derivirten.

Endlich sei noch bemerkt, dass aus der Gleichung (1), wenn man sie mit z^{r+1} dividirt und dann längs einer einmal um den Punkt $z = 0$ herumführenden Linie w integrirt, die Relation

$$\int^{w} \frac{f(z)}{z^{r+1}} dz = 2\pi i \cdot A_r$$

folgt, welche nach § 72, (2) die Identität von A_r mit $\frac{f^{(r)}(0)}{r!}$, also die Identität von (1) mit der Maclaurinschen Reihe a posteriori feststellt.

Das allgemeine Glied der Entwickelung dieses Integrals ist nämlich:

$$\int^{w} A_m z^{m-r} \cdot \frac{dz}{z},$$

oder wenn man — wie es nach § 71, L. II freisteht — einen Kreis vom Radius v zum Integrationswege nimmt und daher

$$z = ve^{i\varphi}, \quad \frac{dz}{z} = d \cdot lz = i \cdot d\varphi, \quad z^{m-r} = v^{m-r} e^{i(m-r)\varphi}$$

setzt:

$$\int_0^{2\pi} A_m v^{m-r} e^{i(m-r)\varphi} i d\varphi = i \cdot A_m v^{m-r} \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(m-r)\varphi} d\varphi.$$

Und dieser Ausdruck geht, wenn $m = r$ ist, offenbar in $i \cdot A_m \cdot 2\pi$ über; während er bei jedem von r verschiedenen m verschwindet, weil

$$\int e^{i(m-r)\varphi} \cdot i d\varphi = \frac{1}{m-r} e^{i(m-r)\varphi}$$

ist, was für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ denselben Werth $\frac{1}{m-r}$ hat.

§ 76.

Der Taylorsche Satz für die Functionen von mehreren unabhängigen Variabeln.

Versteht man unter $f(u, v, w, \ldots)$ eine Function mehrerer Variabeln u, v, w, ..., welche sämmtlich von einander unabhängig sind, und unter $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \ldots$ irgend welche reellen oder complexen Zahlen, um welche jene von gewissen Werthen $u_0, v_0, w_0, \ldots$ aus wachsen sollen, so kann man den Übergang von $f(u_0, v_0, w_0 \ldots)$ in $f(u_0 + \mathfrak{u}, v_0 + \mathfrak{v}, w_0 + \mathfrak{w}, \ldots)$ dadurch hervorgebracht denken, dass in der Function

(1) $F(z) = f(u_0 + \mathfrak{u} \cdot z, v_0 + \mathfrak{v} \cdot z, w_0 + \mathfrak{w} \cdot z, \cdots) = f(u, v, w, \cdots) = f$

die eine Variable z von 0 bis 1 wächst, während u_0, $\mathfrak{u}$, v_0, $\mathfrak{v}$, w_0, $\mathfrak{w}$, ... constant sind.

Entwickelt man nun die Function F(z) nach steigenden Potenzen von z vermittelst des Taylorschen Satzes, drückt dabei die vollständigen Derivirten $F^{(r)}(0)$ durch die partiellen Derivirten von f aus, und setzt dann $z = 1$, so erhält man diejenige Darstellung von

$$F(1) = f(u_0 + \mathfrak{u},\ v_0 + \mathfrak{v},\ w_0 + \mathfrak{w},\ \cdots),$$

welche verlangt wird.

Beachtet man, dass wegen der substituirten Relationen

$$u = u_0 + \mathfrak{u}\cdot z,\ v = v_0 + \mathfrak{v}\cdot z,\ w = w_0 + \mathfrak{w}\cdot z,\ \cdots$$

die Werthe der vollständigen Derivirten

$$\frac{du}{dz} = \mathfrak{u},\quad \frac{dv}{dz} = \mathfrak{v},\quad \frac{dw}{dz} = \mathfrak{w},\ \cdots$$

nicht mehr von z abhängen, so erhält man nach § 9 und § 32:

$$\begin{aligned}
F'(z) &= \mathfrak{u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \mathfrak{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \mathfrak{w}\cdot\frac{\partial f}{\partial w} + \cdots,\\
F''(z) &= \mathfrak{u}^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \mathfrak{v}^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \mathfrak{w}^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + \cdots\\
&\quad + 2\mathfrak{u}\mathfrak{v}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + 2\mathfrak{u}\mathfrak{w}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial w} + \cdots\\
&\quad + 2\mathfrak{v}\mathfrak{w}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w} + \cdots\\
&\quad + \cdots,\\
F'''(z) &= \mathfrak{u}^3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial u^3} + \mathfrak{v}^3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial v^3} + \mathfrak{w}^3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial w^3} + \cdots\\
&\quad + 3\mathfrak{u}^2\mathfrak{v}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial u^2\,\partial v} + 3\mathfrak{u}^2\mathfrak{w}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial u^2\,\partial w} + \cdots\\
&\quad + 3\mathfrak{u}\mathfrak{v}^2\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial u\,\partial v^2} + 3\mathfrak{u}\mathfrak{w}^2\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial u\,\partial w^2} + \cdots\\
&\quad + \mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial u\,\partial v\,\partial w} + \cdots\\
&\quad + 3\mathfrak{v}^2\mathfrak{w}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial v^2\,\partial w} + \cdots\\
&\quad + 3\mathfrak{v}\mathfrak{w}^2\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial v\,\partial w^2} + \cdots\\
&\quad + \cdots,
\end{aligned}$$

Beim ersten Anblick hat es den Anschein, als ob das allgemeine Bildungsgesetz dieser Ausdrücke sehr verwickelt sein möchte. Jedoch überzeugt man sich leicht durch den „Schluss von n auf (n + 1)“, dass bei jeder Nummer n

$$(2)\quad F^{(n)}(z) = \sum \frac{n!\,\mathfrak{u}^{\alpha}\cdot\mathfrak{v}^{\beta}\cdot\mathfrak{w}^{\gamma}\cdots}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\cdots}\cdot\frac{\partial^n f(u, v, w, \cdots)}{\partial u^{\alpha}\cdot\partial v^{\beta}\cdot\partial w^{\gamma}\cdots},\ (\alpha+\beta+\gamma+\cdots=n)$$

hervorgeht, wo für α, β, γ, $\cdots$ nach und nach alle ganzen Zahlen von 0 bis n zu setzen sind. — Denn diese Relation ist nach den ausgeführten Rechnungen richtig für $n = 1$; und differentiirt man (2) von Neuem nach z, so erhält man eine Gleichung von derselben Form, nur dass (n + 1) an der Stelle von n auftritt.

Die Form der Symbole in der Gleichung (2) reizt wegen der Ähnlichkeit mit denjenigen, welche den sogenannten polynomischen Satz ausdrücken, dazu, diesen als mnemotechnisches Hülfsmittel zu benutzen. Man sagt daher, es sei in **„symbolischer Darstellung“**:

$$(3)\quad F^{(n)}(z) = \left(\frac{\mathfrak{u}}{\partial u} + \frac{\mathfrak{v}}{\partial v} + \frac{\mathfrak{w}}{\partial w} + \cdots\right)^{n}\cdot\partial^n f(u, v, w, \cdots),$$

wo nach der formalen Entwickelung der n^{ten} Potenz des Polynoms

$$\frac{\mathfrak{u}}{\partial u} + \frac{\mathfrak{v}}{\partial v} + \frac{\mathfrak{w}}{\partial w} + \cdots$$

die Nenner unter den Factor

$$\partial^n f(u, v, w, \cdots)$$

zu setzen sind, nachdem man mit diesem gliedweise multiplicirt hat.

Eine andere Frage als diejenige nach der Klarheit des Bildungsgesetzes der Ausdrücke für $F^{(n)}(z)$ tritt uns entgegen, sobald wir es unternehmen, die Rechnungen für eine concret gegebene Function wirklich auszuführen. Ob dabei übersichtliche Resultate gefunden werden, das hängt genau ebenso vom Charakter der zu entwickelnden Function ab, wie bei denjenigen Functionen, welche

von vorne herein nur eine Variable enthalten. Auch unterliegt die Convergenz der Entwickelung keiner andern Beurtheilung, da F(z) als Function von z im Felde des Kreises vom Radius 1 um den Nullpunkt herum endlich, eindeutig bestimmt und monogen sein und diese Eigenschaften auch auf der Convergenzgrenze selbst in dem in § 73 besprochenen Maasse behalten muss.

Diese Erwägungen führen — indem wir jetzt der Kürze wegen u, v, w, ... für u_0, v_0, w_0, ... schreiben — zu dem folgenden

Lehrsatz.

Giebt man in der Function $f(u, v, w, \ldots)$ den Parametern u, v, w, ... die reellen oder complexen Incremente $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, ..., so kann man, falls die Function

$$(4) \qquad F(z) = f(u + \mathfrak{u}\cdot z,\ v + \mathfrak{v}\cdot z,\ w + \mathfrak{w}\cdot z, \cdots)$$

für $\mathrm{mod}\cdot z \leq 1$ endlich, eindeutig bestimmt und monogen ist, stets

$$(5) \qquad f(u+\mathfrak{u}, v+\mathfrak{v}, w+\mathfrak{w}, \cdots) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F'''(0)}{3!} + \cdots$$

$$= f(u, v, w, \cdots) + \left[\mathfrak{u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \mathfrak{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \mathfrak{w}\cdot\frac{\partial f}{\partial w} + \cdots\right]$$

$$+ \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F'''(0)}{3!} + \cdots$$

darstellen; und es gilt diese Entwickelung auch dann noch, wenn die Function F(z) die verlangten Eigenschaften bei einzelnen Werthen $e^{i\varphi}$ von z (welche den Modul 1 haben) zwar verliert, aber nicht aufhört, der Grenzbedingung

$$(6) \qquad \lim_{z=e^{i\varphi}} \cdot (z - e^{i\varphi})\cdot F(z) = 0$$

zu genügen.

Die Werthe von $F^{(n)}(0)$ lassen sich symbolisch in der Form

$$(7) \qquad F^{(n)}(0) = \left(\frac{\mathfrak{u}}{\partial u} + \frac{\mathfrak{v}}{\partial v} + \frac{\mathfrak{w}}{\partial w} + \cdots\right)^n \cdot \partial^n f(u, v, w, \cdots)$$

durch die partiellen Derivirten von $f(u, v, w, \ldots)$ nach den Parametern u, v, w, ... und durch deren Incremente $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \ldots$ ausdrücken.

Der nach der Summation der ersten r Glieder auf der rechten Seite von (5) noch bleibende Rest Φ_r ist — auch wenn die Reihe nicht convergirt — durch jede von den Formeln

$$(8)\quad \Phi_r = \frac{1}{r!}\int_0^1 \left\{ \left(\frac{\mathfrak{u}}{\partial u} + \frac{\mathfrak{v}}{\partial v} + \frac{\mathfrak{w}}{\partial w} + \cdots\right)^r \cdot \partial^r f\left(u + \mathfrak{u}\cdot\left(1 - t^{\frac{1}{r}}\right), v + \mathfrak{v}\left(1 - t^{\frac{1}{r}}\right), w + \mathfrak{w}\left(1 - t^{\frac{1}{r}}\right), \cdots\right) \cdot dt \right\},$$

$$(9)\quad \Phi_r = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int \frac{f(u + \mathfrak{u}\cdot z, v + \mathfrak{v}\cdot z, w + \mathfrak{w}\cdot z, \cdots)}{z^r(z - 1)} dz$$

dargestellt (n. § 38, (3) und § 72, (4)), wobei es sich hinsichtlich des geschlossenen Integrationsweges in (9) von selbst versteht, dass er um die Punkte $z = 0$ und $z = +1$ herumgeht.

Zusatz.

Besitzt die Function f nur **zwei** unabhängige Parameter u und v, so nimmt die Relation (7) folgende einfache Gestalt an:

$$(10)\quad F^n(0) = \left(\frac{\mathfrak{u}}{\partial u} + \frac{\mathfrak{v}}{\partial v}\right)^n \cdot \partial^n f(u, v)$$

$$= \mathfrak{u}^n \cdot \frac{\partial^n f(u, v)}{\partial u^n} + \binom{n}{1} \mathfrak{u}^{n-1} \mathfrak{v}^1 \cdot \frac{\partial^n f(u, v)}{\partial u^{n-1} \partial v} + \binom{n}{2} \mathfrak{u}^{n-2} \mathfrak{v}^2 \cdot \frac{\partial^n f(u, v)}{\partial u^{n-2} \partial v^2} + \cdots$$

$$\cdots + \binom{n}{n} \mathfrak{v}^n \cdot \frac{\partial^n f(u, v)}{\partial v^n};$$

d. i., wenn man

$$\frac{\partial^n f(u, v)}{\partial u^r \partial v^{n-r}} = \overset{(r,\, n-r)}{f(u, v)}$$

bezeichnet:

(11) $$\frac{F^{(n)}(0)}{n!}$$

$$=\mathfrak{u}^n\cdot\frac{\overset{(n,0)}{f}(u,v)}{n!}+\mathfrak{u}^{n-1}\mathfrak{v}^1\cdot\frac{\overset{(n-1,1)}{f}(u,v)}{(n-1)!\,1!}+\mathfrak{u}^{n-2}\mathfrak{v}^2\cdot\frac{\overset{(n-2,2)}{f}(u,v)}{(n-2)!\,2!}+\cdots$$

$$\cdots+\mathfrak{u}^1\mathfrak{v}^{n-1}\cdot\frac{\overset{(1,n-1)}{f}(u,v)}{1!\,(n-1)!}+\mathfrak{v}^n\cdot\frac{\overset{(0,n)}{f}(u,v)}{n!}.$$

Und es lautet dann die Gleichung (5):

(12) $$f(u+\mathfrak{u},v+\mathfrak{v})=f(u,v)+\left[\mathfrak{u}\cdot\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}+\mathfrak{v}\cdot\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right]$$

$$+\left[\mathfrak{u}^2\cdot\frac{\overset{(2,0)}{f}(u,v)}{2!}+\mathfrak{u}^1\mathfrak{v}^1\cdot\frac{\overset{(1,1)}{f}(u,v)}{1!\,1!}+\mathfrak{v}^2\cdot\frac{\overset{(0,2)}{f}(u,v)}{2!}\right]$$

$$+\left[\mathfrak{u}^3\cdot\frac{\overset{(3,0)}{f}(u,v)}{3!}+\mathfrak{u}^2\mathfrak{v}^1\cdot\frac{\overset{(2,1)}{f}(u,v)}{2!\,1!}+\mathfrak{u}^1\mathfrak{v}^2\cdot\frac{\overset{(1,2)}{f}(u,v)}{1!\,2!}+\mathfrak{v}^3\cdot\frac{\overset{(0,3)}{f}(u,v)}{3!}\right]$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Beispiel.

Will man aus der Gleichung

(13) $$z^2=2ax+2by$$

den Zuwachs $\mathfrak{z}$, welcher dem gleichzeitigen Wachsthum von x um $\mathfrak{x}$ und von y um $\mathfrak{y}$ entspricht, nach steigenden ganzen homogenen[1]) Functionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ entwickeln, so kann man so verfahren, dass man nach der Anleitung des letzten Zusatzes — da jetzt u und v von x und y vertreten werden — nach und nach alle partiellen Derivirten gleich hoher Ordnung von

$$f(x,y)=z=(2ax+2by)^{\frac{1}{2}}$$

bildet und dann in (12) einsetzt.

[1]) Unter einer „homogenen Function n^{ten} Grades von u, v, w..“ versteht man eine solche, welche der Gleichung

$$\varphi(\theta\cdot u,\ \theta\cdot v,\ \theta\cdot w,\ldots)=\theta^n\cdot\varphi(u,v,w,\ldots)$$

genügt. — Die Function $F^{(n)}(0)$ in (7) ist eine homogene Function n^{ten} Grades von $\mathfrak{u},\mathfrak{v},\mathfrak{w},\ldots$

Bequemer ist es, die vollständigen Derivirten von

$$(14)\qquad F(t) = \{2a(x+\mathfrak{x}t) + 2b(y+\mathfrak{y}t)\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \{2ax + 2by + 2(a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y})\cdot t\}^{\frac{1}{2}}$$

nach t für $t = 0$ in die Gleichung (5) einzusetzen, also diese Gleichung direct in der Form

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F'''(0)}{3!} + \cdots$$

oder

$$(15)\qquad \mathfrak{z} = F(1) - F(0) = \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F'''(0)}{3!} + \cdots$$

zu benutzen. Es ergiebt sich nämlich aus (14) durch Differentiation nach t ohne irgend welche Weitläufigkeit:

$$\frac{F'(t)}{1!} = \binom{\frac{1}{2}}{1}\{2ax + 2by + 2(a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y})\cdot t\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[2(a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y})\right]^{1},$$

$$\frac{F''(t)}{2!} = \binom{\frac{1}{2}}{2}\{2ax + 2by + 2(a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y})\cdot t\}^{-\frac{3}{2}}\cdot\left[2(a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y})\right]^{2},$$

u. s. w.

$$\frac{F^{(n)}(t)}{n!} = \binom{\frac{1}{2}}{n}\cdot\{2ax + 2by + 2(a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y})\cdot t\}^{\frac{1}{2}-n}\cdot\left[2(a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y})\right]^{n}\cdot$$

$$= \binom{\frac{1}{2}}{n}\cdot F(t)\cdot\left\{\frac{a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}}{a(x+\mathfrak{x}t) + b(y+\mathfrak{y}t)}\right\}^{n},$$

$$\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\frac{1}{2}}{n}\cdot z\left\{\frac{a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}}{ax + by}\right\}^{n}.$$

Mithin geht aus (15) hervor:

$$(16)\qquad \mathfrak{z} = z\cdot\left\{\binom{\frac{1}{2}}{1}\cdot\left(\frac{a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}}{ax + by}\right)^{1} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\cdot\left(\frac{a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}}{ax + by}\right)^{2}\right.$$
$$\left. + \binom{\frac{1}{2}}{3}\cdot\left(\frac{a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}}{ax + by}\right)^{3} + \cdots\right\}$$

für alle Werthe von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, welche so beschaffen sind, dass die in (14) dargestellte Function F(t) endlich, eindeutig bestimmt und monogen bleibt, sobald t alle complexen Werthe durchläuft, deren Modul $\overline{\gtrless}$ 1 ist, oder dass F(t) auch an einzelnen Stellen $t = e^{i\varphi}$ hiervon abweicht, ohne die Bedingung

$$\lim_{t = e^{i\varphi}} \cdot \; (t - e^{i\varphi}) F(t) = 0$$

zu verletzen. Diese Bedingungsgleichung wird von unserm F(t) auch an der kritischen Stelle

$$2ax + 2by + 2(a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}) \cdot t = 0, \quad t = -\frac{ax + by}{a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}}$$

erfüllt.

Man hat es daher zum Zwecke der Gültigkeit der Entwickelung (16) frei, den Incrementen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ von x und y irgend welche Werthe zu geben, für welche

$$\operatorname{mod} \cdot \frac{ax + by}{a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}} \geq 1, \quad \operatorname{mod} \cdot \frac{a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}}{ax + by} \leq 1$$

ist.

Diese Bedingung lässt sich in allen Fällen, in denen nicht gleichzeitig $x = 0$ und $y = 0$ ist, für gewisse Werthe von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ erfüllen; und es zeigt eine einfache Rechnung, dass dabei die Argumente von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eine Rolle spielen, d. h. bei reellen Incrementen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, dass deren Vorzeichen von Belang sind.

Zu demselben Resultat gelangt man übrigens auch durch die Anwendung des binomischen Satzes auf den Ausdruck

$$\mathfrak{z} = \left\{2ax + 2by + 2(a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y})\right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{2ax + 2by\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= z \cdot \left[\left\{1 + \frac{a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}}{ax + by}\right\}^{\frac{1}{2}} - 1\right].$$

Capitel XII.

Die algebraischen Gleichungen.

§ 77.

Existenz und Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Bekanntlich nennt man jeden Werth von z, für welchen die „ganze rationale algebraische Function n^{ten} Grades“

$$f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0$$

verschwindet, d. i.: für welchen die Gleichung

$$f(z) = 0$$

zutrifft, eine Wurzel dieser Gleichung oder — im Hinblick auf die geometrische Veranschaulichung — einen Nullpunkt der Function $f(z)$.

Hierbei dürfen die Coefficienten $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ ganz beliebige reelle oder complexe Zahlen sein.

Nun unterliegt es keinem Zweifel, dass $f(z)$ bei jedem Werthe von z eine endliche, eindeutig bestimmte und monogene Function von z ist. Also ist auch

$$\frac{1}{f(z)}$$

eine eindeutige und monogene Function von z, nur fragt es sich, ob sie auch überall endlich ist.

Machen wir die Hypothese, dies sei der Fall, so würde für jeden beliebigen Werth ζ von z nach § 72, (1) die Gleichung

$$\frac{2\pi i}{f(\zeta)} = \int^{w} \frac{dz}{(z-\zeta) \cdot f(z)}$$

zutreffen, welchen geschlossenen Integrationsweg w um ζ herum man auch wählen möge. Dies ergiebt u. A., wenn man

$$\zeta = 0, \quad z = v e^{i\varphi}, \quad v = \text{Const.}, \quad \frac{dz}{z} = d\,l z = i\,d\varphi$$

setzt, dass

$$\frac{2\pi}{a_0} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{f(ve^{i\varphi})} = \frac{1}{v^n} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{v} e^{-i\varphi} + \cdots + \frac{a_0}{v^n} e^{-in\varphi}\right) \cdot e^{in\varphi}}$$

sein müsste, wie gross der Vector v von z auch gemacht wird. Dies widerspricht sich aber, weil man v so gross machen kann, dass das letzte Integral beliebig wenig von

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{e^{in\varphi}} = \frac{1}{n} \cdot \Big[\sin n\varphi + i \cos n\varphi\Big]_0^{2\pi} = 0$$

abweicht, und daher so gross, dass der Modul der ganzen rechten Seite kleiner als derjenige der linken wird.

Hierbei ist allerdings vorausgesetzt, dass a_0 nicht $= 0$ sei. Jedoch liegt hierin nur scheinbar eine Besonderung der Fragestellung, da es sich in den Fällen, in welchen $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{r-1} = 0$ gegeben ist, darum handelt, ob die Klammer in

$$f(z) = z^r \cdot \left\{z^{n-r} + a_{n-1} z^{n-r-1} + \cdots + a_{r+1} z^1 + a_r\right\}$$

für ein reelles oder complexes z verschwinden muss; denn es wird dann Niemand die Existenz der Wurzel $z = 0$ bezweifeln.

M i t h i n g i e b t e s u n t e r a l l e n U m s t ä n d e n m i n d e s t e n s e i n e n r e e l l e n o d e r c o m p l e x e n W e r t h v o n z, f ü r w e l c h e n $f(z) = 0$ w i r d.

Bezeichnet man ihn durch ζ_1, so ist demnach:

$$0 = \zeta_1^n + a_{n-1} \cdot \zeta_1^{n-1} + a_{n-2} \cdot \zeta_1^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot \zeta_1^2 + a_1 \cdot \zeta_1^1 + a_0,$$

und wenn man dies von (1) subtrahirt:

$$f(z) = (z^n - \zeta_1^n) + a_{n-1} \cdot (z^{n-1} - \zeta_1^{n-1}) + \cdots + a_2 \cdot (z^2 - \zeta_1^2) + a_1 \cdot (z^1 - \zeta_1^1).$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung geht die Division mit $(z - \zeta_1)$ auf, weil bei jedem ganzen r

$$\frac{z^r - \zeta^r}{z - \zeta} = z^{r-1} + z^{r-2} \cdot \zeta^1 + z^{r-3} \cdot \zeta^2 + \cdots + z^1 \cdot \zeta^{r-2} + \zeta^{r-1}$$

ist, und man erhält nach der Ausführung der Division und dem Zusammenziehen der gleich hohen Potenzen von z als Quotienten eine ganze rationale algebraische Function $(n-1)^{ten}$ Grades von z.

Daher lässt sich $f(z)$ nunmehr so darstellen:

$$f(z) = (z - \zeta_1) \cdot \left\{ z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + b_{n-3} z^{n-3} + \cdots + b_1 \cdot z^1 + b_0 \right\} \cdot$$

Gemäss dem, was oben bewiesen ist, muss die Klammer für irgend einen Werth ζ_2 von z verschwinden und durch $(z - \zeta_2)$ ohne Rest theilbar sein. Daher kann man $f(z)$ auch so darstellen:

$$f(z) = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \cdot \left\{ z^{n-2} + c_{n-3} z^{n-3} + c_{n-4} z^{n-4} + \cdots + c_1 z^1 + c_0 \right\}.$$

Und wenn man auf diese Weise zu schliessen fortfährt, so gelangt man schliesslich zu dem Ausdruck:

$$f(z) = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2)(z - \zeta_3) \cdots (z - \zeta_{n-2})(z - \zeta_{n-1}) \cdot \left\{ z^1 + p_0 \right\}.$$

Schreibt man endlich noch $(-\zeta_n)$ für p_0, so kann man das Resultat in folgender Weise aussprechen:

Lehrsatz.

Jede ganze rationale algebraische Function n^{ten} Grades

(1) $$f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0$$

lässt sich in n Factoren ersten Grades von der Form $(z - \zeta)$ zerlegen, d. i. auf die Gestalt

(2) $$f(z) = (z - \zeta_1) \cdot (z - \zeta_2) \cdot (z - \zeta_3) \cdots (z - \zeta_n)$$

bringen, wo die ζ eben so wenig von z abhängen, wie die a.

Man spricht dies auch so aus:

Jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades besitzt n reelle oder complexe Wurzeln.

Man will aber damit nicht gesagt haben, dass die Gleichung

$$f(z) = 0$$

durch n von einander verschiedene Werthe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ erfüllt werde, sondern ebenfalls nur anzeigen, dass die Function $f(z)$ verschwindet, sobald es irgend einer unter den n Factoren des Ausdrucks (2) thut.

Auch ist es klar, dass die Transformation des Ausdrucks (1) in die Form (2) **nur auf eine Weise** möglich ist. Denn wiederholt man die Zerfällung von (1) in Factoren und trifft dabei zuerst anstatt des Factors $(z-\zeta_1)$ einen andern $(z-\zeta'_1)$, so besitzt das Endresultat

$$(3) \qquad f(z)=(z-\zeta'_1)\cdot(z-\zeta'_2)\cdot(z-\zeta'_3)\cdots(z-\zeta'_n)$$

nothwendig für jedes beliebige z denselben Werth wie der Ausdruck (2), verschwindet also auch für jedes $z=\zeta_r$, was es nicht thun könnte, wenn nicht jedes ζ_r unter den ζ'_r vorkäme; und umgekehrt.

Daher kann die Gleichung $f(z)=0$ nicht noch andere als die n Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n$ haben; da die Ausdrücke (1) und (2) zugleich verschwinden müssen.

§ 78.

Mehrfache Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Kommen in dem Producte (2) des vorigen § gleiche Factoren vor, so ist die Function

$$(1)\ f(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_2z^2+a_1z^1+a_0$$

identisch mit

$$(2)\ f(z)=(z-\zeta_1)^{m_1}\cdot(z-\zeta_2)^{m_2}\cdot(z-\zeta_3)^{m_3}\cdots(z-\zeta_k)^{m_k},$$

$$\{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_k=n\}.$$

Mithin kann man, wenn irgend eines dieser ζ_r durch ζ bezeichnet wird,

$$(3) \qquad f(z)=(z-\zeta)^m\cdot\varphi(z)$$

schreiben, wo $\varphi(z)$ eine algebraische Function $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, welche für $z=\zeta$ nicht verschwindet.

Differentiirt man nun die Gleichung (3) nach z, so erhält man nach und nach:

$$f'(z)=m\cdot(z-\zeta)^{m-1}\cdot\varphi(z)+(z-\zeta)^m\cdot\varphi'(z),$$

$$f''(z)=m(m-1)\cdot(z-\zeta)^{m-2}\cdot\varphi(z)+2m(z-\zeta)^{m-1}\cdot\varphi'(z)$$
$$+(z-\zeta)^m\cdot\varphi''(z).$$

u. s. w.

$$f^{(r)}(z) = r!\left\{\binom{m}{r}(z-\zeta)^{m-r}\cdot\varphi(z) + \binom{m}{r-1}(z-\zeta)^{m-r+1}\cdot\frac{\varphi'(z)}{1!} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \binom{m}{0}(z-\zeta)^{m}\cdot\frac{\varphi^{(r)}(z)}{r!}\right\}.$$

Daher verschwinden auch $f'(z), f''(z), \cdots, f^{(m-1)}(z)$ für $z = \zeta$, während $f^{(m)}(z)$ den nicht verschwindenden Werth $m!\,\varphi(\zeta)$ annimmt.

Entwickelt man aber nach dem Taylorschen Satze

$$f(z) = f(\zeta) + (z-\zeta)^1\cdot\frac{f'(\zeta)}{1!} + (z-\zeta)^2\cdot\frac{f''(\zeta)}{2!} + \cdots,$$

so erkennt man, dass umgekehrt

$$f(z) = (z-\zeta)^m\cdot\frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!} + (z-\zeta)^{m+1}\cdot\frac{f^{(m+1)}(\zeta)}{(m+1)!} + \cdots$$
$$= (z-\zeta)^m\cdot\varphi(z)$$

hervorgeht, wenn die Grössen $f'(\zeta), f''(\zeta), \ldots, f^{(m-1)}(\zeta)$ sämmtlich verschwinden, $f^{(m)}(\zeta)$ aber nicht verschwindet.

Dies giebt den

Lehrsatz I.

Ist $z = \zeta$ eine m-fache Wurzel der algebraischen Gleichung $f(z) = 0$, so ist sie auch eine Wurzel der Gleichungen

$$f'(z) = 0,\ f''(z) = 0,\ f'''(z) = 0,\ \cdots,\ f^{(m-1)}(z) = 0,$$

jedoch nicht der Gleichung $f^{(m)}(z) = 0$. Und umgekehrt ist jede gemeinsame Wurzel der Gleichungen

$$f(z) = 0,\ f'(z) = 0,\ f''(z) = 0,\ f'''(z) = 0,\ \cdots,\ f^{(m-1)}(z) = 0$$

eine m-fache Wurzel der ersten unter ihnen.

Aus diesem Satze folgt u. A., dass jede m-fache Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ eine $(m-1)$-fache Wurzel der Gleichung $f'(z) = 0$ ist, und dass deshalb $f'(z)$ die Form

$$(4).\ f'(z) = \left\{(z-\zeta_1)^{m_1-1}\cdot(z-\zeta_2)^{m_2-1}\cdots(z-\zeta_k)^{m_k-1}\right\}\cdot\psi(z)$$

hat, in welcher $\psi(z)$ eine ganze rationale algebraische Function bedeutet, welche für keine Wurzel der Gleichung $f(z)=0$ verschwindet.

Mithin ist das Product

$$(5)\qquad (z-\zeta_1)^{m_1-1}\cdot(z-\zeta_2)^{m_2-1}\cdots(z-\zeta_k)^{m_k-1}=G(z)$$

der grösste gemeinschaftliche Divisor der Functionen $f(z)$ und $f'(z)$. Man kann ihn nach der bekannten Methode ermitteln, dass man mit $f'(z)$ in $f(z)$ dividirt, bis eine ganze Function möglichst niedrigen Grades von z als Rest übrig bleibt, dann mit dem Reste die Division in den vorigen Divisor ausführt und in analoger Weise fortfährt, bis einmal die Division aufgeht. Derjenige Divisor, bei welchem die Division aufgeht, ist $G(z)$.

Beachtet man schliesslich, dass nach (2) und (5)

$$\frac{f(z)}{G(z)}=(z-\zeta_1)\cdot(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_k)$$

ist, so gelangt man zu dem

Lehrsatz II.

Dividirt man die Function

$$f(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_2z^2+a_1z^1+a_0$$

durch diejenige ganze rationale algebraische Function $G(z)$, welche ihr grösster gemeinschaftlicher Divisor mit

$$f'(z)=nz^{n-1}+(n-1)\cdot a_{n-1}z^{n-2}+(n-2)\cdot a_{n-2}z^{n-3}+\cdots$$
$$\cdots+2\cdot a_2z^1+1\cdot a_1$$

ist, so erhält man als Quotienten eine ganze rationale algebraische Function von der Beschaffenheit, dass sämmtliche Wurzeln der Gleichung

$$f(z)=0$$

einfache Wurzeln von

$$\frac{f(z)}{G(z)}=0$$

sind. — Man kann daher jede Gleichung mit mehrfachen Wurzeln auf eine solche mit denselben, aber einfachen Wurzeln zurückführen.

Als Beispiel mag die Function

$$f(z) = z^5 - 7z^4 + 19z^3 - 25z^2 + 16z - 4$$

dienen. Sie giebt

$$f'(z) = 5z^4 - 28z^3 + 57z^2 - 50z + 16.$$

Dividirt man hiermit in $25 \cdot f(z)$, so erhält man den Quotienten $(5z - 7)$ mit dem Reste $-6 \cdot (z^3 - 4z^2 + 5z - 2)$; und der eingeklammerte Factor des letzteren geht in $f'(z)$ genau $(5z - 8)$ mal. Mithin ist, da es hierbei auf constante Factoren nicht ankommt,

$$G(z) = z^3 - 4z^2 + 5z - 2$$

der grösste gemeinschaftliche Divisor von $f(z)$ und $f'(z)$; und die Gleichung

$$\frac{f(z)}{G(z)} = z^2 - 3z + 2 = 0$$

ist diejenige, welche jede Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ als einfache Wurzel hat. Sie ergiebt $\zeta_1 = +1$, $\zeta_2 = +2$, und daher

$$f(z) = (z-1)^{m_1} \cdot (z-2)^{m_2}$$

$$G(z) = (z-1)^{m_1 - 1} \cdot (z-2)^{m_2 - 1}.$$

Um die Exponenten zu finden, kann man — abgesehn von andern Methoden, welche in unserm besondern Falle sogar bequemer sein mögen — unter allen Umständen so verfahren, dass man $G(z)$ vermittelst des Taylorschen Satzes nach steigenden Potenzen von $(z - \zeta)$ entwickelt. Denkt man dabei zuerst an die Wurzel $\zeta_1 = +1$ und entwickelt

$$G(z) = G(1) + (z-1) \cdot \frac{G'(1)}{1!} + (z-1)^2 \cdot \frac{G''(1)}{2!} + \cdots,$$

so hat man:

$$G(z) = z^3 - 4z^2 + 5z - 2, \qquad G(1) = 0;$$

$$\frac{G'(z)}{1!} = 3z^2 - 8z + 5, \qquad \frac{G'(1)}{1!} = 0;$$

$$\frac{G''(z)}{2!} = 3z - 4, \qquad \frac{G''(1)}{1!} = -1;$$

$$\frac{G'''(z)}{3!} = +1, \qquad \frac{G'''(1)}{3!} = +1;$$

$$G(z) = -(z-1)^2 + (z-1)^3 = (z-1)^2 (z-2)^1;$$

also:

$$m_1 - 1 = 2, \quad m_2 - 1 = 1,$$

$$m_1 = 3, \qquad m_2 = 2,$$

$$f(z) = (z-1)^3 \cdot (z-2)^2.$$

§ 79.

Allgemeines über die Auflösung der Gleichungen von beliebig hohem Grade.

Wie man bei den Gleichungen bis zum vierten Grade einschliesslich zu verfahren hat, um die Wurzeln als Functionen der Coefficienten durch geschlossene Ausdrücke darzustellen, setzen wir als bekannt voraus; und ebenso, dass die Gleichungen höherer Grade eine ähnliche Lösung mittelst der in der Analysis gebräuchlichen Functionen im Allgemeinen nicht zulassen.

Eine Ausnahme, bei welcher es auf den Grad der Gleichung nicht ankommt, sondern nur auf deren Form, haben wir schon in § 62 behandelt, da dort in der Gleichung (10) festgestellt wurde, dass die Wurzeln der „**binomischen**“ Gleichung

$$z^n - A = 0,$$

wenn man

$$A = a e^{i\alpha}$$

setzt, sämmtlich durch die Formel

$$z = \sqrt[n]{a} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$= \sqrt[n]{a} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)$$

dargestellt werden, sobald man für k eine Reihe von n auf einander folgenden ganzen Zahlen substituirt.

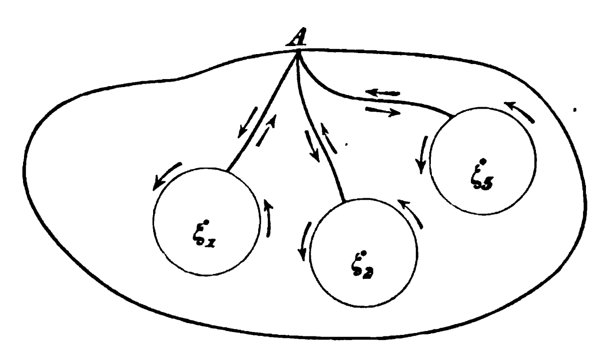
Auf ähnliche Auflösungen in besondern Fällen kommt es uns hier nicht an, sondern es ist unser Zweck, in aller Kürze anzuzeigen, wie sich aus den vorangegangenen Sätzen auf mannichfache Weise sichere Methoden gewinnen lassen, um die Wurzeln jeder algebraischen Gleichung einerseits durch analytisch geschlossene Ausdrücke, andrerseits als Grenzwerthe darzustellen.

Diese Methoden setzen theilweise voraus, dass man die Wurzeln vorher „von einander getrennt", sie einzeln „eingehegt", d. i. dass man sich ein ungefähres Bild von der Lage der Wurzeln in der z-Fläche erworben habe; und es ist einleuchtend, dass hierin schon an und für sich ein Gewinn liegt — auch abgesehn von der etwaigen Verwendung bei der Auflösung der Gleichungen.

Wir wollen deshalb einige Sätze über diesen Gegenstand vorausschicken.

Es sei T ein beliebig gewählter Theil der z-Fläche, in welchem die gegebene Function F(z) überall endlich bestimmt, eindeutig und monogen ist: mit Ausnahme einzelner Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$, in denen die Function F(z) hiervon abweicht.

Dann wird der Werth des längs der Begrenzung von T genommenen Randintegrals nach § 71 nicht geändert, wenn man die Gestalt des von A bis A herum führenden Integrationsweges in der Weise ändert, dass er die einzelnen Punkte — etwa in Kreisform — umschliesst und nach jedem dieser Kreise von A aus hin und auf demselben Wege wieder bis A zurückgeht.



Nun ist aber wegen der Eindeutigkeit der Function F(z) der Werth von $\int F(z)\,dz$ längs des von A bis zum Kreise hinführen-

den Weges demjenigen längs des Rückweges mit entgegengesetztem Vorzeichen gleich; denn die zu demselben z gehörenden Elemente der beiden Theilintegrale unterscheiden sich bloss durch das Vorzeichen von dz.

Mithin heben sich diese beiden Theilintegrale auf, und es bleiben nur die Integrale längs der einzelnen Kreise übrig.

Es gilt demnach der

Lehrsatz I.

Das Randintegral $\int^{\frown} F(z)dz$ um einen solchen Theil T der z-Fläche, in welchem die Function F(z) generell endlich bestimmt, eindeutig und monogen ist, ist gleich der Summe der Randintegrale um beliebig kleine Theile von T, in denen die singulären[1]) Punkte von F(z) einzeln liegen.

Nun sei $f(z)$ eine ganze rationale algebraische Function, welche in dem Theile T der z-Fläche die m einfachen Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_m$ besitzt, und es werde

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

angenommen. Dann ist F(z) eine innerhalb T generell endlich bestimmte, eindeutige und monogene Function mit alleiniger Ausnahme der Nullpunkte $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_m$ von $f(z)$, in welchen F(z) in der Weise unendlich wird, dass die Grenzwerthe

$$\lim_{z=\zeta_1} \cdot (z-\zeta_1)F(z),\quad \lim_{z=\zeta_2} . (z-\zeta_2)F(z),\ \ldots,\ \lim_{z=\zeta_m} . (z-\zeta_m)F(z)$$

sämmtlich $= +1$ sind. Entwickelt man nämlich nach Taylor:

$$f(z) = f(\zeta) + (z-\zeta)^1 \cdot \frac{f'(\zeta)}{1!} + (z-\zeta)^2 \cdot \frac{f''(\zeta)}{2!} + \cdots$$

so folgt, weil $f(\zeta) = 0$ sein und $f'(\zeta)$ nicht verschwinden soll:

---

[1]) d. i. die von der generell bestehenden Eigenschaft abweichenden Punkte.

$$(z-\zeta)\cdot F(z)$$

$$=f'(z):\left\{f'(\zeta)+(z-\zeta)^1\cdot\frac{f''(\zeta)}{2!}+(z-\zeta)^2\cdot\frac{f'''(\zeta)}{3!}+\cdots\right\},$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Setzt man aber $z-\zeta=ve^{i\varphi}$ und nimmt v zum Radius eines beliebig kleinen Kreises an, so ist auf diesem wegen des constanten Werthes von v:

$$dz=i(z-\zeta)\,d\varphi,$$

$$\int^{\smile}_{z}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=i\int_0^{2\pi}(z-\zeta)\,F(z)\,d\varphi$$

oder, wenn man den Radius v sich der Grenze 0 nähern lässt, nach dem Obigen:

$$\int^{\smile}_{z}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=i\cdot\int_0^{2\pi}1\cdot d\varphi=2\pi i.$$

Da dasselbe Resultat bei jedem der m Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_m$ gilt, so ergiebt sich der

Lehrsatz II.

Besitzt die algebraische Gleichung $f(z)=0$ in dem Gebiete T der z-Fläche nur einfache Wurzeln, so ist deren Anzahl

$$m=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int^{\smile}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

das Randintegral längs der Begrenzung von T in der Richtung der wachsenden Winkel genommen.

— Man kann daher stets bestimmen, wie viele Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem beliebig ausgewählten Theil der z-Fläche liegen.

Über die Hülfsmittel, welche man bis jetzt besitzt, um dieses Kriterium bei analytischen oder numerischen Rechnungen mit einiger Bequemlichkeit zur Einhegung der einzelnen Wurzeln zu

verwenden, wollen wir uns hier nicht verbreiten. Es genügt, einen Weg angedeutet zu haben, auf welchem man mittelst Differentiation und Integration zum Ziele gelangen kann.

Dass es aber auch ganz elementare Anhaltepunkte giebt, um die Wurzeln in begrenzte Theile der z-Fläche einzuschliessen, dafür mag noch die folgende Betrachtung als Beleg dienen.

Bezeichnet man in der Gleichung

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 = 0$$

oder

$$z^n = -a_0 - a_1 z^1 - a_2 z^2 - \cdots - a_{n-1} z^{n-1}$$

die Moduln der Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \dots$ durch $A_1, A_2, A_3, \dots$ und denjenigen der Wurzel z durch v, so ergiebt sich, dass

$$v^n \leqq A_0 + A_1 v + A_2 v^2 + \cdots + A_{n-1} v^{n-1}$$

ist, weil der Modul einer Summe nicht grösser als die Summe der Moduln der einzelnen Summanden sein kann.[1])

Versteht man nun unter A die grösste von den Zahlen A_1 $A_2, \dots, A_{n-1}$, so ist jedenfalls

$$v^n \leqq A \cdot (1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}).$$

Sobald also $v > 1$ ist, muss um so mehr

$$v^n < A \cdot n v^{n-1}, \quad v < nA$$

sein.

Substituirt man endlich in der vorgelegten Gleichung $\frac{1}{z_1}$ für z, so folgt:

$$z_1^n = -\frac{1}{a_0} - \frac{a_{n-1}}{a_0} \cdot z_1 - \frac{a_{n-2}}{a_0} \cdot z_1^2 - \cdots - \frac{a_1}{a_0} z_1^{n-1}$$

und dem Obigen analog:

---

[1]) Aus der Gleichung

$$a \cdot e^{i\alpha} = b \cdot e^{i\beta} + c \cdot e^{i\gamma}$$

fogt nämlich:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\beta - \gamma) = (b + c)^2 - 4bc\sin^2\frac{\beta - \gamma}{2},$$

$$a \leqq b + c.$$

$$\frac{1}{v^n} < \frac{A}{A_0} \cdot \left(1 + \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \cdots + \frac{1}{v^{n-1}}\right);$$

also wenn $v < 1$ ist:

$$\frac{1}{v} < \frac{nA}{A_0}, \quad v > \frac{A_0}{nA}.$$

Dies giebt den

Lehrsatz III.

Bezeichnet man in der Gleichung

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 = 0$$

den Modul von a_0 durch A_0 und den grössten Modul aller Coefficienten durch A, so liegen die Moduln sämmtlicher Wurzeln zwischen

$$nA \text{ und } \frac{A_0}{nA}.$$

Hierdurch ist eine ringförmige, von zwei concentrischen Kreisen um das Centrum $z = 0$ herum begrenzte Fläche bestimmt, in der alle Wurzeln der Gleichung liegen müssen.

Dass eine viel engere Begrenzung des Wurzelgebiets vermittelst subtilerer Kriterien möglich ist, versteht sich von selbst; und dies wird namentlich dann der Fall sein, wenn über die Coefficienten einschränkende Voraussetzungen gemacht sind.

Z. B. bedarf keines weitläufigen Beweises der

Lehrsatz IV.

Sind die Coefficienten der Gleichung

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 = 0$$

sämmtlich reell, so sind sämmtliche complexe Wurzeln derselben paarweise in der Art **„conjugirt"**, dass gleichzeitig mit der Wurzel

$$z = x + iy$$

auch die Wurzel

$$z = x - iy$$

existirt.

Denn jede Gleichung, in welcher i vorkommt, besteht auch nach der Veränderung des Vorzeichens von i zu Recht (§ 60).

§ 80.

Darstellung der Wurzeln der algebraischen Gleichungen durch Integrale.

Ist $f(z)=0$ eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades, welche nur einfache Wurzeln besitzt — und auf eine solche lässt sich nach § 78 jede algebraische Gleichung zurückführen — so kann man, wie im vorigen § angezeigt ist, jede einzelne dieser Wurzeln in ein Gebiet der z-Fläche einhegen, ohne dass man die Wurzel selbst kennt.

Es sei T ein Gebiet der z-Fläche, in welchem nur die Wurzel $z=\zeta$ liegt. Bildet man nun das Randintegral

$$(1) \qquad \int^{\zeta} \frac{dz}{f(z)} = \frac{2\pi i}{C}$$

um T herum in der Richtung der wachsenden Winkel — was eine zur Bestimmung von C völlig definirte Operation ist und C als alleinige Function der Coefficienten von

$$f(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_1z^1+a_0$$

ergiebt — so lässt sich über C zweierlei aussagen:

Erstens ist

$$C=\varphi(\zeta),$$

wenn man aus der Function $f(z)$ den Factor $(z-\zeta)$ aussondert und

$$f(z)=(z-\zeta)\,\varphi(z)$$

setzt. Denn zieht man in dem Integral (1) den Integrationsweg in einen Kreis mit beliebig kleinem Radius v zusammen — was nach § 71 geschehn darf — setzt also bei constantem v

$$z-\zeta=ve^{i\varphi}, \quad dz=(z-\zeta)\cdot i\,d\varphi,$$

so hat man

$$\frac{2\pi i}{C}=\int^{\zeta}\frac{dz}{f(z)}=i\cdot\int_0^{2\pi}\frac{(z-\zeta)\,d\varphi}{f(z)}=i\cdot\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\varphi(z)}=i\cdot\lim_{v=0}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\varphi(z)}=\frac{i\cdot 2\pi}{\varphi(\zeta)},$$

$$C=\varphi(\zeta).$$

Zweitens folgt aus

$$f(z) = (z - \zeta)\,\varphi(z)$$

durch Differentiation:

$$f'(z) = \varphi(z) + (z - \zeta)\cdot\varphi'(z),$$

mithin wegen der Endlichkeit von $\varphi'(z)$ an der Stelle $z = \zeta$:

$$f'(\zeta) = \varphi(\zeta) = C.$$

Daher ist $z = \zeta$ auch eine Wurzel der Gleichung

$$f'(z) - C = 0;$$

oder m. a. W.: es ist $(z - \zeta)$ auch ein Theiler von $[f'(z) - C]$. Dies giebt den

Lehrsatz.

Ist eine einfache Wurzel $z = \zeta$ der Gleichung

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 = 0$$

in einem Theil T der z-Fläche eingehegt, so bestimme man um T herum in der Richtung der wachsenden Winkel das Integral

$$\int \frac{dz}{f(z)} = \frac{2\pi i}{C}$$

und endlich den gemeinsamen Theiler $G(z)$ der Functionen $f(z)$ und $[f'(z) - C]$. Dieser ist $= (z - \zeta)$ oder wenigstens gleich dem Product aus $(z - \zeta)$ und ähnlich gebildeten Factoren, welche nur für Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ verschwinden.

Damit ist die Auflösung der algebraischen Gleichung

$$f(z) = 0$$

— d. i. die Darstellung ihrer Wurzeln ζ als Functionen der Coefficienten $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ — entweder zu Stande gebracht oder wenigstens auf die Auflösung von Gleichungen niedrigeren Grades

$$G(z) = 0 \text{ oder } f'(z) - C = 0$$

zurückgeführt, welche dieselbe Behandlungsweise zulassen, so dass

man durch eine endliche Anzahl von Operationen zum Ziele gelangen muss.[1])

Diese Auflösungsmethode verlangt die Auswerthung eines Integrals, welches sich im Allgemeinen nicht durch bekannte Functionen oder bei numerischer Rechnung nur approximativ durch bestimmte Zahlen darstellen lässt. Indessen gereicht dies der Methode nicht zum Vorwurf, da es sich schon mit den Wurzeln der Gleichungen niedrigster Grade nicht anders verhält. Denn wenn man beispielsweise sagt, die Wurzeln der quadratischen Gleichung $z^2 - 4z + 2 = 0$ seien $z = 2 \pm \sqrt{2}$, so ist $\sqrt{2}$ ebenfalls nichts als ein Zeichen für eine Operation, welche numerisch nur approximativ ausgeführt werden kann.

Jedoch sind die Methoden der approximativen Integration nicht so ausgebildet, wie diejenigen der gemeinen Rechnungsarten; und deshalb gelangt man vermittelst mancher Näherungsmethoden, welche sich nur auf die letzteren stützen, schneller bis zu einem vorherbestimmten Grade der Genauigkeit.

§ 81.

Die Wurzel als Grenzwerth bei recurrirender Substitution.

Wir beschränken uns hier nicht auf algebraische Gleichungen, weil die Methode keine Eigenschaft anspricht, welche bloss diesen zukäme, und verzichten der Kürze wegen auf die anderwärts dargestellte allgemeinere Fassung.

Eine aufzulösende Gleichung sei irgendwie auf die Form

(1) $$z = f(z)$$

gebracht; z sei eine Wurzel der Gleichung, z_n ein Näherungswerth und

(2) $$z_{n+1} = f(z_n)$$

ein zweiter.

Aus (2) folgt:

---

[1]) Cauchy giebt die für die Rechnung weniger bequeme Formel $2\pi i \cdot \zeta = \int \frac{z f'(z)}{f(z)} dz$ an.

$$\frac{d\,z_{n+1}}{d\,z_n} = f'(z_n),$$

(3) $$z_{n+1} - z = \int_z^{z_n} f'(u) \cdot d\,u = (z_n - z) \cdot s_n,$$

wo Modul und Argument von s_n Mittelwerthe zwischen den Moduln und den Argumenten sind, welche $f'(u)$ auf dem Integrationswege von z bis z_n annimmt.

Ist $f'(u)$ auf dem graden Wege von $u = z$ bis $u = z_n$ überall mit einem die Eins nicht erreichenden Modul behaftet, so ist daher auch $\bmod \cdot s_n < 1$, und es liegt z_{n+1} nach (3) näher an z, als z_n. Dagegen findet das Umgekehrte statt, falls auf jenem Wege $\bmod \cdot f'(u) > 1$ ist.

Multiplicirt man alle Gleichungen mit einander, welche aus (3), d. i. aus

$$\frac{z_{n+1} - z}{z_n - z} = s_n$$

durch die Substitution von 1, 2, 3, ..., n für n hervorgehn, so ergiebt sich:

(4) $$z_{n+1} - z = (z_1 - z) \cdot \prod_{m=1}^{m=n} s_m.$$

Hieraus folgt der

Lehrsatz I.

Hat man eine aufzulösende Gleichung auf solche Art in die Form

(1) $$z = f(z)$$

gebracht, dass der Modul der Function $f'(u)$ im Felde eines Kreises vom Radius $\bmod \cdot (z_1 - z)$ um z herum überall < 1 ist, so giebt die recurrirende Substitution

(2) $$z_{n+1} = f(z_n)$$

stets die Wurzel z als

(5) $$z = \lim_{n=\infty} \cdot z_{n+1}.$$

Zusatz I.

Ist die Wurzel z **reell**, so braucht man das Verhalten von $f'(u)$ für complexe Werthe des u nicht zu berücksichtigen, falls man für z_1 eine reelle Zahl setzt, und ist $f'(u)$ ausserdem von $u = z_1$ bis $u + z$ positiv, so kommt es nur darauf an, dass $f'(u)$ auf diesem reellen Wege < 1 ist.

Zusatz II.

Nimmt man anstatt der Recursionsformel (2) die folgende:

$$z_{n+1} = \frac{f(z_n) - z_n \cdot f'(z_n)}{1 - f'(z_n)}, \tag{6}$$

so kommt es nur darauf an, dass der Ausdruck

$$F'(u) = \frac{f'(u) - f'(z_n)}{1 - f'(z_n)} \tag{7}$$

den oben für $f'(u)$ aufgestellten Bedingungen genügt.
— Denn setzt man

$$F(u) = \frac{f(u) - u f'(z_n)}{1 - f'(z_n)}, \tag{8}$$

so gilt die Gleichung

$$z = F(z)$$

gleichzeitig mit der aufzulösenden Gleichung

$$z = f(z).$$

Beispiele.

I. In der Astronomie spielt die Gleichung

$$z = \mu + \varepsilon \sin z, \quad (\varepsilon < 1)$$

zwischen der wahren und der excentrischen Anomalie und der Excentricität eine Rolle. Gauss beweist in seiner „Theoria motus“ auf anderm Wege, dass man die Unbekannte z stets durch die Recursionsformel

$$z_{n+1} = \mu + \varepsilon \sin z_n$$

als Grenzwerth finden kann.

Bedeutend schneller wirkt nach dem Obigen die Recursionsformel (6), welche in diesem Falle lautet:

$$z_{n+1} = \frac{\mu + \varepsilon (\sin z_n - z_n \cos z_n)}{1 - \varepsilon \cos z_n};$$

denn der Ausdruck (7) geht über in:

$$\frac{\varepsilon (\cos u - \cos z_n)}{1 - \varepsilon \cos z_n} = \frac{2 \varepsilon \sin \frac{z_n - u}{2} \sin \frac{z_n + u}{2}}{1 - \varepsilon \cos z_n},$$

welcher bei dem geringen Werthe von ε schnell sehr klein wird.

II. Soll die zwischen 1 und 2 liegende Wurzel der Gleichung

$$z^7 + 28 z^4 = 480$$

numerisch berechnet werden (das Gausssche Beispiel in der Abhandlung über die trinomischen Gleichungen vom Jahre 1849), so schreibe man dieselbe in der Form

$$z = \sqrt[4]{\frac{480}{28 + z^3}} = f(z)$$

und rechne mit dem Ausgangswerthe $z_1 = 2$ nach der Formel (6), welche hier die Form

$$z_{n+1} = \frac{1 + \frac{3 z_n^2}{4 (28 + z_n^3)} \cdot z_n}{1 + \frac{3 z_n^2}{4 (28 + z_n^3)} \cdot f(z_n)} \cdot f z_n$$

annimmt. Es ergiebt sich:

$$z_2 = 1{,}9231\,; \quad z_3 = 1{,}9228841\,.$$

Der letzte Werth z_3 ist bereits in allen 8 Ziffern richtig, wie man aus dem Vergleich mit dem Gaussschen Resultat ersehn kann.

Um aber selbständig über den Fehler des Näherungswerthes zu urtheilen, wenden wir uns an die Gleichung (3):

$$z_{n+1} - z = (z_n - z) \cdot s_n .$$

Aus ihr folgt:

(9) $$z_{n+1} - z = -(z_{n+1} - z_n) \cdot \frac{s_n}{1 - s_n} .$$

Kommt es nur auf die Beurtheilung des Maximalwerthes an, welchen der Fehler $(z_{n+1} - z)$ annehmen kann, so ergiebt sich aus (9) sofort:

Lehrsatz II.

Der Modul des Fehlers $(z_{n+1} - z)$ ist kleiner als

$$\text{mod} \cdot (z_{n+1} - z_n) \cdot \frac{p}{1-p}$$

falls man unter p den grössten Modul versteht, welchen bei der Recursionsformel (2) der Werth von $f'(u)$, bei der Recursionsformel (6) aber der Werth von $\frac{f'(u) - f'(z_n)}{1 - f'(z_n)}$ auf dem gradlinigen Werthe zwischen $u = z_n$ und $u = z$ annehmen kann.

In Bezug auf unser numerisches Beispiel II bedeutet dies, dass der Fehler von $z_3 < 0,000\,000\,005$ ausgefallen sein würde, wenn man bei ihm z_3 auf 9 Decimalstellen berechnet hätte; denn es ergiebt die numerische Substitution, dass zwischen z_2 und z_3

$$p < \text{abs} \cdot \frac{f'(z_3) - f'(z_2)}{1 - f'(z_2)} = 0,000\,020\,6 \cdots$$

ist, während $z_2 - z_3 = 0,000\,24 \cdots$ hervorgeht.

§ 82.

Bestimmung der Wurzeln durch den Convergenzkreis der Taylorschen Reihe.

Die Function

(1) $$f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 ,$$

bei welcher a_0 als von Null verschieden vorausgesetzt wird, gestattet die Entwickelung ihres reciproken Werthes nach steigenden

ganzen Potenzen von z im Felde eines um z herum liegenden Kreises (§ 72), so lange mod · z den Modul der kleinsten Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ nicht erreicht.

Es ist:

$$(2) \qquad \frac{1}{f(z)} = b_0 + b_1 z^1 + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots,$$

wo die Coefficienten b successive aus der Relation

$$1 = \left(a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n\right) \cdot \left(b_0 + b_1 z^1 + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots\right)$$

bestimmt werden können. Dies giebt, weil die Coefficienten von z für sich verschwinden müssen:

$$(3) \qquad \begin{cases} 1 = a_0 \cdot b_0, \\ 0 = a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1, \\ 0 = a_2 \cdot b_0 + a_1 \cdot b_1 + a_0 \cdot b_2, \\ 0 = a_3 \cdot b_0 + a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + a_0 \cdot b_3, \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ 0 = a_r \cdot b_0 + a_{r-1} \cdot b_1 + a_{r-2} \cdot b_2 + \cdots + a_0 \cdot b_r \cdot \end{cases}$$

Die letzte Gleichung in (3) gilt für jedes $r > 0$, falls $a_n = 1$ und $a_{n+k} = 0$ genommen wird.

Eliminirt man aus den für die b aufgestellten Gleichungen alle b bis auf b_r, so erhält man nach den Elementen der Determinantentheorie: [1])

[1]) Für unsern Zweck genügt das Folgende aus dieser Theorie. Man bezeichnet die Differenz zweier Producte:

$$u_{1,1} \cdot u_{2,2} - u_{1,2} \cdot u_{2,1} = \begin{vmatrix} u_{1,1}, & u_{2,1} \\ u_{1,2}, & u_{2,2} \end{vmatrix}$$

oder unter Weglassung der Kommata:

$$(\alpha). \qquad u_{11} \cdot u_{22} - u_{12} \cdot u_{21} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix}.$$

Ferner wird die Bezeichnung nach Massgabe der Recursionsformel

$$(4)\qquad (-1)^r a_0^{r+1}.b_r = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \cdot & \cdot & a_1 \end{vmatrix}.$$

Daher lassen sich die Coefficienten b_r der Entwickelung (2) von $\frac{1}{f(z)}$ ohne sonderliche Schwierigkeit aus den Coefficienten der Gleichung $f(z) = 0$ berechnen.

$$(\beta).\qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \cdots u_{r1} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \cdots u_{r2} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \cdots u_{r3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ u_{1r} & u_{2r} & u_{3r} \cdots u_{rr} \end{vmatrix}$$

$$= u_{11} \cdot \begin{vmatrix} u_{22} & u_{32} \cdots u_{r2} \\ u_{23} & u_{33} \cdots u_{r3} \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ u_{2r} & u_{3r} \cdots u_{rr} \end{vmatrix} - u_{12} \cdot \begin{vmatrix} u_{21} & u_{31} \cdots u_{r1} \\ u_{23} & u_{32} \cdots u_{r2} \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ u_{2r} & u_{3r} \cdots u_{rr} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ (-1)^{r-1} \cdot u_{1r} \cdot \begin{vmatrix} u_{21} & u_{31} & \cdots u_{r1} \\ u_{22} & u_{32} & \cdots u_{r2} \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ u_{2(r-1)} & u_{3(r-1)} & \cdots u_{r(r-1)} \end{vmatrix}$$

verallgemeinert. Sie giebt als das **Bildungsgesetz** der Determinanten höherer Ordnung an, **dass man die „Elemente"** $u_{11}, u_{12}, u_{13}, \ldots, u_{1r}$ **der ersten Columne der Reihe nach je mit derjenigen Determinante multiplicirt, welche nach Wegstreichung der Zeile des Elements und der ersten Columne übrig bleibt, und schliesslich die Producte mit abwechselnden Vorzeichen summirt.**

Da mithin jede Determinante durch die Relation (β) auf Determinanten der zunächst niedrigeren Ordnung zurückgeführt ist, so liegt es nahe, diejenigen Eigenschaften der Determinanten, welche von den Analysten allmählich aufgefunden sind, durch den Schluss von r auf (r + 1) zu prüfen.

Die folgenden Sätze sind nach (α) richtig für die Determinanten **zweiter** Ordnung. Die Relation (β) zeigt, dass sie Gültigkeit behalten, wenn man diejenige Ordnung, für welche sie gelten, um 1 erhöht. Mithin gelten sie allgemein.

Ist die letztere von Hause aus so beschaffen, oder hat man sie aus einer Gleichung $F(z_1) = 0$ vermittelst einer geeigneten

---

I. Man darf in jeder Determinante die Zeilen ihrer Nummer nach mit den Columnen vertauschen. — Dabei bleibt die von links oben nach rechts unten herabgehende Diagonale ungeändert. Man nennt sie die „Hauptdiagonale".

II. Vertauscht man eine Columne oder Zeile mit einer benachbarten, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen.

III. Sind zwei Columnen oder zwei Zeilen gleich, so ist die Determinante $= 0$.

IV. Soll eine Determinante mit einer Zahl multiplicirt oder dividirt werden, so darf man anstatt dessen eine beliebige Columne oder Zeile mit der Zahl multipliciren, beziehungsweise dividiren.

V. Jede Determinante behält ihren Werth, wenn man eine mit irgend welcher Zahl multiplicirte Zeile oder Columne zu einer andern addirt.

Ferner ergiebt sich aus der Formel (β) und den letzten Sätzen sofort:

VI. Jede Determinante, in welcher eine Columne oder Zeile aus Nullen besteht, ist $= 0$.

VII. Jede Determinante, in welcher auf einer Seite der Hauptdiagonale lauter Nullen stehn, ist gleich dem Product der Elemente dieser Diagonale.

Die Determinanten sind u. A. sehr wichtig für die Auflösung der Gleichungen ersten Grades. Sollen beispielsweise die simultanen Gleichungen

$$(\gamma). \qquad \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz = d, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta, \\ \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z = \mathfrak{d} \end{array} \right.$$

aufgelöst werden, so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} ax, & b, & c \\ \alpha x, & \beta, & \gamma \\ \mathfrak{a}x, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax + by + cz, & b, & c \\ \alpha x + \beta y + \gamma z, & \beta, & \gamma \\ \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d, & b, & c \\ \delta, & \beta, & \gamma \\ \mathfrak{d}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \end{vmatrix} \cdot y = \begin{vmatrix} a, & by, & c \\ \alpha, & \beta y, & \gamma \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}y, & \mathfrak{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & ax + by + cz, & c \\ \alpha, & \alpha x + \beta y + \gamma z, & \gamma \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z, & \mathfrak{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & d, & c \\ \alpha, & \delta, & \gamma \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{d}, & \mathfrak{c} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a, & b, & cz \\ \alpha, & \beta, & \gamma z \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & ax + by + cz \\ \alpha, & \beta, & \alpha x + \beta y + \gamma z \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & d \\ \alpha, & \beta, & \delta \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{d} \end{vmatrix}.$$

Diese drei Gleichungen ergeben die Unbekannten x, y, z als Brüche, welche denselben Nenner

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \end{vmatrix}$$

Substitution $z_1 = (z + \alpha)$ — welche immer möglich ist — sich so hergerichtet, dass derjenige Kreis, welcher um $z = 0$ herum durch den nächsten Nullpunkt $z = \zeta$ von $f(z)$ gezogen ist, keinen zweiten Nullpunkt trifft oder in seinem Felde besitzt, so kann man nach § 77

$$(5) \qquad f(z) = (z - \zeta)^m \cdot \varphi(z)$$

setzen, wo $\varphi(z)$ eine ganze rationale Function von z bedeutet, welche in diesem Kreise und Kreisfelde endlich bestimmt, eindeutig, monogen und von Null verschieden ist.

---

haben, während die Zähler Determinanten sind, welche aus der letzteren hervorgehn, wenn man in ihr aus den aufzulösenden Gleichungen (γ) die rechten Seiten für die Coefficienten der gesuchten Unbekannten x oder y oder z substituirt.

Die Auflösbarkeit der Gleichungen (γ) hängt daher davon ab, ob die zuletzt geschriebene Determinante von Null verschieden ist, oder nicht.

In der Sprache der analytischen Geometrie sind die Gleichungen (γ) die Gleichungen dreier Ebenen, die gemeinsamen Wurzeln die Coordinaten des Schnittpunktes ihrer Kanten. Ist unsere letzte Determinante $= 0$, so sind die drei Kanten parallel oder identisch.

In der obigen Gleichung (4), welche die Unbekannte b_r durch die Coefficienten a der Gleichung (1) ausdrückt, reducirte sich die Determinante, mit welcher b_r zu multipliciren ist, auf die aus blossen a_0 bestehende Hauptdiagonale nach Satz VII. Wo in (4) auf der rechten Seite Elemente fehlen, sind die Lücken durch Nullen auszufüllen.

— Zum näheren Studium der Theorie der Determinanten sind die Lehrbücher über diesen Gegenstand von Brioschi, von Baltzer und von Mansion zu empfehlen. Wir können hier auf die ausserordentlich fruchtbaren Eigenschaften der Determinanten nicht näher eingehn. Wegen der späteren Verwendung notiren wir aber noch die Gleichung:

$$(\delta). \qquad \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\,x + b\,y + c\,z, & a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1, & a\,x_2 + b\,y_2 + c\,z_2 \\ a_1x + b_1y + c_1z, & a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1, & a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z, & a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1, & a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 \end{vmatrix}.$$

Sie ist bloss ein besonderer Fall eines viel allgemeineren Satzes. Um sich von ihrer Geltung zu überzeugen, kann man entweder den Weg einschlagen, dass man beide Seiten nach ihrer Auflösung in eine Summe von Producten mit einander vergleicht — was hier am meisten auf der Hand liegt — oder die rechte Seite in mehrere Determinanten so zerfällt, dass die eine von den Determinanten der linken Seite als gemeinschaftlicher Factor verbleibt.

Folglich lässt sich die reciproke Function

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \psi(z)$$

noch über dieses Kreisfeld hinaus nach aufsteigenden Potenzen von z entwickeln und ist im Felde ihrer Entwickelbarkeit nebst ihren sämmtlichen Derivirten endlich und bestimmt.

Differentiirt man aber die aus (5) folgende Gleichung

$$\frac{1}{f(z)} = (z-\zeta)^{-m} \cdot \psi(z)$$

unter Anwendung des Leibnitzschen Satzes (§ 31) r mal nach z, setzt hinterher $z = 0$ und berücksichtigt, dass nach (2)

$$\frac{1}{r!} \cdot \left\{ \frac{d^r \cdot [f(z)]^{-1}}{dz^r} \right\}_{z=0} = b_r$$

ist, so folgt:

$$b_r = \binom{-m}{r} (-\zeta)^{-m-r} \cdot \psi(0) + \binom{-m}{r-1} (-\zeta)^{-m-r+1} \cdot \frac{\psi'(0)}{1!} + \cdots$$
$$\cdots + \binom{-m}{0} (-\zeta)^{m} \cdot \frac{\psi^{(r)}(0)}{r!},$$

(6)
$$\frac{(-\zeta)^{m+r}}{\binom{-m}{r}} \cdot b_r$$
$$= \psi(0) + \frac{r}{m+r-1} \cdot \zeta^1 \frac{\psi'(0)}{1!} + \frac{r}{m+r-1} \cdot \frac{r-1}{m+r-2} \cdot \zeta^2 \frac{\psi''(0)}{2!} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{r}{m+r-1} \cdot \frac{r-1}{m+r-2} \cdots \frac{1}{m} \cdot \zeta^r \frac{\psi^{(r)}(0)}{r!}.$$

Wächst r unendlich, so nähert sich die rechte Seite der letzten Gleichung dem Grenzwerthe $\psi(\zeta)$. Denn nach den obigen Ermittelungen über $\psi(z)$ ist die Entwickelung

$$\psi(z) = \psi(0) + z \cdot \frac{\psi'(0)}{1!} + z^2 \frac{\psi''(0)}{2!} + z^3 \cdot \frac{\psi'''(0)}{3!} + \cdots$$

für $z = \zeta$ noch unbedingt convergent, und die Glieder dieser Reihe sind die Grenzwerthe der Glieder in (6), denen jene sich mit wachsendem Modul nähern.

Folglich kann man die Gleichung (6) auch so schreiben:

$$(7)\qquad \frac{(-\zeta)^{m+r}}{\binom{-m}{r}} \cdot b_r = \psi(\zeta) - \varepsilon_r ,$$

wo ε_r eine Grösse bedeutet, welche bei unendlich wachsendem r dem Grenzwerthe Null zustrebt, und durch die convergente Reihe

$$\varepsilon_r = \frac{m-1}{r+m-1} \cdot \zeta^1 \frac{\psi'(0)}{1!} + \left[1 - \frac{r}{r+m-1} \cdot \frac{r-1}{r+m-2}\right] \cdot \zeta^2 \frac{\psi''(0)}{2!}$$
$$+ \left[1 - \frac{r}{r+m-1} \cdot \frac{r-1}{r+m-2} \cdot \frac{r-2}{r+m-3}\right] \cdot \zeta^3 \frac{\psi'''(0)}{3!} + \cdots$$

dargestellt ist.

Erhöht man in (7) den Index r um 1, so ergiebt sich durch Division in (7):

$$\frac{\binom{-m}{r+1}}{(-\zeta)\binom{-m}{r}} \cdot \frac{b_r}{b_{r+1}} = \frac{\psi(\zeta) - \varepsilon_r}{\psi(\zeta) - \varepsilon_{r+1}},$$

$$(8)\qquad \zeta = \frac{r+m}{r+1} \cdot \frac{b_r}{b_{r+1}} \cdot \left\{1 + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_{r+1}}{\psi(\zeta) - \varepsilon_r}\right\}.$$

Daher gilt, weil $\psi(\zeta)$ von Null verschieden ist, der

Lehrsatz.

Die dem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel $z = \zeta$ der algebraischen Gleichung

$$f(z) = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

lässt sich aus der Formel

(9) $$\zeta = \lim_{r=\infty} \cdot \frac{b_r}{b_{r+1}} = -a_0 \cdot \lim_{r=\infty} \cdot \frac{\Delta_r}{\Delta_{r+1}}$$

berechnen, wo b_r durch die Formel (4) bestimmt ist, und

(10) $$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & & & & \cdot \\ a_2 & a_1 & a_0 & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \cdot & \cdot & a_1 \end{vmatrix}$$

bedeutet. — Besitzt die Gleichung $f(z) = 0$ mehr als eine Wurzel mit demselben kleinsten Modul, so ist die Relation (9) nicht erwiesen.

Die genauere Untersuchung zeigt in der That, dass die Gleichung (9) nur dann gilt, wenn die übrigen Wurzeln, welche etwa denselben kleinsten Modul wie ζ haben, mit geringerer Ordnung, d. i. in geringerem Grade der Vielfachheit auftreten.

Sind zwei kleinste Wurzeln ζ von höchster Ordnung, z. B. zwei conjugirte Wurzeln einer reellen Gleichung, vorhanden, so ergeben sich diese aus den b_r vermittelst einer quadratischen Gleichung

$$\left(b_{r+2}^2 - b_{r+3}\, b_{r+1}\right) \cdot \zeta^2 - \left(b_{r+2}\, b_{r+1} - b_{r+3}\, b_r\right) \cdot \zeta + \left(b_{r+1}^2 - b_{r+2}\, b_r\right) = 0$$

desto genauer, je grösser r wird.

Sind m kleinste Wurzeln von gleicher und höchster Ordnung vorhanden, so existirt für sie eine Gleichung m^{ten} Grades zwischen den b_r. (Vergl. zur Feststellung der Einzelheiten die Abhandlung vom Jahre 1870.)

Man kann aber, wie schon weiter oben ausgeführt ist, es stets durch eine lineare Substitution für die Unbekannte z dahin bringen, dass die aufzulösende Gleichung $f(z) = 0$ nur eine Wurzel mit kleinstem Modul besitzt, und jede beliebige Wurzel zur kleinsten machen.

Auch ist diese Methode nicht auf algebraische Gleichungen beschränkt.

Als Beispiel mag die Gleichung

$$f(z) = 1 - z - z^3 = 0$$

dienen, welche augenscheinlich eine reelle positive Wurzel zwischen 0 und 1 besitzt, während die beiden andern complex conjugirt sind und — weil das Product der drei Wurzeln $= +1$ ist — einen die 1 überschreitenden Modul haben.

Bei ihr ist:

$$a_0 = +1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -1,\ a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = \cdots = 0.$$

Die Recursionsformel (3) gestaltet sich daher so:

$$b_r = b_{r-1} + b_{r-3};$$

und es ergiebt sich nach dieser:

$$b_0 = 1,\ b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2,\ b_4 = 3,\ b_5 = 4,\ b_6 = 6,\ b_7 = 9,$$
$$b_8 = 13,\ b_9 = 19,\ b_{10} = 28,\ b_{11} = 41,\ b_{12} = 60,\ b_{13} = 88,$$
$$b_{14} = 129,\ b_{15} = 189,\ b_{16} = 277,\ b_{17} = 406,\ b_{18} = 595,\ b_{19} = 872,$$
$$b_{20} = 1278,\ b_{21} = 1873,\ \ldots$$

Näherungswerthe

$$w_r = \frac{b_{r-1}}{b_r}$$

der kleinsten Wurzel unserer Gleichung sind daher:

$$w_{11} = \frac{28}{41},\ w_{12} = \frac{41}{60},\ w_{13} = \frac{15}{22},\ w_{14} = \frac{88}{129},\ w_{15} = \frac{43}{63},$$
$$w_{16} = \frac{189}{277},\ w_{17} = \frac{277}{406},\ w_{18} = \frac{58}{85},\ w_{19} = \frac{595}{872},\ w_{20} = \frac{436}{639},$$
$$w_{21} = \frac{1278}{1873},\ \ldots$$

Die Annäherung an die gesuchte Wurzel geht hier — abgesehn von der mühelosen Berechnung der b_r — nicht besonders schnell von statten, weil die beiden andern Wurzeln für diesen Zweck ungünstig liegen. Man kann sich die Rechnung aber noch bedeutend erleichtern auf dem Wege der näheren Untersuchung der Ausdrücke (3) oder (10). Das würde hier jedoch zu weit führen. Es mögen daher nur ein paar Formeln

$$b_{r+3}=3b_r+b_{r-5},\ b_{r+6}=9b_r+6b_{r-5}+b_{r-10},\ b_{r+2}=2b_r+b_{r-7}$$

Platz finden, welche sich leicht aus $b_r=b_{r-1}+b_{r-3}$ ableiten und für die allgemeine Gleichung dritten Grades erweitern lassen. Aus der letzten von ihnen folgt u. A., ohne dass ein b berechnet zu sein braucht:

$$\frac{1}{w_{r+2}}=2\cdot w_{r+1}+\frac{b_{r-1}}{b_{r+1}}>2w_{r+1},\ w_{r+1}\cdot w_{r+2}<\frac{1}{2},\ \zeta<\frac{1}{2}\sqrt{2}=0{,}707\cdots$$

Wir schliessen hiermit unsere Betrachtungen über die Gleichungen. Es kam uns weniger darauf an, mit Auflösungsmethoden bekannt zu machen, welche bei der numerischen Rechnung eine möglichst schnelle Annäherung geben — denn das würde in den Rahmen dieses Buches weder dem Zwecke noch dem Raume nach hineinpassen — sondern diejenigen wichtigsten Eigenschaften der Gleichungen zu lehren, welche man zu Zwecken der Differential- und Integralrechnung kennen muss, und dabei diejenigen allgemeinen Auflösungsmethoden anzuzeigen, welche die Wurzeln vermittelst bestimmter Formeln ergeben, also Proben- und Zwischenerwägungen während der Rechnung unnöthig machen.

In letztgedachter Hinsicht dürfte das Obige mit ziemlicher Vollständigkeit den Umfang der bisher auf diesem Gebiet gewonnenen allgemeinen Resultate übersehn lassen. Andere Näherungsmethoden, welche mehr oder weniger häufig wiederholte Zwischenproben erheischen, sind in ausserordentlich grosser Anzahl bekannt und durch die besten Namen vertreten: Newton, Fourier, Sturm, Gauss u. s. w.; sie befriedigen zum Theil über Erwarten die zu stellenden Ansprüche und gehören zu den glänzendsten Bethätigungen des Scharfsinnes auf mathematischem Gebiet, weshalb ihr Studium wohl zu empfehlen ist.

Capitel XIII.

Grenzwerthe der Functionen an den Stellen willkürlicher und sinnloser Substitutionswerthe. Zerfällung in Partialbrüche und Integration der rationalen Functionen.

§ 83.

Grenzwerthe der Functionen an den Stellen willkürlicher und unbestimmter Substitutionswerthe.

Von denjenigen Zeichen, welche unter die Kategorie der Zahlen aufgenommen sind, fügt sich einzig und allein die Null nicht allen formalen Rechengesetzen, sondern sie erfordert in manchen Fällen eine gesonderte Betrachtung. (Vgl. § 60.)

Daher kommt es vor, dass bei der Substitution irgend eines bestimmten Werthes $z = \zeta$ Bestandtheile der Function $f(z)$ verschwinden, welche nach der Natur der mit ihnen vorzunehmenden Rechenoperation nicht $= 0$ sein dürfen, wenn das Ergebniss von jeder Willkür frei sein oder andernfalls auch nur einen angebbaren Sinn haben soll.

Man kann die Frage aufwerfen, ob die Function $f(z)$ sich bei der Annäherung von z an ζ überhaupt einem Grenzwerthe nähert, und welcher dies sei, d. h. die Frage nach der Existenz und dem Werthe von $\lim\limits_{z=\zeta} \cdot f(z)$. — Wir haben schon in § 1 einige Beispiele hierfür beigebracht, nämlich

$$f(z) = \frac{z-\zeta}{z-\zeta} \text{ und } \varphi(z) = \frac{1}{a + b^{(z-\zeta)^{-1}}}.$$

Von denen macht das erste $f(z)$ für $z = \zeta$ zu einer völlig willkürlichen Zahl, während $f(z)$ jür jedes von ζ verschiedene z den Werth $+1$ besitzt und auch $\lim\limits_{z=\zeta} \cdot f(z) = +1$ ergiebt. Im zweiten hat $\varphi(z)$ für $z = \zeta$ überhaupt keinen Sinn und bei der Annäherung von z an ζ je nach der Art der Annäherung verschiedene

Grenzwerthe oder auch keinen Grenzwerth; denn bezeichnet man $z - \zeta = v e^{i\varphi}$, so folgt schon bei einem positiven b und verschiedenen constanten Werthen von φ aus

$$\varphi(\zeta + v e^{i\varphi}) = \left\{ a + e^{\frac{lb \cdot \cos\varphi}{v}} \left(\cos \frac{lb \cdot \sin\varphi}{v} - i \cdot \sin \frac{lb \cdot \sin\varphi}{v} \right) \right\}^{-1}$$

die ganze Fülle der angedeuteten Mannichfaltigkeiten.

Die Hauptformen, welche wir zu betrachten haben, sind folgende:

I.

Verschwinden Zähler und Nenner des Quotienten

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

für denselben Werth $z = \zeta$, so ist:

$$f(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(\zeta)}{\psi(z) - \psi(\zeta)} = \frac{\varphi(z) - \varphi(\zeta)}{z - \zeta} : \frac{\psi(z) - \psi(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Dies giebt nach dem Begriff der Derivirten:

$$\lim_{z=\zeta} \cdot f(z) = \lim_{z=\zeta} \cdot \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\psi'(\zeta)},$$

falls der Quotient der Derivirten einen völlig bestimmten Werth hat.

Ist das Letztere nicht der Fall, lassen sich die Functionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ aber vermittelst des Taylorschen Satzes nach ganzen Potenzen von $(z - \zeta)$ entwickeln, so mögen $\varphi^{(m)}(\zeta)$ und $\psi^{(n)}(\zeta)$ diejenigen Derivirten von niedrigster Ordnung sein, welche nicht verschwinden. Dann ist nach § 36, (1) und § 38, (5):

$$\varphi(z) = \frac{(z - \zeta)^m}{m!} \cdot \varphi^{(m)}(z - \theta(z - \zeta)),$$

$$\psi(z) = \frac{(z - \zeta)^n}{n!} \cdot \psi^{(n)}(z - \theta_1(z - \zeta));$$

mithin;

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{n!}{m!} \cdot (z-\zeta)^{m-n} \cdot \frac{\varphi^{(m)}(z-\theta(z-\zeta))}{\psi^{(n)}(z-\theta_1(z-\zeta))}.$$

Die Argumente der Functionen im letzten Ausdruck nähern sich zugleich mit z dem Grenzwerthe ζ, weshalb

$$\lim_{z=0} \cdot f(z) = \frac{n!}{m!} \cdot \frac{\varphi^{(m)}(\zeta)}{\psi^{(n)}(\zeta)} \cdot \lim_{z=\zeta} \cdot (z-\zeta)^{m-n}$$

hervorgeht, was für $m=n$ von Null verschieden, für $m \gtrless n$ aber $=0$ oder $=\infty$ ist.

Hieraus ergiebt sich der

Lehrsatz I.

Giebt es in der Reihe der Functionen

$$\varphi(z),\ \varphi'(z),\ \varphi''(z),\ \varphi'''(z), \ldots$$

und auch in der Reihe der Functionen

$$\psi(z),\ \psi'(z),\ \psi''(z),\ \psi'''(z), \ldots$$

je eine erste, welche für $z=\zeta$ nicht verschwindet, so ist

$$\lim_{z=\zeta} \cdot \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z=\zeta} \cdot \frac{\varphi^{(r)}(z)}{\psi^{(r)}(z)},$$

so lange $\varphi^{(r-1)}(\zeta)=0$ und auch $\psi^{(r-1)}(\zeta)=0$ ist.

Z. B. ergiebt sich:

$$\lim_{z=0} \cdot \frac{1-\cos z}{z \sin z} = \lim_{z=0} \cdot \frac{+\sin z}{\sin z + z\cos z} = \lim_{z=0} \cdot \frac{\cos z}{2 \cdot \cos z - z \sin z} = \frac{1}{2}.$$

II.

Wachsen Zähler und Nenner des Quotienten

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

bei der Annäherung von z an ζ unendlich, so kann man dies dadurch auf den Fall I zurückführen, dass man

$$f(z) = \frac{[\psi(z)]^{-1}}{[\varphi(z)]^{-1}}$$

schreibt. Dann muss, indem man hier Zähler und Nenner differentiirt,

$$\lim \cdot f(z) = \lim \cdot \frac{-\psi'(z)\cdot[\psi(z)]^{-2}}{-\varphi'(z)\cdot[\varphi(z)]^{-2}} = \lim \cdot \frac{\psi'(z)}{\varphi'(z)} \cdot \left[\lim \cdot f(z)\right]^2$$

sein; woraus

$$\lim_{z=\zeta} \cdot f(z) = \lim_{z=\zeta} \cdot \frac{\varphi'(z)}{\psi'(z)}$$

folgt.

Gegen diese Deduction lässt sich u. a. einwenden, dass sie nur berechtigt sei, wenn die Functionen $\frac{1}{\varphi(z)}$ und $\frac{1}{\psi(z)}$ den Substitutionswerth 0 für $z = \zeta$ haben, und wenn die Existenz eines endlichen von Null verschiedenen Grenzwerthes $\lim\limits_{z=\zeta} \cdot \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ von vorne herein bekannt ist, während doch umgekehrt hierauf erst aus dem Werthe $\lim\limits_{z=\zeta} \cdot \frac{\varphi'(z)}{\psi'(z)}$ geschlossen und auch weder 0 noch ∞ als Grenzwerth ausgeschlossen werden soll.

Um diese Bedenken auf ihr richtiges Maass zurückzuführen, geben wir die folgende einfachere Ableitung:

Der Quotient

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\int\limits_a^z \varphi'(z)\,dz}{\int\limits_a^z \psi'(z)\,dz}$$

erlangt für $\lim \cdot z = \zeta$, mag ζ endlich oder unendlich sein, nach § 50 oder § 49 denselben Grenzwerth, wie

$$\frac{\varphi'(z)}{\psi'(z)},$$

wenn $\psi'(z)$ bei der Annäherung von z an ζ nicht unzählbar oft im Wachsen und Abnehmen wechselt und

$$\lim_{z=\zeta} \cdot \frac{\varphi'(z)}{\psi'(z)}$$

einen bestimmten Werth besitzt.

Dies giebt den

Lehrsatz II.

Der Grenzwerth eines Quotienten, dessen Zähler und Nenner bei der Annäherung von z an ζ unendlich wachsen, ist gleich dem Grenzwerth des Quotienten der Derivirten von Zähler und Nenner, falls diese Derivirten hierbei nicht unzählbar oft im Wachsen und Abnehmen wechseln. — Er lässt sich also formal nach derselben Methode finden, als wenn Zähler und Nenner sich der Null nähern.

Z. B. erhält man:

$$\lim_{z=0} \cdot z\, l z = \lim_{z=0} \cdot \frac{l z}{z^{-1}} = \lim_{z=0} \cdot \frac{z^{-1}}{-z^{-2}} = \lim_{z=0} \cdot (-z) = 0.$$

III.

Da aus der Gleichung

$$f(z) = \varphi(z)^{\psi(z)}$$

durch Logarithmirung die Gleichung

$$l f(z) = \psi(z) \cdot l \varphi(z) = \frac{l \varphi(z)}{[\psi(z)]^{-1}}$$

entsteht, und im letzten Ausdruck die Derivirte des Zählers, durch die Derivirte des Nenners dividirt, den Ausdruck

$$\frac{\varphi'(z) \cdot [\varphi(z)]^{-1}}{-\psi'(z) \cdot [\psi(z)]^{-2}} = -\frac{\varphi'(z) \cdot [\psi(z)]^{2}}{\psi'(z) \cdot \varphi(z)}$$

ergiebt, welcher sich nach I und II auf seinen Grenzwerth prüfen lässt, so folgt:

Sind Grundfactor und Exponent einer Potenz

$$f(z) = \varphi(z)^{\psi(z)}$$

bei der Annäherung an $z = \zeta$ gleichzeitig unendlich klein, oder die eine von diesen Zahlen unendlich gross und die andere unendlich klein, oder $\psi(z)$ unendlich gross bei $\lim \cdot \varphi(z) = 1$, so suche man den Grenzwerth des Exponenten von e in

$$f(z) = e^{\psi(z) \cdot l \varphi(z)},$$

welcher nach II mit dem Grenzwerthe von

$$-\frac{\varphi'(z) \cdot [\psi(z)]^2}{\psi'(z) \cdot \varphi(z)}$$

identisch ist.

Ist beispielsweise

$$f(z) = z^{\sin z} = e^{\sin z \, l z},$$

so folgt für $\lim \cdot z = 0$:

$$\lim_{z=0} \cdot \sin z \, l z = \lim_{z=0} \cdot \frac{l z}{\sin z^{-1}} = \lim_{z=0} \cdot \frac{z^{-1}}{-\sin z^{-2} \cos z} = -\lim_{z=0} \cdot \frac{\sin z^2}{z \cos z}$$

$$= -\lim_{z=0} \cdot \frac{\sin z^2}{z} = -\lim_{z=0} \cdot \frac{2 \sin z \cos z}{1} = 0,$$

$$\lim_{z=0} \cdot f(z) = e^0 = 1.$$

IV.

Wachsen in einer Differenz der Minuend und der Subtrahend gleichzeitig unendlich, so bringe man die Differenz in die Form eines Bruches und verfahre nach I oder II.

Ist beispielsweise

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \cot z^2,$$

so kann man $f(z)$ in die Form

$$f(z) = \frac{\sin z^2 - z^2 \cos z^2}{z^2 \sin z^2}$$

bringen und diesen Bruch nach 1 behandeln.

Thut man dies, so ergiebt sich:

$$\lim_{z=0} \cdot f(z) = \frac{2}{3} \cdot$$

§ 84.

Zerlegung der gebrochenen rationalen Functionen in eine ganze und eine echt gebrochene Function.

Sind $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ ganze rationale algebraische Functionen gleich hohen oder verschieden hohen Grades von z, so heisst der Bruch

(1) $$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

eine gebrochene rationale Function von z, und zwar echt gebrochen, falls der Grad des Zählers denjenigen des Nenners nicht erreicht, unecht im entgegengesetzten Fall.

Jede unecht gebrochene Function lässt sich als Summe einer ganzen Function und einer echt gebrochenen Function mit gleichlautendem Nenner darstellen.

Denn man braucht nur mit $\psi(z)$ in $\varphi(z)$ so weit auszudividiren, als zum Quotienten noch Glieder mit positiven Potenzen von z (inclusive z^0) hinzukommen — wodurch die ganze Function gewonnen ist — und dann den Bruch aus dem letzten Rest und dem Divisor hinzuzufügen — was die echt gebrochene Function giebt.

Um sich die unbequemen Operationen der Division zu ersparen, kann man das folgende Verfahren einschlagen:

Soll der gegebene Bruch

$$f(z) = \frac{A_{n+r} z^{n+r} + A_{n+r-1} z^{n+r-1} + \cdots + A_1 z^1 + A_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0}$$

in die Form

$$(2)\qquad f(z)=c_r z^r + c_{r-1} z^{r-1} + \cdots + c_1 z^1 + c_0 + \frac{b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \cdots + b_1 z^1 + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z^1 + a_0}$$

gebracht werden, so müssen die Constanten c und b so bestimmt werden, dass für jedes z die Relation gilt:

$$\begin{aligned} A_{n+r} z^{n+r} + A_{n+r-1} z^{n+r-1} + \cdots + A_1 z^1 + A_0 \\ = (z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0)(c_r z^r + c_{r-1} z^{r-1} + \cdots + c_0) \\ + b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \cdots + b_0 . \end{aligned}$$

Multiplicirt man aus und setzt die Coefficienten gleich hoher Potenzen von z auf beiden Seiten gleich, so ergeben sich die Unbekannten c und b successive aus den Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} A_{n+r} = c_r, \\ A_{n+r-1} = a_{n-1} \cdot c_r + c_{r-1}, \\ A_{n+r-2} = a_{n-2} \cdot c_r + a_{n-1} \cdot c_{r-1} + c_{r-2}, \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ A_{n+1} = a_1 c_n + a_2 c_{n-1} + a_3 c_{n-2} + \cdots + c_1, \\ A_n = a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + a_2 c_{n-2} + \cdots + a_{n-1} c_1 + c_0, \\ A_{n-1} = a_0 c_{n-1} + a_1 c_{n-2} + \cdots + a_{n-2} c_1 + a_{n-1} c_0 + b_{n-1}, \\ A_{n-2} = a_0 c_{n-2} + \cdots + a_{n-3} c_1 + a_{n-2} c_0 + b_{n-2}, \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ A_1 = a_0 c_1 + a_1 c_0 + b_1, \\ A_0 = a_0 c_0 + b_0. \end{cases}$$

Und es zeigt die Form dieser Gleichungen, dass die Coefficienten $c_r, c_{r-1}, \ldots, c_1, c_0; b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$ in der hier angeführten Folge unzweideutig bestimmt werden. — Dabei ist es selbstverständlich, dass c_n für $n > r$ den Werth Null erfordert.

Ist beispielsweise

$$f(z) = \frac{z^7}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6},$$

so lauten unsere Gleichungen (3):

$$\begin{aligned}
1 &= c_4, \\
0 &= -6c_4 + c_3, \\
0 &= +11c_4 - 6c_3 + c_2, \\
0 &= -6c_4 + 11c_3 - 6c_2 + c_1, \\
0 &= -6c_3 + 11c_2 - 6c_1 + c_0; \\
0 &= -6c_2 + 11c_1 - 6c_0 + b_2, \\
0 &= -6c_1 + 11c_0 + b_1, \\
0 &= -6c_0 + b_0.
\end{aligned}$$

Daher ist:

$$c_4 = +1,\ c_3 = +6,\ c_2 = +25,\ c_1 = +90,\ c_0 = +301;$$
$$b_2 = +966,\ b_1 = -2771,\ b_0 = +1806.$$

Man hat also:

$$\frac{z^7}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

$$= z^4 + 6z^3 + 25z^2 + 90z + 301 + \frac{966z^2 - 2771z + 1806}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}.$$

Dass in diesen Entwickelungen dem Coefficienten der höchsten Potenz des Nenners $\psi(z)$ der Werth 1 gegeben ist, thut der Allgemeinheit der Entwickelung offenbar keinen Abbruch, da man den Bruch $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ vorher durch ihn heben kann.

Wir brauchen uns daher im Folgenden nur mit echt gebrochenen Functionen zu befassen — wie es geschehn wird.

§ 85.

Zerlegung der echt gebrochenen Functionen in Partialbrüche.

Es sei wieder, wie im vorigen §,

(1)
$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

wo $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ ganze rationale Functionen von z bedeuten. Wir setzen aber jetzt für $\varphi(z)$ einen niedrigeren Grad voraus als für $\psi(z)$ und nehmen an, dass $z = \zeta$ eine m-fache Wurzel der Gleichung $\psi(z) = 0$ sei, dass sich also

(2)
$$\psi(z) = (z - \zeta)^m \cdot \theta(z)$$

darstellen lasse, indem m eine ganze positive, $\theta(\zeta)$ eine von Null verschiedene Zahl bedeutet. Und zwar ist $\theta(z)$ eine ganze Function $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades, wenn $\psi(z)$ den Grad n hat.

Substituirt man aus (2) in (1) und erweitert den Bruch rechter Hand mit $\theta(\zeta)$, so ergiebt sich als identisch:

$$f(z) = \frac{\theta(\zeta)\,\varphi(z)}{(z-\zeta)^m\theta(\zeta)\,\theta(z)} = \frac{\varphi(\zeta)\,\theta(z) + [\theta(\zeta)\,\varphi(z) - \varphi(\zeta)\,\theta(z)]}{(z-\zeta)^m\theta(\zeta)\,\theta(z)}$$
$$= \frac{\varphi(\zeta):\theta(\zeta)}{(z-\zeta)^m} + \frac{[\theta(\zeta)\,\varphi(z) - \varphi(\zeta)\,\theta(z)]:\theta(\zeta)}{(z-\zeta)^m\theta(z)}.$$

Der Zähler des zweiten Bruchs in dieser Gleichung ist seiner Bildungsweise nach eine ganze Function von höchstens $(n-1)^{\text{tem}}$ Grade, weil er keine höhere Potenz von z enthalten kann als $\varphi(z)$ und $\theta(z)$. Ausserdem verschwindet die Function

$$\theta(\zeta)\cdot\varphi(z) - \varphi(\zeta)\cdot\theta(z)$$

für $z = \zeta$ und ist daher durch $(z - \zeta)$ ohne Rest theilbar.

Bezeichnen wir

(3)
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\varphi(\zeta)}{\theta(\zeta)} = c^{(m)},\\ &\frac{[\theta(\zeta)\cdot\varphi(z) - \varphi(\zeta)\cdot\theta(\zeta)]:\theta(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{\varphi(z) - c^{(m)}\cdot\theta(z)}{z-\zeta} = \varphi_1(z), \end{aligned}\right.$$

so ist also $\varphi_1(z)$ eine ganze Function von höchstens $(m-2)^{\text{tem}}$ Grade.

Durch Substitution in den letzten Ausdruck von $f(z)$ ergiebt sich daher:

$$(4)\qquad f(z) = \frac{c^{(m)}}{(z-\zeta)^m} + \frac{\varphi_1(z)}{(z-\zeta)^{m-1}\cdot\theta(z)}.$$

Nun kann man die echt gebrochene Function, welche hier zuletzt geschrieben ist, in ganz analoger Weise behandeln, wie diejenige, aus welcher sie hervorgegangen ist, und desgleichen jede neue Function derselben Art, auf welche man dabei stösst.

Mithin muss sich

$$(5)\quad f(z) = \frac{c^{(m)}}{(z-\zeta)^m} + \frac{c^{(m-1)}}{(z-\zeta)^{m-1}} + \cdots + \frac{c^{(1)}}{(z-\zeta)^1} + \frac{\mu(z)}{\theta(z)}$$

darstellen lassen, wo der letzte Bruch eine echt gebrochene Function von z ist, und die Function $(n-m)^{ten}$ Grades $\theta(z)$ für $z=\zeta$ nicht verschwindet.

Zur Bestimmung der Constanten c kann man den in (3) angegebenen Weg gehn.

Man gelangt aber leichter zu entwickelten Formeln, wenn man in (5) zunächst

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z-\zeta)^m\cdot\theta(z)}$$

einsetzt, dann mit $(z-\zeta)^m$ multiplicirt und die so erhaltene Gleichung

$$\frac{\varphi(z)}{\theta(z)} = c^{(m)} + c^{(m-1)}\cdot(z-\zeta) + c^{m-2}\cdot(z-\zeta)^2 + \cdots$$
$$\cdots + c^{(1)}(z-\zeta)^{m-1} + \frac{\mu(z)}{\theta(z)}\cdot(z-\zeta)^m$$

mit der Taylorschen Entwickelung der linken Seite nach steigenden Potenzen von $(z-\zeta)$ vergleicht.

Dies ergiebt, weil die Taylorsche Entwickelung wegen des von Null verschiedenen Werthes der Grösse $\theta(\zeta)$ convergirt, und die Coefficienten der gleich hohen Potenzen links und rechts übereinstimmen müssen:

(6) $$c^{(m-r)} = \frac{1}{r!} \cdot \left[\frac{d^r \cdot \frac{\varphi(z)}{\theta(z)}}{dz^r} \right]_{z=\zeta};$$

und es ist — da die Functionen $\varphi(z)$ und $\theta(z)$ als gegeben gedacht werden — nur noch zu fragen, ob sich zur Vereinfachung der durch (6) angedeuteten Rechnung Hülfsmittel darbieten.

Dies ist aber der Fall.

Denn bezeichnet man

$$\frac{\varphi(z)}{\theta(z)} = \lambda(z), \quad \varphi(z) = \theta(z) \cdot \lambda(z),$$

so erhält man durch Differentiation nach dem Leibnitzschen Satz (§ 31) unter Weglassung des Argumentes z nach und nach:

$$\varphi = \theta \cdot \lambda,$$

$$\frac{\varphi'}{1!} = \frac{\theta'}{1!} \cdot \lambda + \theta \cdot \frac{\lambda'}{1!},$$

$$\frac{\varphi''}{2!} = \frac{\theta''}{2!} \cdot \lambda + \frac{\theta'}{1!} \cdot \frac{\lambda'}{1!} + \theta \cdot \frac{\lambda''}{2!},$$

u. s. w.

$$\frac{\varphi^{(r)}}{r!} = \frac{\theta^{(r)}}{r!} \cdot \lambda + \frac{\theta^{(r-1)}}{(r-1)!} \cdot \frac{\lambda'}{1!} + \frac{\theta^{(r-2)}}{(r-2)!} \cdot \frac{\lambda''}{2!} + \cdots + \theta \cdot \frac{\lambda^{(r)}}{r!}.$$

Für $z = \zeta$ geht nach (6) $\frac{\lambda^{(r)}}{r!}$ in $c^{(m-r)}$ über, $\frac{\theta^{(r)}}{r!}$ aber, wie man sofort durch Differentiation der Gleichung (2) vermittelst des Leibnitzschen Satzes erkennt, in $\frac{\psi^{(m+r)}(\zeta)}{(m+r)!}$.

Mithin kann man, indem

(7) $$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi^{(r)}(\zeta)}{r!} = \varphi_r, \quad \varphi(\zeta) = \varphi_0, \\ \frac{\theta^{(r)}(\zeta)}{r!} = \frac{\psi^{(m+r)}(\zeta)}{(m+r)!} = \psi_{m+r} \end{array} \right.$$

bezeichnet wird, die Zähler $c^{(m-r)}$ der Partialbrüche in (5) successive aus den Formeln

$$(8)\quad \begin{cases} \varphi_0 = \psi_m \cdot c^{(m)}, \\ \varphi_1 = \psi_{m+1} \cdot c^{(m)} + \psi_m \cdot c^{(m-1)}, \\ \varphi_2 = \psi_{m+2} \cdot c^{(m)} + \psi_{m+1} \cdot c^{(m-1)} + \psi_m \cdot c^{(m-2)}, \\ \qquad \text{u. s. w.} \\ \varphi_{m-1} = \psi_{2m-1} \cdot c^{(m)} + \psi_{2m-2} \cdot c^{(m-1)} + \psi_{2m-3} \cdot c^{(m-2)} + \cdots + \psi_m \cdot c^{(1)} \end{cases}$$

berechnen.

Dies giebt:

$$(9)\qquad (-1)^r \cdot \psi_m^{r+1} \cdot c^{(m-r)} = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \psi_m & & & \\ \varphi_1 & \psi_{m+1} & \psi_m & & \\ \varphi_2 & \psi_{m+2} & \psi_{m+1} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \psi_m \\ \varphi_r & \psi_{m+r} & \psi_{m+r-1} & \cdot\cdot & \psi_{m+1} \end{vmatrix}.$$

Behandelt man ferner die echt gebrochene Function $\frac{\mu(z)}{\theta(z)}$, welche in (5) noch unzerlegt übrig blieb, nach derselben Methode für eine andere Wurzel der Gleichung $\psi(z) = 0$, so tritt, weil sie eine gleich hohe Wurzel der Gleichung $\theta(z) = 0$ ist, einfach $\theta(z)$ in die Rolle von $\psi(z)$, $\mu(z)$ in diejenige von $\varphi(z)$. Und da der Vorgang sich wiederholen lässt, so lange noch echt gebrochene Functionen übrig bleiben, so sieht man unmittelbar, dass das schliessliche Zerlegungsresultat das folgende ist:

$$(10)\quad \begin{aligned} f(z) = & \frac{c_1^{(m_1)}}{(z-\zeta_1)^{m_1}} + \frac{c_1^{(m_1-1)}}{(z-\zeta_1)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{c_1^{(1)}}{z-\zeta_1} \\ & + \frac{c_2^{(m_2)}}{(z-\zeta_2)^{m_2}} + \frac{c_2^{(m_2-1)}}{(z-\zeta_2)^{m_2-1}} + \cdots + \frac{c_2^{(1)}}{z-\zeta_2} \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + \frac{c_k^{(m_k)}}{(z-\zeta_k)^{m_k}} + \frac{c_k^{(m_k-1)}}{(z-\zeta_k)^{m_k-1}} + \cdots + \frac{c_k^{(1)}}{z-\zeta_k}. \end{aligned}$$

Die Zähler der Partialbrüche in dieser Formel werden sämmtlich durch die Ausdrücke (6) bis (9) bestimmt,

wenn man in ihnen das ζ der Reihe nach durch die Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ ersetzt, welche in der Function

$$\psi(z) = (z - \zeta_1)^{m_1} \cdot (z - \zeta_2)^{m_2} \cdots (z - \zeta_k)^{m_k}$$

vorkommen.

Die von (6) bis (10) dargestellten Formeln bieten eine sichere Methode zur Bestimmung der Coefficienten $c_k^{(r)}$ dar und beweisen die Zerlegungsfähigkeit einer jeden echt gebrochenen Function in lauter Partialbrüche.

Für die praktische Rechnung ist es, nachdem durch diese Formeln die Entwicklungsform ausser Frage gestellt ist, häufig bequemer, im Sinne der Methode der unbestimmten Coefficienten zu verfahren, d. i.: die Werthe der Coefficienten aus der bekannten Entwickelungsform nachträglich zu bestimmen. Und diese Methode bewährt sich namentlich dann, wenn der Nenner $\psi(z)$ jeden Factor $(z - \zeta)$ nur in der ersten Potenz enthält.

Die Gleichung (10) zeigt nämlich u. A., dass

$$(11) \qquad \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{c_1}{z - \zeta_1} + \frac{c_2}{z - \zeta_2} + \cdots + \frac{c_n}{z - \zeta_n}$$

gesetzt werden kann, wenn die Factoren des Productes

$$(12) \qquad \psi(z) = (z - \zeta_1) \cdot (z - \zeta_2) \cdots (z - \zeta_n)$$

sämmtlich unter sich verschieden sind, und die ganze Function $\varphi(z)$ den n^{ten} Grad nicht erreicht.

Will man nun einen Coefficienten c_1 bestimmen — wir nehmen ihn als Repräsentanten der übrigen — so ist nach (11):

$$c_1 = \frac{(z - \zeta_1)\,\varphi(z)}{\psi(z)} - (z - \zeta_1) \cdot \left[\frac{c_2}{z - \zeta_2} + \frac{c_3}{z - \zeta_3} + \cdots + \frac{c_n}{z - \zeta_n}\right],$$

woraus

$$c_1 = \lim_{z = \zeta_1} \cdot \frac{(z - \zeta_1)\,\varphi(z)}{\psi(z)},$$

d. i. nach § 83, I:

$$(12) \qquad c_k = \frac{\varphi(\zeta_k)}{\psi'(\zeta_k)}$$

folgt.

In ähnlicher Weise kann man § 83, I. verwenden, wenn höhere Potenzen von $(z-\zeta)$ in $\psi(z)$ vorkommen, und geniesst dabei den Vortheil, sein Gedächtniss nicht mit Formeln zu beschweren.

Als erstes Beispiel diene der Ausdruck

$$\frac{966z^2-2771z+1806}{z^3-6z^2+11z-6},$$

welcher in § 84 als echt gebrochener Bestandtheil des unecht gebrochenen Ausdrucks übrig blieb.

Da

$$\psi(z)=z^3-6z^2+11z-6=(z-1)\cdot(z-2)\cdot(z-3)$$

ist, so lässt sich entwickeln:

$$\frac{966z^2-2771z+1806}{z^3-6z^2+11z-6}=\frac{c_1}{z-1}+\frac{c_2}{z-2}+\frac{c_3}{z-3}.$$

Nun ist:

$$\psi'(z)=3z^2-12z+11=(z-2)(z-3)+(z-1)(z-3)+(z-1)(z-2),$$

$$\psi'(1)=+2,\quad \psi'(2)=-1,\quad \psi'(3)=+2;$$

$$\varphi(1)=+1,\quad \varphi(2)=+128,\quad \varphi(3)=+2187;$$

mithin:

$$\frac{966z^2-2771z+1806}{z^3-6z^2+11z-6}=\frac{0,5}{z-1}-\frac{128}{z-2}+\frac{1093,5}{z-3}.$$

Um auch ein Beispiel zu besprechen, bei welchem $\psi(z)$ nicht nur aus verschiedenen Factoren besteht, bestimmen wir die Constanten der Transformation

$$\frac{4z^2+4z+4}{z^3-z^2-z+1}=\frac{c_1}{(z-1)^2}+\frac{c_2}{z-1}+\frac{c_3}{z+1},$$

deren Möglichkeit sich nach (10) darauf gründet, dass

$$\psi(z)=z^3-z^2-z+1=(z-1)^2(z+1)$$

ist.

Multiplicirt man mit $(z-1)^2$ und wendet dann die Methode § 83, I. an, so erhält man offenbar:

$$c_1 = \lim_{z=1} \cdot \frac{(z-1)^2 (4z^2+4z+4)}{z^3-z^2-z+1}$$

$$= \lim_{z=1} \cdot \frac{2(z-1)(4z^2+4z+4)+(z-1)^2 \cdot (8z+4)}{3z^2-2z-1}$$

$$= \lim_{z=1} \cdot \frac{2(4z^2+4z+4)+4(z-1)(8z+4)+(z-1)^2 \cdot 8}{6z-2} = 6.$$

Dann folgt ferner:

$$\frac{c_2}{z-1}+\frac{c_3}{z+1} = \frac{4z^2+4z+4}{z^3-z^2-z+1} - \frac{6}{(z-1)^2} = \frac{4z^2-2z-2}{z^3-z^2-z+1},$$

$$c_2 = \lim_{z=1} \cdot \frac{(z-1)(4z^2-2z-2)}{z^3-z^2-z+1}$$

$$= \lim_{z=1} \cdot \frac{(4z^2-2z-2)+(z-1)(8z-2)}{3z^2-2z-1}$$

$$= \lim_{z=1} \cdot \frac{2(8z-2)+(z-1)\cdot 8}{6z-2} = 3.$$

Endlich ergiebt sich:

$$c_3 = \lim_{z=-1} \cdot \frac{(z+1)(4z^2+4z+4)}{z^3-z^2-z+1}$$

$$= \lim_{z=-1} \cdot \frac{(4z^2+4z+4)+(z+1)(8z+4)}{3z^2-2z-1} = 1.$$

Daher ist:

$$\frac{4z^2+4z+4}{z^3-z^2-z+1} = \frac{6}{(z-1)^2} + \frac{3}{z-1} + \frac{1}{z+1}.$$

Es ist hierbei zu bemerken, dass die Rechnung sich bedeutend kürzer gestaltet, wenn man darauf Acht hat, denjenigen Factor im Zähler, welcher nicht verschwindet, mit seinem Grenzwerthe von vorne herein auszusondern, und solche Summanden wegzulassen, welche sich schneller der Null nähern als ein anderer. In dieser Weise erhält man z. B.:

$$c_1 = \lim_{z=1} \cdot \frac{(z-1)^2(4z^2+4z+4)}{z^3-z^2-z+1} = 12 \cdot \lim_{z=1} \cdot \frac{(z-1)^2}{z^3-z^2-z+1}$$

$$= 12 \cdot \lim_{z=1} \cdot \frac{2(z-1)}{3z^2-2z-1} = 12 \cdot \lim_{z=1} \cdot \frac{2}{6z-2} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Noch kürzer freilich wäre das Resultat erworben, wenn man vor der Substitution von $z=1$ das $(z-1)^2$ im Zähler gegen den gleichnamigen Factor im Nenner $z^3-z^2-z+1=(z-1)^2(z+1)$ gehoben hätte. Durch dieses Verfahren wird aber die Anwendung von § 83, I. nicht immer überflüssig. Denn bei c_2 würde aus dem ersten Ausdruck für diese Zahl nur folgen:

$$c_2 = \lim_{z=1} \cdot \frac{4z^2-2z-2}{z^2-1};$$

und es ist nun bequemer, Zähler und Nenner zu differentiiren, als den gemeinsamen Factor aufzusuchen und dann mit ihm zu heben.

Schliesslich soll auch die folgende Berechnungsmethode nicht unerwähnt bleiben.

Multiplicirt man nach der Feststellung der möglichen Zerlegungsform

$$\frac{4z^2+4z+4}{z^3-z^2-z+1} = \frac{c_1}{(z-1)^2} + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{z+1}$$

mit dem Nenner

$$z^3-z^2-z+1=(z-1)^2(z+1),$$

so erhält man:

$$4z^2+4z+4 = c_1(z+1) + c_2(z^2-1) + c_3(z^2-2z+1)$$
$$= (c_2+c_3)z^2 + (c_1-2c_3)z + (c_1-c_2+c_3).$$

Da nun die Coefficienten gleich hoher Potenzen von z rechts und links gleich gross sein müssen, so sind c_1, c_2, c_3 so zu bestimmen, dass sie den Gleichungen

$$c_1 - c_2 + c_3 = 4,$$
$$c_1 \quad - 2c_3 = 4,$$
$$c_2 + c_3 = 4$$

genügen. Dies giebt wieder: $c_1=6$, $c_2=3$, $c_3=1$.

§ 86.

Complex conjugirte Partialbrüche.

Sind die Coefficienten des Zählers und des Nenners der echt gebrochenen Function

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

sämmtlich reell — und solche Fälle kommen häufig zur Behandlung — so sind erstens die Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ von

$$\psi(z) = (z-\zeta_1)^{m_1} \cdot (z-\zeta_2)^{m_2} \cdots (z-\zeta_k)^{m_k} = 0$$

nach § 79, IV. entweder sämmtlich reell oder paarweise complex conjugirt.

Betrachtet man nun den Ausdruck (9) des vorigen §, welcher die Zähler der Partialbrüche in (10) bestimmt, d. i. den Ausdruck

$$(1)\quad c_k^{(m_k-r)} = \frac{(-1)^r}{\left[\psi_m(\zeta_k)\right]^{r+1}} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_0(\zeta_k) & \psi_m(\zeta_k) & & & \\ \varphi_1(\zeta_k) & \psi_{m+1}(\zeta_k) & \psi_m(\zeta_k) & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_r(\zeta_k) & \psi_{m+r}(\zeta_k) & \psi_{m+r-1}(\zeta_k) & \cdots & \psi_{m+1}(\zeta_k) \end{vmatrix},$$

so ist es — weil ausser den Coefficienten von $\psi(z)$ auch diejenigen von $\varphi(z)$ reell sind — ferner klar, dass die Zähler $c_k^{(m_k-r)}$ der Partialbrüche bei jedem reellen Werthe von ζ_k reell, bei je zwei conjugirt complexen Wurzeln von $\psi(z) = 0$ aber entweder reell und gleich oder complex conjugirt sind.

— Denn die rechte Seite von (1) setzt sich, wenn ζ_k reell ist, aus lauter reellen Zahlen zusammen und verwandelt sich, sobald $\zeta_k = \xi + i\eta$ mit dem conjugirt complexen Werthe $\xi - i\eta$ vertauscht wird, in den conjugirt complexen Ausdruck, weil das i nur in ζ_k — und nicht in den Coefficienten der Functionen $\varphi_r(z)$ und $\psi_r(z)$ — vorkommt.[1])

---

[1]) Sind die Exponenten $m_k = 1$, so lautet die Formel für den Partialbruchzähler nach dem vorigen § einfacher:

$$c_k = \frac{\varphi(\zeta_k)}{\psi'(\zeta_k)}.$$

Der Schluss aus dieser speciellen einfacheren Form ist nicht einfacher als derjenige aus der obigen allgemeinen.

Dabei bedarf es keiner weiteren Erörterung, dass die beiden Exponenten m_k, welche zu conjugirt complexen Wurzeln gehören, nothwendig gleich sind.

Nehmen wir nun in der Entwickelung (10) des vorigen § zwei Partialbrüche zusammen, welche sich nur durch das Vorzeichen von i unterscheiden, so ergeben sie sich in der Form:

$$\frac{p+iq}{(z-\xi-i\eta)^r}+\frac{p-iq}{(z-\xi+i\eta)^r}$$

$$=\frac{\left[\begin{array}{l}2p\cdot\left\{(z-\xi)^r-\binom{r}{2}\eta^2(z-\xi)^{r-2}+\cdots\right\}\\-2q\cdot\left\{\binom{r}{1}\eta(z-\xi)^{r-1}-\binom{r}{3}\eta^3(z-\xi)^{r-3}+\cdots\right\}\end{array}\right]}{\left\{(z-\xi)^2+\eta^2\right\}^r}\;.$$

Diese Summe ist durchaus reell, so lange z reell ist.

Man kann daher jede echt gebrochene Function, deren Coefficienten reell sind, so in eine Summe von Partialbrüchen zerlegen, dass die Nenner Potenzen von Functionen ersten und zweiten Grades, die Zähler höchstens von halb so hohem Grade, sämmtliche Constanten der Entwickelung aber wieder reell sind.

Wir wollen den Gegenstand in dieser Allgemeinheit nicht weiter verfolgen, den Fall aber an zwei besondern Beispielen erläutern, dass alle $m_k=1$ sind.

Dann haben die einzelnen reellen Brüche Nenner vom ersten oder zweiten Grade; und zwar ergiebt sich für die letzteren:

$$\frac{p+iq}{z-\xi-i\eta}+\frac{p-iq}{z-\xi-i\eta}=\frac{2p(z-\xi)-2q\eta}{(z-\xi)^2+\eta^2}.$$

Beispiel I.

Um die echt gebrochene Function

$$f(z)=\frac{z^{m-1}}{z^n-1}, \quad (0<m\overline{\gtrless}n)$$

in Partialbrüche zu zerlegen, ist zunächst daran zu erinnern, dass $z^n-1=0$ wird für

$$\zeta_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}},$$

jede von diesen Wurzeln aber nur einmal besitzt.

Das zugehörige c_k in der Zerlegungsformel § 85, (11) ist, weil wir hier

$$\varphi(z) = z^{m-1}, \quad \psi(z) = z^n - 1, \quad \psi'(z) = n z^{n-1}$$

haben, nach § 85, (12):

$$c_k = \frac{\varphi(\zeta_k)}{\psi'(\zeta_k)} = \frac{1}{n} \cdot \zeta_k^{m-n} = \frac{1}{n} \cdot e^{ik \cdot \frac{(m-n)2\pi}{n}}.$$

Mithin ergiebt sich:

$$n \cdot f(z) = n \cdot \frac{z^{m-1}}{z^n - 1} = \sum \frac{e^{ik \cdot \frac{(m-n)2\pi}{n}}}{z - e^{ik\frac{2\pi}{n}}} = \sum \frac{e^{ik\frac{2\pi m}{n}}}{z - e^{ik\frac{2\pi}{n}}},$$

wo für k irgend welche n auf einander folgende ganze Zahlen zu setzen sind.

Wir dürfen demnach die Werthe von k so wählen: 0; +1, —1; +2, —2; +3, —3; u. s. w.

Sondern wir zunächst den für $k=0$ entstehenden Summanden $\frac{1}{z-1}$ ab, und nehmen je zwei Summanden zusammen, bei welchen k denselben **absoluten** Werth hat, so finden wir für deren Summe:

$$\frac{e^{+ik.\frac{2\pi m}{n}}}{z - e^{+ik.\frac{2\pi}{n}}} + \frac{e^{-ik.\frac{2\pi m}{n}}}{z - e^{-ik.\frac{2\pi}{n}}} = \frac{2z\cos\left(k \cdot \frac{2\pi m}{n}\right) - 2\cos\left(k \cdot \frac{2\pi(m-1)}{n}\right)}{z^2 - 2z\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + 1};$$

— man braucht dazu nur die identische Gleichung

$$e^{+ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$

in Erinnerung zu haben.

Ist n eine grade Zahl, so bleibt hierbei schliesslich noch ein einzelner Summand übrig, dessen $k = \frac{n}{2}$ ist, weshalb er den Werth

$$\frac{e^{i\pi m}}{z - e^{i\pi}} = \frac{(-1)^m}{z+1}$$

annimmt.

Mithin kann man, wenn die erste von den beiden ganzen positiven Zahlen m und n die zweite nicht übersteigt, jederzeit

$$n \cdot \frac{z^{m-1}}{z^n - 1} = \frac{1}{z-1} + \sum \frac{2z \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi m}{n}\right) - 2\cos\left(k \cdot \frac{2\pi(m-1)}{n}\right)}{z^2 - 2z \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + 1},$$

$$\left(0 < k < \frac{n}{2}\right)$$

darstellen: mit der Bedingung, dass bei einem **graden** n auf der rechten Seite noch der Summand

$$\frac{(-1)^m}{z+1}$$

hinzugefügt werde.

Im Besondern ist daher:

$$3 \cdot \frac{z^2}{z^3 - 1} = \frac{1}{z-1} + \frac{2z\cos(2\pi) - 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{3} + 1} = \frac{1}{z-1} + \frac{2z+1}{z^2+z+1},$$

$$4 \cdot \frac{z^2}{z^4 - 1} = \frac{1}{z-1} + \frac{2z\cos\frac{3\pi}{2} - 2\cos\pi}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{2} + 1} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z^2+1} - \frac{1}{z+1}.$$

Beispiel II.

Soll

$$f(z) = \frac{z^{m-1}}{z^n + 1}, \quad (0 < m < n)$$

auf ähnliche Weise zerlegt werden, so sind die Wurzeln der Gleichung $z^n + 1 = 0$ von der Form:

$$\zeta_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}};$$

und man erhält nach § 85, (12):

$$c_k = \frac{\varphi(\zeta_k)}{\psi'(\zeta_k)} = \frac{1}{n} \cdot \zeta_k^{m-n} = \frac{1}{n} \cdot e^{i(2k+1)\frac{(m-n)\pi}{n}} = \frac{1}{n} \cdot e^{i\left[(2k+1)\frac{m\pi}{n} \pm \pi\right]},$$

wo man bei dem doppelten Vorzeichen $\pm$ freie Wahl hat. Es ist mithin:

$$n \cdot f(z) = n \cdot \frac{z^{m-1}}{z^n + 1} = \sum \frac{e^{i\left[(2k+1)\frac{m\pi}{n} \pm \pi\right]}}{z - e^{i(2k+1)\frac{\pi}{n}}},$$

die Summation über n auf einander folgende Werthe von k ausgedehnt. Conjugirte Werthe der Summanden entstehn für folgende Werthepaare von k: 0, — 1; + 1, — 2; + 2, — 3; .... Zieht man dieselben zusammen, so geben sie eine Snmme von der Form:

$$\frac{e^{i\left[r\frac{m\pi}{n}+\pi\right]}}{z - e^{ir\frac{\pi}{n}}} + \frac{e^{-i\left[r\frac{m\pi}{n}+\pi\right]}}{z - e^{-ir\frac{\pi}{n}}} = \frac{2z\cos\left(r\cdot\frac{m\pi}{n}+\pi\right) - 2\cos\left(r\cdot\frac{(m-1)\pi}{n}+\pi\right)}{z^2 - 2z\cos\left(r\cdot\frac{\pi}{n}\right)+1},$$

in welcher r alle ungraden Zahlen bedeutet, welche $< n$ sind. Ist n selbst ungrade, so bleibt noch ein einzelner Summand übrig, in welchem $2k + 1 = n$ ist, also der Summand:

$$\frac{e^{i\cdot[m\pi \pm \pi]}}{z - e^{i\pi}} = \frac{(-1)^{m-1}}{z+1}.$$

Mithin kann man, wenn die erste der beiden positiven ganzen Zahlen m und n die zweite nicht übersteigt, jederzeit

$$n \cdot \frac{z^{m-1}}{z^n+1} = \sum \frac{-2z\cos\left[(2k+1)\cdot\frac{m\pi}{n}\right] + 2\cos\left[(2k+1)\frac{(m-1)\pi}{n}\right]}{z^2 - 2z\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{n}\right]+1},$$

$$(0 < 2k + 1 < n)$$

darstellen: mit der Bedingung, dass man bei einem **ungraden** n auf der rechten Seite noch den Summanden

$$\frac{(-1)^{m-1}}{z+1}$$

hinzufüge.

Im Besondern ist daher:

$$3.\ \frac{z^2}{z^3+1} = \frac{-2z\cos\pi + 2\cos\frac{2\pi}{3}}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{3} + 1} + \frac{1}{z+1} = \frac{+2z-1}{z^2-z+1} + \frac{1}{z+1},$$

$$4.\ \frac{z^2}{z^4+1} = \frac{-2z\cos\frac{3\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{2}}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{4} + 1} + \frac{-2z\cos\frac{9\pi}{4} + 2\cos\frac{3\pi}{2}}{z^2 - 2z\cos\frac{3\pi}{4} + 1}$$

$$= \frac{+z\sqrt{2}}{z^2 - z\sqrt{2} + 1} - \frac{z\sqrt{2}}{z^2 + z\sqrt{2} + 1}.$$

§ 87.

Integration der gebrochenen rationalen Functionen.

Die Zerfällung der gebrochenen Functionen in Partialbrüche ist besonders wichtig für die Integration solcher Functionen, da die letztere sich nur auf diesem Wege bewerkstelligen lässt.

Ist die Zerfällung ausgeführt, so bietet die Integration selbst keine weitere Schwierigkeit. Sie ergiebt, wie schon eine oberflächliche Betrachtung der Gleichung (10) des § 85 lehrt, eine Summe von Potenzen und Logarithmen. Und es würde dieser Bemerkung in Absicht auf die praktische Verwendung nichts weiter hinzuzufügen sein, wenn es nicht nützlich wäre, sich für die am häufigsten vorkommenden Formen Schemata zu schaffen. zumal in denjenigen Fällen, in welchen die Zerfällung complexe Constanten ergiebt, ohne dass die zerfällte Function solche hat.

Dann kommen — wie wir gesehn haben — die complexen Ausdrücke immer in der conjugirten Verbindung

$$(1)\qquad \frac{p+iq}{(z-\xi-i\eta)^r} + \frac{p-iq}{(z-\xi+i\eta)^r} = F_r(z)$$

vor.

Hat r einen von 1 verschiedenen Werth, so folgt:

(2) $$\int F_r(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{r-1}\cdot\left\{\frac{p+iq}{(z-\xi-i\eta)^{r-1}}+\frac{p-iq}{(z-\xi+i\eta)^{r-1}}\right\}$$

$$=\frac{\left[\begin{array}{l}2p\left\{(z-\xi)^{r-1}-\binom{r-1}{2}(z-\xi)^{r-3}\cdot\eta^2+\cdots\right\}\\-2q\cdot\left\{\binom{r-1}{1}(z-\xi)^{r-2}\cdot\eta^1-\binom{r-1}{3}(z-\xi)^{r-4}\cdot\eta^3+\cdots\right\}\end{array}\right]}{(r-1)\cdot\left\{(z-\xi)^2+\eta^2\right\}^{r-1}}$$

so dass das Integral eine echt gebrochene algebraische Function ist, welche in der letzten Form nur reelle Constanten besitzt.

Für $r=1$ aber trifft die Formel (2) nicht mehr zu, wie man schon daraus sehen kann, dass sie den Factor $(r-1)$ im Nenner hat.

Man erhält:

$$\int F_1(z)\,dz=\int\left\{\frac{p+iq}{z-\xi-i\eta}+\frac{p-iq}{z-\xi+i\eta}\right\}dz$$

$$=(p+iq)\cdot l(z-\xi-i\eta)+(p-iq)\cdot l(z-\xi+i\eta)$$

$$=p\cdot l\left[(z-\xi)^2+\eta^2\right]+iq\cdot l\frac{z-\xi-i\eta}{z-\xi+i\eta}.$$

Zieht man noch $F_1(z)$ in einen Bruch zusammen und substituirt aus der identischen Gleichung (6) des § 64 den Ausdruck

$$l\,\frac{z-\xi-i\eta}{z-\xi+i\eta}=l\,\frac{1-i\dfrac{\eta}{z-\xi}}{1+i\dfrac{\eta}{z-\xi}}=-\,i\,2\,\mathrm{arc\,tng}\frac{\eta}{z-\xi},$$

so folgt:

(3) $$\int\frac{p(z-\xi)-q\eta}{(z-\xi)^2+\eta^2}\,dz=\frac{1}{2}\,p\cdot l\left[(z-\xi)^2+\eta^2\right]+q\cdot\mathrm{arc\,tng}\frac{\eta}{z-\xi}.$$

In der Regel ist aber die zu integrirende Function nicht direct in der Form (3) gegeben, sondern in der leicht auf sie zurückführbaren Form

$$\frac{\alpha z - \beta}{z^2 - 2az + b},$$

bei welcher es indessen nicht ausgeschlossen ist, dass die Wurzeln des Nenners reell sind. — Wir wollen diesem Integral seiner Wichtigkeit wegen einen besondern § widmen.

§ 88.

Auswerthung des unbestimmten Integrals $\int \frac{\alpha z - \beta}{z^2 - 2az + b} dz$.

Die beiden Wurzeln der Gleichung

$$z^2 - 2az + b = 0$$

haben die Werthe

$$\zeta = a \pm \sqrt{a^2 - b},$$

sind also gleich, wenn $a^2 - b = 0$ ist.

In diesem Falle ergiebt sich:

$$\frac{\alpha z - \beta}{z^2 - 2az + b} = \frac{\alpha(z-a) + a\alpha - \beta}{(z-a)^2} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{a\alpha - \beta}{(z-a)^2},$$

mithin:

$$(1)\quad \int \frac{\alpha z - \beta}{z^2 - 2az + b} \cdot dz = \alpha \cdot l(z-a) - \frac{a\alpha - \beta}{z-a}, \quad (a^2 - b = 0).$$

Ist aber $a^2 - b$ von Null verschieden, so kann man

$$\frac{\alpha z - \beta}{z^2 - 2az + b} = \frac{c_1}{z - \zeta_1} + \frac{c_2}{z - \zeta_2}$$

setzen, wo

$$\zeta_1 = a + \sqrt{a^2 - b}, \quad \zeta_2 = a - \sqrt{a^2 - b}$$

und

$$c_1 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{a\alpha - \beta}{2\sqrt{a^2 - b}}, \quad c_2 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{a\alpha - \beta}{2\sqrt{a^2 - b}}$$

ist.[1])

Integrirt man, so ergiebt sich:

(2)
$$\int \frac{\alpha z - \beta}{z^2 - 2az + b}\,dz$$

$$= c_1 \cdot l(z - \zeta_1) + c_2 \cdot l(z - \zeta_2)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha \cdot l[(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)] + \frac{a\alpha - \beta}{2\sqrt{a^2 - b}} \cdot l\frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2};$$

$$= \frac{1}{2}\alpha \cdot l(z^2 - 2az + b) + \frac{a\alpha - \beta}{2\sqrt{a^2 - b}} \cdot l\frac{z - a - \sqrt{a^2 - b}}{z - a + \sqrt{a^2 - b}}.$$

Substituirt man in dem letzten Ausdruck aus § 64, (6), wie es auch am Ende des vorigen § geschehn ist,

$$l\frac{z - a - \sqrt{a^2 - b}}{z - a + \sqrt{a^2 - b}} = l\frac{z - a - i\sqrt{b - a^2}}{z - a + i\sqrt{b - a^2}} = -i \cdot 2 \operatorname{arc\,tng}\frac{\sqrt{b - a^2}}{z - a},$$

so geht die Relation (2) in die Form

(3)
$$\int \frac{\alpha z - \beta}{z^2 - 2az + b}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\alpha \cdot l(z^2 - 2az + b) - \frac{a\alpha - \beta}{\sqrt{b - a^2}} \cdot \operatorname{arc\,tng}\frac{\sqrt{b - a^2}}{z - a}$$

über, wo es — wie auch in (2) — durchaus freisteht, denjenigen Werth von $\sqrt{b - a^2}$ zu nehmen, welchen man will.

---

[1]) Am einfachsten findet man diese Werthe von c_1 und c_2 daraus, dass

$$c_1 = \lim_{z=\zeta_1} \cdot \frac{(z - \zeta_1)(\alpha z - \beta)}{(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)} = \lim_{z=\zeta_1} \cdot \frac{\alpha z - \beta}{z - \zeta_2} = \frac{\alpha\zeta_1 - \beta}{\zeta_1 - \zeta_2} = \frac{\alpha\left(a + \sqrt{a^2 - b}\right) - \beta}{2\sqrt{a^2 - b}}$$

sein, und c_2 aus c_1 durch Umkehrung des Vorzeichens von $\sqrt{a^2 - b}$ hervorgehn muss.

Bedenkt man, dass

$$\operatorname{arc\,tng} u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cot} u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tng} \frac{1}{u}$$

ist, und dass in den unbestimmten Integralen die constanten Summanden weggelassen zu werden pflegen — hier: $\frac{\pi}{2}$, so erhellt auch die Identität von (3) mit:

$$(4) \qquad \int \frac{\alpha z - \beta}{z^2 - 2az + b} dz$$

$$= \frac{1}{2} \alpha \cdot l(z^2 - 2az + b) + \frac{a\alpha - \beta}{\sqrt{b - a^2}} \cdot \operatorname{arc\,tng} \frac{z - a}{\sqrt{b - a^2}}.$$

Die Form unseres Integrals ist noch einer grossen Reihe von Wandlungen fähig, welche sämmtlich auf Transformationen des Ausdrucks (2) — zum Theil mit Anwendung der Identitäten des § 64 — hinauskommen, z. B.:

$$(5) \qquad \int \frac{\alpha z - \beta}{z^2 - 2az + b} dz$$

$$= (c_1 + c_2) \cdot l(z - \zeta_1) + c_2 \cdot l \frac{z - \zeta_2}{z - \zeta_1}$$

$$= \alpha \cdot l(z - a - \sqrt{a^2 - b}) + \left(\frac{1}{2} \alpha - \frac{a\alpha - \beta}{2\sqrt{a^2 - b}}\right) \cdot l \frac{z - a + \sqrt{a^2 - b}}{z - a - \sqrt{a^2 - b}}.$$

Man wird natürlich stets diejenige Form wählen, welche dem jedesmal vorliegenden Zweck der Integration am meisten entspricht, namentlich also die Form (2), wenn $a^2 - b > 0$, die Form (3) oder (4), wenn $a^2 - b < 0$ ist — vorausgesetzt, dass man **reelle** Constanten zu erhalten wünscht.

Von den besondern Fällen, welche in unserm Integral enthalten sind, verdient noch derjenige herausgehoben zu werden, in welchem $\alpha = 0$, $\beta = -1$ ist. Man erhält durch Substitution dieser Werthe in die allgemeinen Ausdrücke:

$$(6)\qquad \int \frac{dz}{z^2-2az+b}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\cdot l\,\frac{z-a-\sqrt{a^2-b}}{z-a+\sqrt{a^2-b}}=\frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\cdot \operatorname{arc\,tng}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}.$$

U. A. folgt aus (6), wenn man $(-a\cos\alpha)$ für a und a^2 für b setzt:

$$(7)\qquad \int_0^\infty \frac{dz}{z^2+2az\cos\alpha+a^2}=\frac{\alpha}{a\sin\alpha},\quad (-\pi<\alpha<+\pi),$$

und vermittelst einer andern Substitution:

$$(8)\qquad \int_0^{a\sin\alpha} \frac{dz}{z^2-2az\sin\alpha+a^2}=\frac{\alpha}{a\cos\alpha}.$$

Anmerkung.

Man kann, um das Integral auszuwerthen, auch in der folgenden Weise verfahren.

Es ist:

$$\frac{\alpha z-\beta}{z^2-2az+b}=\frac{\alpha z-\beta}{(z-a)^2+(b-a^2)}=\frac{\alpha(z-a)+(a\alpha-\beta)}{(z-a)^2+\left(\sqrt{b-a^2}\right)^2}.$$

Setzt man also

$$z-a=u\cdot\sqrt{b-a^2},\quad dz=du\cdot\sqrt{b-a^2},$$

so folgt:

$$\int \frac{\alpha z-\beta}{z^2-2az+b}\,dz$$

$$=\int \frac{\alpha u\sqrt{b-a^2}+(a\alpha-\beta)}{u^2\cdot\left(\sqrt{b-a^2}\right)^2+\left(\sqrt{b-a^2}\right)^2}\,du\cdot\sqrt{b-a^2}$$

$$=\alpha\cdot\int\frac{u\,du}{u^2+1}\qquad+\frac{a\alpha-\beta}{\sqrt{b-a^2}}\cdot\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\cdot\int\frac{d(u^2+1)}{u^2+1}+\frac{a\alpha-\beta}{\sqrt{b-a^2}}\cdot\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\cdot l(u^2+1)\qquad+\frac{a\alpha-\beta}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tng}u$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\cdot l\frac{z^2-2az+b}{\left(\sqrt{b-a^2}\right)^2}+\frac{a\alpha-\beta}{\sqrt{b-a^2}}\cdot\operatorname{arc\,tng}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\cdot$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\cdot l(z^2-2az+b)+\frac{a\alpha-\beta}{\sqrt{b-a^2}}\cdot\operatorname{arctng}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}-\frac{1}{2}\alpha\cdot l(b-a^2),$$

wo man den letzten constanten Summanden weglassen darf.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass der in (1) erhaltene Ausdruck der Grenzwerth des in (2) dargestellten ist, wenn b sich dem Grenzwerthe a^2 nähert.

Denn dann ist:

$$\lim_{b=a^2}\cdot\frac{1}{2}\alpha\, l(z^2-2az+b)$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\cdot l(z^2-2az+a^2)=\frac{1}{2}\alpha\cdot l(z-a)^2=\alpha\cdot l(z-a)$$

und, indem wir $\sqrt{a^2-b}=w$ setzen und nach § 83 I verfahren:

$$\lim_{b=a^2}\cdot\frac{a\alpha-\beta}{2\sqrt{a^2-b}}\cdot l\frac{z-a-\sqrt{a^2-b}}{z-a+\sqrt{a^2-b}}$$

$$=\frac{a\alpha-\beta}{2}\cdot\lim_{w=0}\cdot\frac{l(z-a-w)-l(z-a+w)}{w}$$

$$=\frac{a\alpha-\beta}{2}\cdot\lim_{w=0}\cdot\frac{-\frac{1}{z-a-w}-\frac{1}{z-a+w}}{1}$$

$$=\frac{a\alpha-\beta}{2}\cdot\left(-\frac{2}{z-a}\right)=-\frac{a\alpha-\beta}{z-a},$$

§ 89.

Auswerthung

der Integrale $\int_0^z \frac{x^{m-1}}{x^n-1}dx$, $\int_0^z \frac{x^{m-1}}{x^n+1}dx$ für $0 < m \overline{\overline{<}} n$.

I.

In dem Beispiel I des § 86 ist zunächst gefunden worden

$$n \cdot \frac{x^{m-1}}{x^n-1} = \sum \frac{e^{ik\frac{2\pi m}{n}}}{x - e^{ik\frac{2\pi}{n}}}, \quad \left(-\frac{n}{2} < k \overline{\overline{<}} + \frac{n}{2}\right).$$

Die Integration nach x zwischen den Grenzen 0 und z ergiebt sofort:

$$(1)\quad n \cdot \int_0^z \frac{x^{m-1}}{x^n-1} dx = \sum e^{ik\frac{2\pi m}{n}} \cdot l\left(1 - z e^{-ik\frac{2\pi}{n}}\right), \quad \left(-\frac{n}{2} < k \overline{\overline{<}} + \frac{n}{2}\right);$$

wobei aber in dem Integrationsintervall $(0, z)$ nicht $x^n = +1$ werden darf.

Fasst man andrerseits auf der rechten Seite je zwei Summanden zusammen, deren k sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, so fallen, wie schon dort gezeigt ist, die i heraus, und es kommt wesentlich auf die Integration von Brüchen an, welche die Form

$$\frac{2x\cos\left(k\frac{2\pi m}{n}\right) - 2\cos\left(k\frac{2\pi(m-1)}{n}\right)}{x^2 - 2x \cdot \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + 1}$$

haben.

Nach § 88, (4) ist aber, wenn man dort

$$\alpha = 2\cos\left(k\frac{2\pi m}{n}\right), \quad \beta = 2\cos\left(k\frac{2\pi(m-1)}{n}\right), \quad a = \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right), \quad b = 1$$

setzt und

$$a\alpha-\beta=2\left[\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(k\frac{2\pi m}{n}\right)-\cos\left(k\frac{2\pi(m-1)}{n}\right)\right]$$

$$=-2\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right)\sin\left(k\frac{2\pi m}{n}\right),$$

$$\sqrt{b-a^2}=\sqrt{1-\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)^2}=\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right)$$

berechnet:

$$\int_0^z\frac{2x\cos\left(k\frac{2\pi m}{n}\right)-2\cos\left(k\frac{2\pi(m-1)}{n}\right)}{x^2-2x\cdot\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)+1}dx$$

$$=\cos\left(k\frac{2\pi m}{n}\right)\cdot l\left[z^2-2z\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)+1\right]$$

$$-2\sin\left(k\frac{2\pi m}{n}\right)\cdot\operatorname{arc\,tng}\frac{z\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right)}{1-z\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)}.\ ^{1)}$$

Ausserdem ist:

$$\int_0^z\frac{dx}{x-1}=l(1-z),\quad\int_0^z\frac{dx}{x+1}=l(1+z).$$

Daher ist das nur mit **reellen** Constanten versehene Resultat der Integration folgendes:

---

[1]) Anstatt dieses Arcus ergiebt die angezogene Formel zunächst:

$$\operatorname{arc\,tng}\frac{z-\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right)}+\operatorname{arc\,tng}\left[\cot\left(k\frac{2\pi}{n}\right)\right].$$

Daraus folgt das Obige nach der Formel

$$\operatorname{arc\,tng}\alpha+\operatorname{arc\,tng}\beta=\operatorname{arc\,tng}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\cdot\beta}.$$

(2) $$n \cdot \int_0^z \frac{x^{m-1}}{x^n - 1} dx$$
$$= l\,(1-z) + \sum \cos\left(k \frac{2\pi m}{n}\right) \cdot l\left[z^2 - 2z\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + 1\right]$$
$$- 2 \sum \sin\left(k\frac{2\pi m}{n}\right) \cdot \operatorname{arc\,tng} \frac{z \sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right)}{1 - z\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)};$$

wo für k alle zwischen 0 und $\frac{n}{2}$ liegenden ganzen Zahlen zu setzen sind, und im Falle eines **graden** n noch der Summand
$$(-1)^m \cdot l\,(1+z)$$
hinzuzufügen ist.

II.

In dem Beispiel II des § 86 sind zwei Entwickelungsformen von
$$\frac{z^{m-1}}{z^n + 1}$$
gegeben. Integrirt man die erste zwischen 0 und einem beliebigen positiven z, so folgt:

(3) $$n \cdot \int_0^z \frac{x^{m-1}}{x^n + 1} dx$$
$$= - \sum e^{i(2k+1)\frac{m\pi}{n}} \cdot l\,(1 - z\, e^{-i(2k+1)\frac{\pi}{n}}),\ \left(-\frac{n+1}{2} < k \overline{\gtrless} \frac{n-1}{2}\right).$$

Die Integration der zweiten ergiebt:

(4) $$n \cdot \int_0^z \frac{x^{m-1}}{x^n + 1} dx$$
$$= - \sum \cos \frac{(2k+1)\pi m}{n} \cdot l\,(z^2 - 2z\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + 1)$$
$$+ 2 \cdot \sum \sin \frac{(2k+1)\pi m}{n} \cdot \operatorname{arc\,tng} \frac{z \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}}{1 - z\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}},$$

wo für $(2k+1)$ alle zwischen 0 und n liegenden ungraden Zahlen zu setzen sind, und, falls n selbst **ungrade** ist, auf der rechten Seite noch der Summand

$$(-1)^{m-1} \cdot l(z+1)$$

hinzugefügt werden muss.

Unser Integral nähert sich bei unendlich wachsendem z einem endlichen Grenzwerth, wie man vermittelst des Kriteriums § 49, (6) sofort erkennt; denn man kann positive p bestimmen, bei welchen

$$\lim_{x=\infty} \cdot \frac{x^{m-1}}{x^n+1} \cdot x^{1+p} = \lim_{x=\infty} \cdot \frac{x^{p+m-n}}{1+\frac{1}{x^n}}$$

einen endlichen Werth hat. — Z. B. ist dieser $=1$ für $p=(n-m)$.

Wir wollen noch den fraglichen Grenzwerth des Integrals ableiten. Zu dem Zwecke constatiren wir zunächst, dass die linken Seiten von (3) und (4) auch in der Form

$$\int_0^{z^n} \frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{x+1} dx$$

geschrieben werden können. Denn führt man dort ein:

$$x^n = u, \quad x = u^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} \cdot u^{\frac{1}{n}-1} du,$$

so folgt:

$$n \cdot \int_0^z \frac{x^{m-1}}{x^n+1} dx = n \cdot \int_0^{z^n} \frac{u^{\frac{m-1}{n}}}{u+1} \cdot \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du = \int_0^{z^n} \frac{u^{\frac{m}{n}-1}}{u+1} du.^{1)}$$

Mithin darf man bei der Ermittelung des Grenzwerthes des Integrals für ein unendlich wachsendes z die Zahl n als ein

[1]) Desgl. können die linken Seiten von (1) und (2) auch in der Form

$$\int_0^{z^n} \frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{x-1} dx$$

geschrieben werden.

Vielfaches von 4 annehmen; denn es hängt, weil z^n zugleich mit z unendlich wächst, der Grenzwerth der linken Seite von (3) und (4), d. i.

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{x+1}\,dx,$$

nur von dem Quotienten $\frac{m}{n}$ ab.

Nehmen wir also n als ein Vielfaches von 4, dagegen m vorläufig als ungrade Zahl an und fassen in der ersten Summe auf der rechten Seite der Gleichung (4) je zwei Summanden zusammen, welche gleich weit von den Enden abstehn, so erhalten wir — indem jetzt r irgend eine ungrade Zahl bedeutet — lauter Paare von der Form

$$-\cos\frac{r\pi m}{n}\cdot l\left(z^2-2z\cdot\cos\frac{r\pi}{n}+1\right)$$

$$-\cos\frac{(n-r)\pi m}{n}\cdot l\left(z^2-2z\cos\frac{(n-r)\pi}{n}+1\right)$$

$$=-\cos\frac{r\pi m}{n}\cdot l\left(z^2-2z\cdot\cos\frac{r\pi}{n}+1\right)$$

$$-\cos\left(m\pi-\frac{r\pi m}{n}\right)\cdot l\left(z^2-2z\cos\left(\pi-\frac{r\pi}{n}\right)+1\right)$$

$$=+\cos\frac{r\pi m}{n}\cdot l\,\frac{z^2+2z\cos\frac{r\pi}{n}+1}{z^2-2z\cos\frac{r\pi}{n}+1}$$

$$=+\cos\frac{r\pi m}{n}\cdot l\,\frac{1+\frac{2}{z}\cos\frac{r\pi}{n}+\frac{1}{z^2}}{1-\frac{2}{z}\cos\frac{r\pi}{n}+\frac{1}{z^2}}.$$

Der Grenzwerth bei unendlich wachsendem z ist $=0$, weil $l\,1=0$ ist. Mithin hat die ganze erste Summe den Grenzwerth 0.

Was die zweite Summe betrifft, so ist

$$\lim_{z=\infty} \cdot \operatorname{arc\,tng} \frac{z \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}}{1 - z \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}}$$

$$= \lim_{z=\infty} \cdot \operatorname{arc\,tng} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{n}}{\frac{1}{z} - \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}} = \operatorname{arc\,tng}\left(- \operatorname{tng} \frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$$

$$= \pi - \frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

Durch die Substitution ergiebt sich:

$$n \cdot \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{x^n+1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{x+1} dx$$

$$= 2 \cdot \left\{ \left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) \sin \frac{\pi m}{n} + \left(\pi - \frac{3\pi}{n}\right) \sin \frac{3\pi m}{n} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \left(\pi - \frac{(n-1)\pi}{n}\right) \sin \frac{(n-1)\pi m}{n} \right\}.$$

Die hier erhaltene Reihe lässt sich aber u. A. auf folgende Weise summiren:

Als geometrische Reihe ist:

$$e^{ix} + e^{i3x} + e^{i5x} + \cdots + e^{i(n-1)x} = e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{i2x} - 1} = e^{i\frac{n}{2}x} \cdot \frac{e^{i\frac{n}{2}x} - e^{-i\frac{n}{2}x}}{e^{ix} - e^{-ix}}$$

$$= e^{i\frac{n}{2}x} \cdot \frac{\sin \frac{n}{2} x}{\sin x},$$

mithin, wenn man noch beiderseits mit e^{inx} dividirt:

$$e^{-i(n-1)x} + e^{-i(n-3)x} + \cdots + e^{-i1x} = e^{-i\frac{n}{2}x} \cdot \frac{\sin \frac{n}{2} x}{\sin x},$$

$$\cos(n-1)x + \cos(n-3)x + \cdots + \cos 1x = \frac{\cos \frac{n}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin x} = \frac{\sin nx}{2 \sin x}.$$

Differentiirt man die letzte Gleichung nach x, so folgt nach Umkehrung der Vorzeichen:

$$(n-1)\sin(n-1)x+(n-3)\sin(n-3)x+\cdots+1.\sin x$$

$$=\frac{\sin nx\cos x-n\cos nx\sin x}{2\sin x^2},$$

also für $x=\frac{\pi m}{n}$ unter Berücksichtigung der Relation $\sin(m\pi-\alpha)$ $=-(-1)^m\sin\alpha$:

$$-(-1)^m\cdot\Big\{(n-1)\sin\frac{\pi m}{n}+(n-3)\sin\frac{3\pi m}{n}+\cdots$$

$$\cdots+(n-(n-1))\sin\frac{(n-1)\pi m}{n}\Big\}=-(-1)^m\cdot\frac{n}{2\sin\frac{\pi m}{n}},$$

$$\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)\sin\frac{\pi m}{n}+\left(\pi-\frac{3\pi}{n}\right)\sin\frac{3\pi m}{n}+\cdots$$

$$\cdots+\left(\pi-\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi m}{n}=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi m}{n}}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in den oben für die Integrale gefundenen Ausdruck erhält man:

$$(5)\qquad n\cdot\int_0^\infty\frac{x^{m-1}}{x^n+1}dx=\int_0^\infty\frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{x+1}dx=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi m}{n}},\quad(0<m<n);$$

und wenn man $\frac{m}{n}=\mu$ schreibt:

$$(6)\qquad \int_0^\infty\frac{x^{\mu-1}}{x+1}dx=\frac{\pi}{\sin\pi\mu},\ (0<\mu<1).$$

Dies ist freilich bis jetzt nur für den Fall bewiesen, dass der Zähler von μ ungrade und der Nenner von μ ein Vielfaches von 4 ist. Um das Resultat von dieser Beschränkung frei zu machen, kann man entweder in analoger Weise, wie oben, die übrigen

Fälle durchgehn oder sich der folgenden kürzeren Schlussweise bedienen, welche auch den Vorzug hat, gleichzeitig die Gültigkeit der Gleichung (6) für irrationale μ festzustellen.

Es ist bereits oben bewiesen worden, dass die Function

$$f(\mu)=\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{x+1}dx$$

für $0<\mu<1$ einen bestimmten endlichen Werth hat.

Differentiirt man unter Anwendung von § 33 nach μ, so erhält man ausserdem eine völlig bestimmte Derivirte

$$f'(\mu)=\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,lx}{x+1}dx,$$

wie die in § 49 und in § 50 aufgestellten Kriterien auf der Stelle erkennen lassen; denn es ist

$$\lim_{x=\infty}\cdot\frac{x^{\mu-1}\,lx}{x+1}\cdot x^{1+p}=\lim_{x=\infty}\cdot\frac{x^{p+\mu-1}\cdot lx}{1+\frac{1}{x}}=0 \text{ für } 0<p<1-\mu$$

und

$$\lim_{x=0}\cdot\frac{x^{\mu-1}\,lx}{x+1}\cdot x^{1-p}=\lim_{x=0}\cdot\frac{x^{\mu-p}\cdot lx}{x+1}=0 \text{ für } 0<p<\mu.$$

Daher ist $f(\mu)$ eine stetige Function von μ. Und weil $\frac{\pi}{\sin\pi\mu}$ ebenfalls stetig ist, so gilt dies auch von der Differenz

$$f(\mu)-\frac{\mu}{\sin\pi\mu}=\varepsilon,$$

Dieselbe ist, wie oben bewiesen worden, $=0$ für alle Werthe von μ, welche die Form

$$\frac{2k+1}{4k_1}$$

haben. Und da man jedes μ beliebig genau durch Brüche von dieser Form ausdrücken kann, so würde die Differenz ε unstetig sein, wenn sie nicht für jedes μ den Werth 0 hätte.

Mithin gilt die Gleichung (6) für jedes rationale oder irrationale μ zwischen 0 und 1, die Gleichung (5) aber für alle $0 < m < n$; wie es behauptet wurde.

Aus (6) lässt sich durch Differentiation und Integration nach μ eine grosse Reihe anderer Integralwerthe ableiten; z. B. durch Differentiation:

$$(7) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1} l x}{x+1} = -\pi^2 \cdot \frac{\cos \pi\mu}{\sin^2 \pi\mu},$$

$$(8) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}(l x)^2}{x+1} = +2 \cdot \frac{\pi^3}{\sin^3 \pi\mu} - \frac{\pi^3}{\sin \pi\mu}$$

$$= 2 \cdot \left[\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{x+1} dx\right]^3 - \pi^2 \cdot \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{x+1} dx;$$

durch Integration zwischen $\frac{1}{2}$ und μ:

$$(9) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1} - x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1) l x} dx = l \operatorname{tng} \frac{\pi\mu}{2}, \quad (0 < \mu < 1).$$

— Man wird (9) leicht durch Differentiation verificiren.

Es sei noch erwähnt, dass die Gleichung (6) durch die Substitution von $x = \operatorname{tng} \omega$ in die folgende übergeht:

$$(10) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tng} \omega^{2\mu-1} d\omega = \frac{\pi}{2 \sin \pi\mu}, \quad (0 < \mu < 1).$$

§ 90.

Reductionsformeln für die Integrale von der Form $\int x^m (x-a)^n dx$.

Alle Formeln, welche complicirtere Integrale auf einfacher auszuwerthende oder bereits bekannte Integrale zurückführen, heissen Reductionsformeln. Sie sind meistens Anwendungen der aus § 28 bekannten allgemeinen Reductionsformel

$$\int u v dx = u\int v dx - \int\left[\frac{du}{dx}\int v dx\right] dx$$

auf besondere Functionen.

Diejenigen, welche wir hier entwickeln wollen, können u. a. dazu benutzt werden, um die Zerlegung gebrochener Functionen in Partialbrüche zu umgehn, wie unten an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Nach der oben citirten Formel ist, wenn wir $u = (x - a)^n$, $v = x^m$ setzen oder dem u und dem v die umgekehrte Bedeutung geben:

$$(1)\quad \int x^m (x-a)^n dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}(x-a)^n - \frac{n}{m+1}\cdot\int x^{m+1}(x-a)^{n-1} dx,$$

$$(2)\quad \int x^m (x-a)^n dx = \frac{1}{n+1} x^m (x-a)^{n+1} - \frac{m}{n+1}\cdot\int x^{m-1}(x-a)^{n+1} dx.$$

Durch diese beiden Formeln (1) und (2) wird der eine Exponent um 1 erhöht, der andere erniedrigt.

Substituirt man auf der rechten Seite von (1):

$$\int x^{m+1}(x-a)^{n-1} dx = \int x^m\left[(x-a)+a\right](x-a)^{n-1} dx$$

$$= \int x^m (x-a)^n dx + a\int x^m (x-a)^{n-1} dx$$

und fasst die gleichen Integrale zusammen, so erhält man die nächstfolgende Relation. Die zweitfolgende entsteht, wenn man in (2)

$$\int x^{m-1}(x-a)^{n+1} dx = \int x^m (x-a)^n dx - a\int x^{m-1}(x-a)^n dx$$

einsetzt. Sie lauten:

$$(3)\qquad \int x^m (x-a)^n dx$$

$$= \frac{1}{m+n+1}\cdot x^{m+1}(x-a)^n - \frac{na}{m+n+1}\cdot\int x^m (x-a)^{n-1} dx,$$

$$(4)\qquad \int x^m (x-a)^n dx$$

$$= \frac{1}{m+n+1}\cdot x^m (x-a)^{n+1} + \frac{ma}{m+n+1}\cdot\int x^{m-1}(x-a)^n dx.$$

Durch (3) und (4) wird der **eine** Exponent um 1 **erniedrigt,** während der andere ungeändert bleibt.

Bestimmt man aus den Gleichungen (3) und (4) die rechts stehenden Integrale und schreibt $(n+1)$ für n, beziehungsweise $(m+1)$ für m, so folgt:

(5) $$\int x^m (x-a)^n dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)a} \cdot x^{m+1}(x-a)^{n+1} - \frac{m+n+2}{(n+1)a} \cdot \int x^m (x-a)^{n+1} dx,$$

(6) $$\int x^m (x-a)^n dx$$

$$= -\frac{1}{(m+1)a} \cdot x^{m+1}(x-a)^{n+1} + \frac{m+n+2}{(m+1)a} \cdot \int x^{m+1}(x-a)^n dx.$$

Durch (5) und (6) wird der **eine** Exponent um 1 **erhöht,** während der andere ungeändert bleibt.

Beispiel I.

Um das Integral

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int x^3 (x-1)^{-2} dx,$$

in welchem $m=3$, $n=-2$ ist, auszuwerthen, kann man zunächst die Formel (2) anwenden. Das ergiebt:

$$\int x^3 (x-1)^{-2} dx = -x^3 (x-1)^{-1} + 3 \cdot \int x^2 (x-1)^{-1} dx.$$

Dieselbe Formel auf das rechts erhaltene Integral von neuem anzuwenden, ist nicht möglich, weil in ihm $n=-1$ ist, und in (2) nicht $(n+1)=0$ sein darf. Man kann aber jetzt die Formel (4) benutzen, um m zu erniedrigen. Das giebt:

$$\int x^2 (x-1)^{-1} dx = \frac{1}{2} x^2 + \int x^1 (x-1)^{-1} dx,$$

$$\int x^1 (x-1)^{-1} dx = x + \int x^0 (x-1)^{-1} dx = x + l(x-1).$$

Durch die Substitution folgt sofort:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = -\frac{x^3}{x-1} + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 3l(x-1).$$

Will man das Integral ohne Benutzung unserer Reductionsformeln auswerthen, so muss man zunächst die Zerlegung

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}$$

bewerkstelligen und dann gliedweise integriren. Dadurch erhält man:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{x-1} + 3 \cdot l(x-1);$$

was mit dem obigen Resultat bis auf eine Constante übereinstimmt.

Beispiel II.

Das Integral

$$\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$$

kann man reduciren, indem man zunächst

$$x^2 = u, \quad x = u^{\frac{1}{2}}, \quad dx = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$$

setzt und dann die Formel (4) anwendet. Es ergiebt sich:

$$\int \frac{x^4}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int u^{\frac{3}{2}} (u+1)^{-1} du$$

$$= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} (u+1)^{-1} du$$

$$= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \left[2u^{\frac{1}{2}} - \int u^{-\frac{1}{2}} (u+1)^{-1} du \right]$$

$$= \frac{1}{3} x^3 - x + \int \frac{dx}{x^2+1}.$$

Daher:

$$\int \frac{x^4 dx}{x^2+1} = \frac{1}{3}x^3 - x + \operatorname{arc\,tng} x.$$

Beispiel III.

Für das Integral

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$$

erhält man durch die Substitution

$$x^2 = u, \quad x = u^{\frac{1}{2}}, \quad dx = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$$

vermittelst der Formel (6):

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}} (u+1)^{-1} du = \frac{1}{2} \cdot \left\{ -2u^{-\frac{1}{2}} - \int u^{-\frac{1}{2}} (u+1)^{-1} du \right\}$$

$$= -\frac{1}{x} - \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arc\,tng} x.$$

§ 91.

Reductionsformeln für die Integrale von der Form $\int x^m (x^2 - 2ax + b)^n dx$.

Die partielle Integration ergiebt u. a.:

$$\int x^m (x^2 - 2ax + b)^n dx$$

$$= (x^2 - 2ax + b)^n \int x^m dx - \int \left[\frac{d \cdot (x^2 - 2ax + b)^n}{dx} \int x^m dx \right] dx$$

$$= \frac{1}{m+1} x^{m+1} (x^2 - 2ax + b)^n - \frac{2n}{m+1} \cdot \int x^{m+1} (x-a)(x^2 - 2ax + b)^{n-1} dx$$

d. i.:

$$\int x^m (x^2 - 2ax + b)^n dx$$

$$= \frac{1}{m+1} \cdot x^{m+1} (x^2 - 2ax + b)^n + \frac{2na}{m+1} \cdot \int x^{m+1} (x^2 - 2ax + b)^{n-1} dx$$

$$- \frac{2n}{m+1} \cdot \int x^{m+2} (x^2 - 2ax + b)^{n-1} dx,$$

oder wenn man

(1) $$x^2 - 2ax + b = X$$

setzt:

(2) $$\int x^m X^n dx$$

$$= \frac{1}{m+1} x^{m+1} X^n + \frac{2na}{m+1} \cdot \int x^{m+1} X^{n-1} dx - \frac{2n}{m+1} \cdot \int x^{m+2} X^{n-1} dx.$$

Durch diese Formel wird m erhöht, n um 1 erniedrigt.

Substituirt man auf der linken Seite

$$X^n = x^2 X^{n-1} - 2a \cdot x X^{n-1} + b X^{n-1}$$

und schreibt dann $(n+1)$ für n, so ergiebt sich durch das Zusammenziehn derjenigen Glieder, welche gleiche Integrale enthalten:

(3) $$\int x^m X^n dx = \frac{1}{(m+1)b} x^{m+1} X^{n+1}$$

$$+ \frac{2(m+n+2)a}{(m+1)b} \cdot \int x^{m+1} X^n dx - \frac{m+2n+3}{(m+1)b} \cdot \int x^{m+2} X^n dx.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung das letzte Integral der rechten Seite und schreibt $(m-2)$ für m, so folgt:

(4) $$\int x^m X^n dx = \frac{1}{m+2n+1} x^{m-1} X^{n+1}$$

$$+ \frac{2(m+n)a}{m+2n+1} \cdot \int x^{m-1} X^n dx - \frac{(m-1)b}{m+2n+1} \cdot \int x^{m-2} X^n dx.$$

In den Formeln (3) und (4) bleibt n ungeändert, während m erhöht, beziehungsweise erniedrigt wird.

Durch die Anwendung der Formel (4) auf das letzte Integral in (2) ergiebt sich für dasselbe:

$$\int x^{m+2} X^{n-1} dx = \frac{1}{m+2n+1} x^{m+1} X^{n}$$
$$+ \frac{2(m+n+1)a}{m+2n+1} \cdot \int x^{m+1} X^{n-1} dx - \frac{(m+1)b}{m+2n+1} \int x^{m} X^{n-1} dx;$$

mithin aus (2) durch die Substitution dieses Werthes:

$$(5) \qquad \int x^{m} X^{n} dx = \frac{1}{m+2n+1} x^{m+1} X^{n}$$
$$+ \frac{2nb}{m+2n+1} \cdot \int x^{m} X^{n-1} dx - \frac{2na}{m+2n+1} \cdot \int x^{m+1} X^{n-1} dx,$$

was eine zweite Formel ist — ausser (2) — um n zu erniedrigen, nur dass hier die Exponenten von x weniger differiren, als in (2).

Um zu Formeln zu gelangen, in denen sich n erhöht, gehen wir von der Transformation

$$\int x^{m+1} X^{n} dx = \int x^{m} \left[(x-a) + a\right] X^{n} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int x^{m} X^{n} dx + a \int x^{m} X^{n} dx$$

aus, welche durch die Anwendung der partiellen Integration auf das erste Integral der rechten Seite und die Versetzung des zweiten auf die linke Seite ergiebt:

$$\int x^{m+1} X^{n} dx - a \cdot \int x^{m} X^{n} dx = \frac{1}{2(n+1)} x^{m} X^{n+1} - \frac{m}{2(n+1)} \cdot \int x^{m-1} X^{n+1} dx.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung

$$a \cdot \int x^{m+1} X^{n} dx - b \cdot \int x^{m} X^{n} dx$$
$$= \frac{1}{2(n+1)} x^{m+1} X^{n+1} - \frac{m+2n+3}{2(n+1)} \cdot \int x^{m} X^{n+1} dx,$$

welche ersichtlich aus (5) durch die Substitution von $(n+1)$ für n

folgt, eliminiren wir zunächst das Integral $\int x^{m+1} X^n dx$, dann das Integral $\int x^m X^n dx$. Die erste Operation ergiebt:

$$(6) \int x^m X^n dx = \frac{(x-a) x^m X^{n+1}}{2(n+1)(a^2-b)} - \frac{m+2n+3}{2(n+1)(a^2-b)} \cdot \int x^m X^{n+1} dx$$

$$+ \frac{ma}{2(n+1)(a^2-b)} \cdot \int x^{m-1} X^{n+1} dx,$$

die zweite:

$$\int x^{m+1} X^n dx = \frac{(ax-b) x^m X^{n+1}}{2(n+1)(a^2-b)} - \frac{(m+2n+3)a}{2(n+1)(a^2-b)} \cdot \int x^m X^{n+1} dx$$

$$+ \frac{mb}{2(n+1)(a^2-b)} \cdot \int x^{m-1} X^{n+1} dx$$

oder, wenn man noch m durch $(m-1)$ ersetzt:

$$(7) \int x^m X^n dx = \frac{(ax-b) x^{m-1} X^{n+1}}{2(n+1)(a^2-b)} - \frac{(m+2n+2)a}{2(n+1)(a^2-b)} \cdot \int x^{m-1} X^{n+1} dx$$

$$+ \frac{(m-1)b}{2(n+1)(a^2-b)} \cdot \int x^{m-2} X^{n+1} dx.$$

Durch die Formeln (6) und (7) wird n erhöht, m erniedrigt.

Aus (6) folgt für $m = 0$ die ziemlich einfache Relation:

$$(8) \quad \int X^n dx = \frac{(x-a) X^{n+1}}{2(n+1)(a^2-b)} - \frac{2n+3}{2(n+1)(a^2-b)} \cdot \int X^{n+1} dx,$$

in welcher sich n um 1 erhöht.

Löst man diese Gleichung für das rechts stehende Integral auf und schreibt $(n-1)$ für n, so ergiebt sich:

$$(9) \quad \int X^n dx = \frac{(x-a) X^n}{2n+1} - \frac{2n(a^2-b)}{2n+1} \cdot \int X^{n-1} dx.$$

Diese Relation erniedrigt n um 1.

Beispiel I.

Wendet man, um das Integral

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 2ax + b)^3}$$

auszuwerthen, die Formel (6) an, so ist $m = 0$ und $n = -3$, mithin:

$$\int \frac{dx}{X^3} = -\frac{x-a}{4(a^2-b)\cdot X^2} - \frac{3}{4(a^2-b)} \cdot \int \frac{dx}{X^2};$$

und nach derselben Formel für $n = -2$:

$$\int \frac{dx}{X^2} = -\frac{x-a}{2(a^2-b)\cdot X} - \frac{1}{2(a^2-b)} \cdot \int \frac{dx}{X}.$$

Daher ist:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 2ax + b)^3}$$

$$= -\frac{x-a}{4(a^2-b)(x^2-2ax+b)^2} + \frac{3(x-a)}{8(a^2-b)^2(x^2-2ax+b)}$$

$$+ \frac{3}{8(a^2-b)^2} \cdot \int \frac{dx}{x^2-2ax+b},$$

wo man nur noch den Werth des letzten Integrals aus § 88 einzusetzen hat.

Beispiel II.

Zur Reduction des Integrals

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2-2ax+b)^2},$$

in welchem $m = -2$ und $n = -2$ ist, benutzen wir zunächst die Formel (6). Sie ergiebt:

$$\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{x-a}{2(a^2-b)x^2X} - \frac{3}{2(a^2-b)} \cdot \int \frac{dx}{x^2X} + \frac{a}{a^2-b} \cdot \int \frac{dx}{x^3X}.$$

Auf die beiden Integrale der rechten Seite wenden wir die Formel (3) an und erhalten:

$$\int\frac{dx}{x^3X}=-\frac{1}{2bx^2}+\frac{2a}{b}\cdot\int\frac{dx}{x^2X}-\frac{1}{b}\cdot\int\frac{dx}{xX};$$

$$\int\frac{dx}{x^2X}=-\frac{1}{bx}+\frac{2a}{b}\cdot\int\frac{dx}{xX}-\frac{1}{b}\cdot\int\frac{dx}{X}.$$

Durch die Substitution dieser Werthe ergiebt sich zunächst:

$$\int\frac{dx}{x^2X^2}=-\frac{(4a^2-3b)x^2-(8a^2-7b)ax+2b(a^2-b)}{2b^2(a^2-b)xX}$$

$$+\frac{4a}{b^2}\cdot\int\frac{dx}{xX}-\frac{4a^2-3b}{2b^2(a^2-b)}\cdot\int\frac{dx}{X}.$$

Und hieraus folgt, weil

$$\int\frac{dx}{xX}=\frac{1}{b}\cdot\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{b}\cdot\int\frac{x-2a}{X}dx=\frac{1}{b}\,lx-\frac{1}{b}\int\frac{x-2a}{X}dx$$

ist:

$$\int\frac{dx}{x^2X^2}=-\frac{(4a^2-3b)x^2-(8a^2-7b)ax+2b(a^2-b)}{2b^2(a^2-b)x\cdot X}$$

$$+\frac{4a}{b^3}\cdot lx-\frac{1}{2b^3(a^2-b)}\cdot\int\frac{8a(a^2-b)x-(16a^4-20a^2b+3b^2)}{X}dx,$$

wo man für das letzte Integral nur noch den aus § 88 bekannten Werth zu setzen hat.

Anmerkung.

In manchen Fällen ist es nützlich, **vor** der Anwendung der Reductionsformeln (2) bis (7) auf das Integral

$$\int x^m(x^2-2ax+b)^n dx$$

eine andere Integrationsvariable

$$z=x^{-1}$$

einzuführen.

Man erhält nämlich

$$(10)\qquad \int x^m(x^2-2ax+b)^n dx$$

$$=-b^n\cdot\int z^{-(m+2n+2)}\cdot(z^2-2\alpha z+\beta)^n dz,\ \left(z=\frac{1}{x},\ \alpha=\frac{a}{b},\ \beta=\frac{1}{b}\right),$$

wo der Exponent von z einen positiven Werth hat, wenn m und n negativ sind.

In unserm Beispiel II entsteht hierdurch:

$$\int\frac{dx}{x^2X^2}=-\frac{1}{b^2}\cdot\int\frac{z^4}{(z^2-2\alpha z+\beta)^2}dz=-\frac{1}{b^2}\cdot\int\frac{z^4}{Z^2}dz.$$

Nun kann man nach (7) reduciren:

$$\int\frac{z^4}{Z^2}dz=-\frac{(\alpha z-\beta)z^3}{2(\alpha^2-\beta)\cdot Z}+\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta}\cdot\int\frac{z^3}{Z}dz-\frac{3\beta}{2(\alpha^2-\beta)}\cdot\int\frac{z^2}{Z}dz$$

und hierauf nach (4):

$$\int\frac{z^3}{Z}dz=\frac{1}{2}z^2+2\alpha\cdot\int\frac{z^2}{Z}dz-\beta\cdot\int\frac{z}{Z}dz,$$

$$\int\frac{z^2}{Z}dz=z+2\alpha\cdot\int\frac{z}{Z}dz-\beta\cdot\int\frac{dz}{Z},$$

so dass jetzt der ganze Ausdruck auf die in § 88 bestimmten Integrale zurückgeführt ist, und es nur noch der Substitution bedarf.

Capitel XIV.

Integration der irrationalen algebraischen Functionen.

§ 92.

Binomische Radicanden.

Enthält eine zu integrirende algebraische Function Wurzeln der Variabeln x, aber nicht Wurzeln aus Summen, deren Summanden von x abhängen, so lässt sich die Integration entweder ohne Weiteres nach bekannten Formeln ausführen, oder man kommt auf die im vorigen Capitel dargestellten, sicher wirkenden Methoden zurück, wenn man $x = y^n$ substituirt und unter n einen gemeinsamen Dividuus der vorkommenden Wurzelexponenten versteht. Denn dann wird die zu integrirende Function eine rationale Function von y.

Die Begründung dieser Behauptung ist so einfach, dass es einer generellen Erörterung nicht bedarf.

Wäre beispielsweise das Integral

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+1)} dx$$

auszuwerthen, so würde man nur $x = y^6$, $dx = 6y^5 dy$ einzuführen brauchen, um

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+1)} dx = 6 \cdot \int \frac{y}{y^3+1} dy$$

als rationale Function von y auszudrücken. Dies giebt nach den Lehren des vorigen Capitels:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+1)}dx = 2\cdot\left\{\int \frac{y+1}{y^2-y+1}\cdot dy - \int \frac{dy}{y+1}\right\}$$

$$= 2\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot l(y^2-y+1) + \sqrt{3}\cdot\operatorname{arctng}\frac{2y-1}{\sqrt{3}} - l(y+1)\right\}$$

$$= l\,\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1}{(\sqrt[6]{x}+1)^2} + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\operatorname{arc\,tng}\frac{2\cdot\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}}.$$

Ganz anders verhält sich die Sache, wenn die Radicanden Summen sind, deren Summanden theilweise von x abhängen. Dann lässt sich das Integral in vielen Fällen bei sonst ganz einfacher Gestalt des Integranden nicht mehr in geschlossener Form durch diejenigen Functionen ausdrücken, welche den 7 Rechnungsarten ihre Entstehung verdanken. — Beispielsweise ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+2}}$$

ein solches Integral.[1])

Jedoch kann man aus den irrationalen algebraischen Integranden einige Classen ausscheiden, welche sich durch eine geeignete Substitution auf rationale Integranden zurückführen und daher nach den Anweisungen des vorigen Capitels integriren lassen. Anderen Falls bleibt immer noch die Auswerthung des Integrals vermittelst unendlicher Reihen übrig.

Lehrsatz.

Bedeutet y entweder einen Ausdruck von der Form

$$y = \sqrt[n]{ax+b}$$

oder einen Ausdruck von der Form

---

[1]) Es gehört zu den sogenannten „elliptischen“.

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{a_1 x + b_1}},$$

endlich $f(x, y)$ irgend eine rationale algebraische Function der beiden Variabeln x und y, so verwandelt sich das Integral

$$\int f(x, y)\,dx$$

bei einem ganzen n in das Integral eines rationalen Differentials

$$\int \varphi(y)\,dy,$$

sobald man y als Integrationsvariable einführt, und lässt sich — auch wenn n eine gebrochene Zahl ist — **in geschlossener Form durch die Elementarfunctionen**[1]) auswerthen.

Um dies für den Fall zu beweisen, dass

$$y = \sqrt[n]{ax + b}$$

ist, braucht man nur darauf aufmerksam zu machen, dass bei dieser Voraussetzung

$$ax + b = y^n, \quad x = \frac{y^n - b}{a}, \quad dx = \frac{n}{a} y^{n-1} dy;$$

$$\int f(x, y)\,dx = \frac{n}{a} \cdot \int y^{n-1} \cdot f\left[\frac{y^n - b}{a}, y\right] dy$$

hervorgeht, was bei einem ganzen n das Integral eines rationalen Differentials nach y ist.

Hat man ferner

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{a_1 x + b_1}},$$

[1]) d. i. durch solche Functionen, in welchen Summen, Producte, Quotienten, Potenzen, Wurzeln und Logarithmen (incl. Arcus) der Variabeln durch die 7 Rechnungsarten in einer endlichen Anzahl von Combinationen verbunden sind.

so ist:

$$\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=y^n,\quad x=\frac{b_1y^n-b}{a-a_1y^n},\quad dx=n(ab_1-a_1b)\cdot\frac{y^{n-1}}{(a-a_1y^n)^2}dy;$$

$$\int f(x,y)\,dx=n(ab_1-a_1b)\cdot\int y^{n-1}\cdot f\left[\frac{b_1y^n-b}{a-a_1y^n},y\right]\cdot\frac{dy}{(a-a_1y^n)^2},$$

was bei einem ganzen n wieder das Integral eines rationalen Differentials nach y ist.

In beiden Fällen geht daher

$$\int f(x,y)\,dx$$

in die Form

$$\int \varphi(y^n,y)\,dy$$

über, wo $\varphi(y^n, y)$ eine rationale Function von y^n und y bedeutet.

Ist endlich noch n keine ganze Zahl, sondern eine gebrochene:

$$n=\frac{m}{r},$$

so kann man

$$y=u^r,\quad dy=ru^{r-1}du,\quad y^n=u^{rn}=u^m$$

setzen und erhält:

$$\int f(x,y)dx=\int\varphi(y^n,y)dy=r\int u^{r-1}\varphi(u^m,u^r)\,du=r\int\psi(u)\,du,$$

wo $\psi(u)$ eine rationale Function von u ist und sich deshalb nach den Anweisungen des vorigen Capitels bloss durch die Elementarfunctionen in endlicher Form integriren lässt.

Hiermit ist unser Lehrsatz in allen Theilen bewiesen.

Anmerkung.

Im Grunde sind die Differentiale von der Form

$$f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}\right)dx$$

nicht von denjenigen wesentlich verschieden, welche die Form $f\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ haben. Denn setzt man

$$\frac{ax+b}{a_1x+b_1} = Au + B,$$

wo A und B zwei willkürliche Constanten — ausgenommen $A=0$ — bedeuten, so wird

$$x = -\frac{b_1Au + b_1B - b}{a_1Au + a_1B - a},$$

weshalb das vorgelegte Differential in die Form

$$f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}\right)dx = \int \varphi\left(u, \sqrt[n]{Au+B}\right)du$$

übergeführt werden kann.

§ 93.

Besondere Fälle bei binomischen Radicanden.

Anstatt von vorne herein das Differential des Integrals $\int f(x, y)\,dx$ durch die Einführung von y als Integrationsvariable rational zu machen, empfiehlt es sich unter Umständen, zuvor die Reductionsformeln des § 90 anzuwenden, falls es sich in der dort betrachteten Form $\int x^m(x-a)^n dx$ darstellt oder durch die Substitution einer neuen Variabeln auf diese Form gebracht werden kann.

Hierher gehören namentlich alle Integrale von der Form

$$\int u^{\mu}(\alpha u^k - \beta)^{\nu} du.$$

Substituirt man in ihnen

$$u^k = x, \quad u = x^{\frac{1}{k}}, \quad du = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} dx,$$

so folgt:

(1) $$\int u^{\mu}(\alpha u^k - \beta)^{\nu} du = \frac{\alpha^{\nu}}{k} \cdot \int x^{\frac{\mu+1-k}{k}} \left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu} dx$$

$$= \frac{\alpha^{\nu}}{k} \cdot \int x^m (x-a)^n dx,$$

indem

$$m = \frac{\mu + 1 + k}{k}, \quad n = \nu, \quad a = \frac{\beta}{\alpha}$$

genommen wird.

Beispiel I.

Aus § 90, (4) folgt:

(2) $$\int \frac{x^m}{\sqrt[n]{x-a}} dx = \int x^m (x-a)^{-\frac{1}{n}} dx$$

$$= \frac{n}{n(m+1)-1} \frac{x^m(x-a)}{\sqrt[n]{x-a}} + \frac{nma}{n(m+1)-1} \cdot \int \frac{x^{m-1}}{\sqrt[n]{x-a}} dx.$$

Daher lässt sich das Integral, wenn m eine ganze positive Zahl ist, durch wiederholte Anwendung dieser Formel auf das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x-a}} = \int (x-a)^{-\frac{1}{n}} dx = \frac{n}{n-1} (x-a)^{\frac{n-1}{n}}$$

zurückführen, welchen Werth der Wurzelexponent n ausser

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}$$

auch haben mag.

Z. B. ergiebt sich:

$$(3)\qquad \int \frac{x^2}{\sqrt[n]{x-a}}\,dx$$

$$= \frac{n}{3n-1}\cdot\frac{x^2(x-a)}{\sqrt[n]{x-a}} + \frac{2na}{3n-1}\cdot\int\frac{x}{\sqrt[n]{x-a}}\,dx$$

$$= \frac{n}{3n-1}\cdot\frac{x^2(x-a)}{\sqrt[n]{x-a}} + \frac{2na}{3n-1}\cdot\left[\frac{n}{2n-1}\cdot\frac{x(x-a)}{\sqrt[n]{x-a}} + \frac{na}{2n-1}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x-a}}\right]$$

$$= \frac{n}{3n-1}\cdot\frac{x^2(x-a)}{\sqrt[n]{x-a}} + \frac{2n^2a}{(3n-1)(2n-1)}\cdot\frac{x(x-a)}{\sqrt[n]{x-a}}$$

$$+ \frac{2n^3a^2}{(3n-1)(2n-1)(n-1)}\cdot\frac{x-a}{\sqrt[n]{x-a}}$$

$$= \left[\frac{nx^2}{3n-1} + \frac{2n^2ax}{(3n-1)(2n-1)} + \frac{2n^3a^2}{(3n-1)(2n-1)(n-1)}\right]\cdot\frac{x-a}{\sqrt[n]{x-a}}.$$

Der Ausnahmefall, dass n unter den Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m+1}$ enthalten sei, gehört übrigens nicht hierher, weil dann das Differential nicht irrational ist.

Beispiel II.

Aus § 90, (6) folgt:

$$(4)\int\frac{dx}{x^m\sqrt[n]{x-a}} = \int x^{-m}(x-a)^{-\frac{1}{n}}\,dx$$

$$= \frac{1}{(m-1)a}\cdot\frac{x-a}{x^{m-1}\sqrt[n]{x-a}} + \frac{n(m-2)+1}{n(m-1)a}\cdot\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt[n]{x-a}}.$$

Durch diese Formel wird das Integral, wenn m eine ganze positive Zahl ist, allmählich auf das Integral

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[n]{x-a}}$$

zurückgeführt, welches man vermittelst der Substitution

$$\sqrt[n]{x-a}=y, \quad x=y^n+a, \quad dx=ny^{n-1}dy$$

auf die Form

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[n]{x-a}}=n\cdot\int \frac{y^{n-2}}{y^n+a}\,dy$$

bringen und alsdann nach den Formeln des § 89 integriren kann.

Z. B. ergiebt sich:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-a}}=2\int \frac{dy}{y^2+a}$$

und hieraus, wenn man noch

$$y=u\sqrt{a}, \quad dy=du\cdot\sqrt{a}$$

substituirt:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-a}}=\frac{2}{\sqrt{a}}\cdot\int \frac{du}{u^2+1}=\frac{2}{\sqrt{a}}\cdot \operatorname{arc\,tng} u=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\operatorname{arc\,cos}\frac{1-u^2}{1+u^2},\text{[1]}$$

$$(5)\int \frac{dx}{x\sqrt{x-a}}=\frac{2}{\sqrt{a}}\cdot\operatorname{arc\,tng}\sqrt{\frac{x-a}{a}}+C=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\operatorname{arc\,cos}\frac{2a-x}{x}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\cdot l\,\frac{\sqrt{-a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{-a}+\sqrt{x-a}}+C'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\cdot l\,\frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{-a}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{-a}}+C''$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\cdot l\cdot\left(\frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{-a}}{\sqrt{x}}\right)^2+C''.$$

---

[1]) Es ist

$$\cos 2\varphi=\frac{1-\operatorname{tng}\varphi^2}{1+\operatorname{tng}\varphi^2}.$$

Beispiel III.

Auf das zuletzt ausgewerthete Integral

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-a}}$$

lassen sich vermittelst der Formeln des § 90 **alle Integrale von der Form**

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{(x-a)^n}} = \int x^{-m}(x-a)^{-\frac{n}{2}} dx$$

reduciren, sobald m eine ganze positive und n eine ungrade positive oder negative Zahl ist, da man m und $\frac{n}{2}$ beliebig oft um 1 verkleinern und vergrössern kann.

Z. B. ergiebt sich durch § 90, (5):

$$(6) \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{(x-a)^n}} = -\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-a}} - \frac{1}{a} \cdot \int \frac{dx}{x\sqrt{x-a}};$$

und vermittelst § 90, (3):

$$(7) \qquad \int \frac{\sqrt{x-a}}{x} dx = 2 \cdot \sqrt{x-a} - a \cdot \int \frac{dx}{x\sqrt{x-a}}.$$

§ 94.

Trinomische Radicanden.

Verstehn wir jetzt unter

$$f\left(x, \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right)$$

eine algebraische, rational aus x und $\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$ zusammengesetzte Function, so lässt sich dieselbe, weil

$$\sqrt{\mathrm{a}x^2+2\beta x+\gamma}$$

$$=\sqrt{\alpha\left(x+\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha}\right)},$$

(1) $$\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\left(\alpha x+\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\right)\cdot\sqrt{\frac{\alpha x+\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha x+\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}}$$

ist, auch rational aus

$$x \text{ und } \sqrt{\frac{\alpha x+\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha x+\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}}=y$$

zusammensetzen. Sie ist daher nach dem Lehrsatz des § 92 vermittelst der Elementarfunctionen in endlicher Form integrirbar, da man nur y zur Integrationsvariabeln zu machen braucht, um ein rationales Differential zu erhalten.

Es folgt:

(2) $$\alpha x+\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}=\frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{y^2-1},$$

mithin durch Substitution in (1):

$$\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{2\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{y^2-1}\cdot y=2\cdot\sqrt{\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{\alpha}}\cdot\frac{y}{y^2-1},$$

eine Relation, welche zugleich über den Sinn der (mehrdeutigen) Wurzeln entscheidet. Ferner ergiebt sich aus (2) durch Differentiation:

$$\alpha\cdot dx=-4\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\cdot\frac{y\,dy}{(y^2-1)^2}.$$

Es gilt mithin der

Lehrsatz I.

Ist $f\left(x, \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right)$ eine algebraische, rational aus x und $\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$ zusammengesetzte Function, so lässt sich dieselbe stets in geschlossener Form vermittelst der Elementarfunctionen integriren. Man gelangt zum Zweck, wenn man die Quadratwurzel aus dem Quotienten der linearen Factoren des Radicanden zur Integrationsvariabeln macht,[1]) also etwa

$$(3) \qquad y = \sqrt{\frac{\alpha x + \beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha x + \beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha x + \beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)}}{\alpha x + \beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}$$

als Mittelfunction einführt. Dadurch wird:

$$(4) \qquad x = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} + \frac{2\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha(y^2 - 1)},$$

$$(5) \qquad \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} = 2 \cdot \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{y}{y^2 - 1},$$

welche Relation zugleich über den Sinn der Wurzeln $\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}$ und $\sqrt{\alpha}$ entscheidet, und:

$$(6) \qquad dx = -\frac{4}{\alpha} \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} \cdot \frac{y\,dy}{(y^2 - 1)^2},$$

endlich:

---

[1]) Die beiden linearen Factoren werden hierbei selbstverständlich als von einander, d. i.: $\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}$ als von Null verschieden vorausgesetzt, da das Differential sonst nicht irrational wäre.

$$(7) \qquad \int f\left(x, \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right) dx = -\frac{4}{\alpha} \cdot \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}$$

$$\int f\left(\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} + \frac{2\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha(y^2 - 1)}, \frac{2\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{y}{y^2 - 1}\right) \cdot \frac{y\,dy}{(y^2 - 1)^2}.$$

Dieses Integral lässt sich nach den Anweisungen über die Behandlung der rationalen Differentiale auswerthen. (Vergl. das vor. Cap.)

Man kann übrigens auch andere Substitutionen für x anwenden, um das Differential in (7) rational zu machen. Es genügt dazu, dass x und $\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$ gleichzeitig rationale Functionen der neuen Variabeln werden. Wir wollen noch einige von den am häufigsten citirten Substitutionsformen durchgehn und die verschiedenen Formen der leichteren Uebersicht wegen äusserlich dadurch unterscheiden, dass wir die neuen Integrationsvariabeln bei den verschiedenen Substitutionsformen durch verschiedene Buchstaben bezeichnen.

Eine zweite Substitutionsform.

Setzt man

$$(8) \qquad \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} = (z - x)\sqrt{\alpha},$$

wo wir die Wahl zwischen den beiden Werthen von $\sqrt{\alpha}$ offen lassen, so ergiebt sich durch die Quadrirung von (8):

$$2\beta x + \gamma = \alpha z^2 - 2\alpha z x,$$

mithin:

$$(9) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha z^2 - \gamma}{2(\alpha z + \beta)}, \\ \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} = \dfrac{\alpha z^2 + 2\beta z + \gamma}{2(\alpha z + \beta)} \cdot \sqrt{\alpha}, \\ dx = \dfrac{\alpha z^2 + 2\beta z + \gamma}{2 \cdot (\alpha z + \beta)^2} \cdot \alpha\,dz. \end{cases}$$

Eine dritte Substitutionsform.

Substituirt man

$$(10)\qquad \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} = ux - \sqrt{\gamma},$$

so folgt, wenn man quadrirt und dann durch x dividirt:

$$\alpha x + 2\beta = u^2 x - 2u\sqrt{\gamma},$$

mithin:

$$(11)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{2u\cdot\sqrt{\gamma} + 2\beta}{u^2 - \alpha}, \\ \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} = \dfrac{u^2\cdot\sqrt{\gamma} + 2\beta u + \alpha\sqrt{\gamma}}{u^2 - \alpha}, \\ dx = -2\cdot\dfrac{u^2\cdot\sqrt{\gamma} + 2\beta u + \alpha\sqrt{\gamma}}{(u^2 - \alpha)^2}\,du. \end{cases}$$

Die allgemeine Form der neuen Integrationsvariablen lässt sich in folgender Weise charakterisiren:

Lehrsatz II.

Soll das Differential $f\left(x, \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right)dx$ durch die Substitution einer neuen Variabeln rational werden, so muss irgend eine Potenz v der letzteren die Form

$$(12)\qquad v = \frac{ax + b + \sqrt{(ax+b)^2 + (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)}}{a_1 x + b_1}$$

haben, indem die Constanten der Substitution den Gleichungen

$$(13)\qquad \begin{cases} a^2 + a_1 a_2 = \alpha, \\ 2ab + a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2\beta, \\ b^2 + b_1 b_2 = \gamma \end{cases}$$

genügen. Dies ist, falls unter den drei willkürlichen Constanten nur nicht $a_1 = b_1 = 0$ angenommen wird, nothwendig und ausreichend.

Beweis. Quadrirt man die mit (12) äquivalente Gleichung

$$v - \frac{ax+b}{a_1x+b_1} = \sqrt{\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^2 + \frac{a_2x+b_2}{a_1x+b_1}},$$

so folgt:

$$v^2 - 2v \cdot \frac{ax+b}{a_1x+b_1} = \frac{a_2x+b_2}{a_1x+b_1},$$

(14)
$$x = -\frac{b_1v^2 - 2bv - b_2}{a_1v^2 - 2av - a_2},$$

$$dx = +2 \cdot \frac{(ab_1 - a_1b)v^2 + (a_2b_1 - a_1b_2)v + (ab_2 - a_2b)}{(a_1v^2 - 2av - a_2)^2}dv,$$

$$\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} = -\frac{(ab_1 - a_1b)v^2 + (a_2b_1 - a_1b_2)v + (ab_2 - a_2b)}{a_1v^2 - 2av - a_2}.$$

Hiermit ist bewiesen, dass das Differential für die Integrationsvariable v rational wird, welche aber nur dann einen Sinn hat, wenn nicht $a_1 = b_1 = 0$ ist.

Umgekehrt giebt (14) die einfachste rationale Substitution für x an, durch welche sich die neue Variable v so einführen lässt, dass x und $\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$ rationale Functionen von ihr werden. Namentlich geschieht dies durch keine Substitution, welche v nur in der ersten Potenz enthält, weil dann in (14) $a_1 = b_1 = 0$ wäre, was der Gleichung (12) widerspricht, welche aus (14) vermittelst der unerlässlichen Bedingungsgleichungen (13) folgt.

Mithin enthalten die Formeln (12) und (14) — unter der Beschränkung, dass nicht $a_1 = b_1 = 0$ angenommen werde — in der That in einfachster Form die sämmtlichen Mannichfaltigkeiten der Substitutionen, welche unser Differential rational machen.

§ 95.

Auswerthung des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$.

Aus den Gleichungen (5) und (6) des vorigen § ergiebt sich sofort:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = -\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \cdot \int \frac{dy}{y^2 - 1}$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \int \left[\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1}\right] dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot l \frac{y+1}{y-1}$$

d. i.:

(1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot l \frac{\sqrt{\alpha x + \beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}} + \sqrt{\alpha x + \beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}}{\sqrt{\alpha x + \beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}} - \sqrt{\alpha x + \beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\alpha}} \cdot \operatorname{arc\,tng} \sqrt{\frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} - \beta - \alpha x}{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} + \beta + \alpha x}} + C.$$

Die hier aufgestellte zweite Form ergiebt sich aus der ersten unmittelbar nach § 64, (10).

Die Vorzeichen der Wurzeln sind so gewählt, dass man die Wurzelgrössen, wenn sie reell sind, sämmtlich als positiv auffassen darf. In jedem andern Fall muss man die Zweideutigkeit der Quadratwurzeln in besondere Erwägung nehmen.

Selbstverständlich setzen wir voraus, dass nicht $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$ sei, da sonst das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha\left(x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}\gamma + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{dx}{x + \frac{\beta}{\alpha}}$$

ein rationales Differential hätte.

Die beiden Ausdrücke, welche (1) für das Integral giebt, sind in Folge der Eigenschaften der Logarithmen und Arcus einer grossen Reihe von Verwandlungen fähig; und es kann von Nutzen sein, die andern Formen wenigstens theilweise vor Augen zu haben.

Erweitert man z. B. den Numerus durch seinen Zähler, so nimmt der Logarithmus die Gestalt an:

$$l\,\frac{2(\alpha x+\beta)+2\sqrt{(\alpha x+\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma})(\alpha x+\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma})}}{2\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}$$

$$=l\left(\alpha x+\beta+\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)-l\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma},$$

und man erhält, weil man den letzten constanten Logarithmus in die Integrationsconstante aufnehmen darf:

$$(2)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot l\left(\alpha x+\beta+\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)+C$$

Transformirt man ferner den Arcus nach der Formel

$$2\cdot \text{arc tng}\,u=\text{arc tng}\,\frac{2u}{1-u^2},$$

welche mit der Formel

$$\text{tng}\,2\varphi=\frac{2\,\text{tng}\,\varphi}{1-\text{tng}\,\varphi^2}$$

identisch ist, so folgt:

$$2\cdot\text{arc tng}\sqrt{\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}-\beta-\alpha x}{\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}+\beta+\alpha x}}=\text{arc tng}\,\frac{2\sqrt{-\alpha}\cdot\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}{2(\beta+\alpha x)},$$

mithin:

$$(3)\quad \int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}=\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\cdot\text{arc tng}\,\frac{\sqrt{-\alpha}\cdot\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}{\alpha x+\beta}+C.$$

Transformirt man aber den Arcus in (1) nach der Formel

$$2\cdot\text{arc tng}\,u=\text{arc sin}\,\frac{2u}{1+u^2},$$

welche mit der Formel

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tng} \varphi}{1 + \operatorname{tng} \varphi^2}$$

identisch ist, so folgt:

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2\beta x + \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{-\alpha} \cdot \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}} + C.$$

Noch einfacher wird das Integrationsresultat, wenn man den Arcus in (1) nach der Formel

$$2 \cdot \operatorname{arc\,tng} u = \arccos \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

transformirt, welche mit der Formel

$$\cos 2\varphi = \frac{1 - \operatorname{tng} \varphi^2}{1 + \operatorname{tng} \varphi^2}$$

identisch ist. Es folgt:

$$(5) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \cdot \arccos \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}} + C.$$

Und dies ist die einfachste Form, unter welcher unser Integral dargestellt werden kann.

Wendet man zum Zwecke der Auswerthung unseres Integrals die zweite Substitutionsform an, welche in den Formeln (8) und (9) des vorigen § ihren Ausdruck findet, setzt also

$$\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} = (z - x)\sqrt{\alpha},$$

so wird:

$$z = x + \frac{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\alpha x + \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}{\alpha}$$

und durch Substitution aus (9):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \int \frac{\alpha dz}{\alpha z + \beta} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot l(\alpha z + \beta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot l\left(\alpha x + \beta + \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right),$$

was ohne Transformation mit der Formel (2) dieses § übereinstimmt.

Diese Substitutionsform

$$\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} = (z - x)\sqrt{\alpha},$$

welche bezweckt, dass das für x quadratische Glied αx^2 nach dem Quadriren wegfällt, dürfte die bequemste sein, um dem Integralausdruck im Falle eines **positiven** α sofort ohne weitere Transformation reelle Coefficienten zu ertheilen.

Im Falle eines **negativen** α erreicht man, sobald γ positiv ist, denselben Zweck durch die dritte Substitutionsform

$$\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} = ux - \sqrt{\gamma},$$

auf welche sich die Formeln (10) und (11) des vorigen § beziehn.

Aus ihr folgt:

$$u = \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}{x},$$

und unter Rücksicht auf (11):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = -2\int \frac{du}{u^2 - \alpha},$$

mithin, wenn man noch

$$u = v\sqrt{-\alpha}, \quad du = dv \cdot \sqrt{-\alpha}$$

einführt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = +\frac{2}{\sqrt{-\alpha}} \cdot \int \frac{dv}{v^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}} \cdot \operatorname{arc\,tng} v,$$

d. i.:

$$(6)\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}} \cdot \operatorname{arc\,tng} \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}{x \cdot \sqrt{-\alpha}} + C.$$

Der kürzeste Weg zur Auswerthung des Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$$

dürfte der folgende sein.

Die beiden Werthe von x, für welche der Radicand $= 0$ wird, sind:

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}.$$

Wir führen eine neue Variable w dadurch ein, dass wir

$$(7) \quad \begin{cases} x = \dfrac{-\beta + w \cdot \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}, \\ w = \dfrac{\alpha x + \beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}} \end{cases}$$

setzen — also die Annullirung des Radicanden für $w = +1$ bewirken — und erhalten:

$$\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{-\alpha}(1 - w^2)},$$

$$dx = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} \cdot dw,$$

mithin:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \cdot \int \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \arccos w + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \cdot \frac{1}{i}\, l\left(w + i\sqrt{1 - w^2}\right) + C,$$

d. i. nach (7):

$$(8) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \cdot \arccos \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot l \frac{\alpha x + \beta + \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot l\left(\alpha x + \beta + \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right) + C';$$

was mit (5) und (2) übereinstimmt.

Besondere Fälle.

(9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

(10) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = l\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C, \ldots (2)$$

(11) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C, \ldots (2)$$

(12) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+b)}} = l\left(2x+b+2\sqrt{x(x+b)}\right)+C \ldots (2)$$

$$= l\frac{\sqrt{x+b}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+b}-\sqrt{x}}+C, \ldots (1)$$

(13) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x(b-x)}} = \arccos\left(1-\frac{2x}{b}\right)+C \ldots (8)$$

(14) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \arccos(-1)-\arccos(+1)=\pi.$$

§ 96.

Integrale von der Form $\int x^\mu \left(\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)^\nu dx$.

Anstatt das Differential vermittelst der Substitution neuer Variabeln rational zu machen (§ 94), kann man auch vermittelst der Formeln des § 91 die Reduction auf das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}$$

vornehmen. Es bedarf dazu nur der einfachen Transformation:

(1) $$\int x^\mu \left(\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)^\nu dx = \alpha^{\frac{\nu}{2}} \cdot \int x^\mu \left(x^2+2\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{\nu}{2}} dx,$$

nach welcher man

(2) $$\mu = m, \quad \frac{\beta}{\alpha} = -a, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = b, \quad \frac{\nu}{2} = n$$

zu setzen hat.

Mehrfach gelangt man hierbei zu dem Integral

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}.$$

Für dieses ergiebt sich, wenn man

$$x = \frac{1}{y}, \quad dx = -\frac{dy}{y^2}$$

einführt:

(3) $$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{\gamma y^2 + 2\beta y + \alpha}},$$

so dass man nur noch die Formeln des vorigen § zur Substitution zu benutzen braucht.

Beispiel I.

Aus (1) und (2) folgt vermittelst der Reductionsformel (9) des § 91:

(4) $$\int \left(\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right)^\nu dx$$

$$= \frac{(\alpha x + \beta)\left(\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right)^\nu}{(\nu+1)\alpha} - \frac{\nu(\beta^2 - \alpha\gamma)}{(\nu+1)\alpha} \cdot \int \left(\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right)^{\nu-2} dx.$$

Diese Relation lehrt, jedes Integral von der Form

$$\int \left(\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right)^\nu dx,$$

falls ν eine ungrade **positive** Zahl bedeutet, auf

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$$

zu reduciren, wo dann nur noch aus § 95 substituirt zu werden braucht.

Z. B. ergiebt sich:

$$\int\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\cdot dx$$

$$=\frac{(\alpha x+\beta)\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}{2\alpha}-\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{2\alpha}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}},$$

$$\int\left(\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)^3 dx$$

$$=\frac{(\alpha x+\beta)\left(\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)^3}{4\alpha}-\frac{3(\beta^2-\alpha\gamma)}{4\alpha}\cdot\int\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\cdot dx$$

$$=\frac{(\alpha x+\beta)\left(\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)^3}{4\alpha}-\frac{3(\beta^2-\alpha\gamma)(\alpha x+\beta)\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}{8\alpha^2}$$

$$+\frac{3(\beta^2-\alpha\gamma)^2}{8\alpha^2}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}.$$

Beispiel II.

Kehrt man die Formel (4) unter Erhöhung von ν auf $(\nu+2)$ um, so folgt:

$$\int\left(\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)^\nu dx=\frac{(\alpha x+\beta)\left(\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)^{\nu+2}}{(\nu+2)(\beta^2-\alpha\gamma)}$$

$$-\frac{(\nu+3)\alpha}{(\nu+2)(\beta^2-\alpha\gamma)}\cdot\int\left(\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)^{\nu+2}dx.$$

Verwandelt man nun noch ν in $(-\nu)$, so ergiebt sich:

$$(5)\int\frac{dx}{\left(\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)^\nu}=-\frac{\alpha x+\beta}{(\nu-2)(\beta^2-\alpha\gamma)\left(\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)^{\nu-2}}$$

$$-\frac{(\nu-3)\alpha}{(\nu-2)(\beta^2-\alpha\gamma)}\cdot\int\frac{dx}{\left(\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\right)^{\nu-2}}.$$

Diese Relation lehrt u. a., jedes Integral von der Form

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right)^\nu},$$

falls ν eine ungrade **positive** Zahl ausser 1 bedeutet, **direct ohne Recursion auf**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$$

auszuwerthen, da der letzte Summand in (5) für $\nu = 3$ verschwindet.

Das Integral ist also eine irrationale **algebraische** Function, nämlich:

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right)^3}$$

$$= - \frac{\alpha x + \beta}{(\beta^2 - \alpha\gamma)\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}},$$

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right)^5}$$

$$= - \frac{\alpha x + \beta}{3(\beta^2 - \alpha\gamma)\left(\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x y + \gamma}\right)^3} - \frac{2\alpha}{3(\beta^2 - \alpha\gamma)} \cdot \int \frac{dx}{\left(\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right)^3}$$

$$= - \left\{ \frac{1}{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} - \frac{2\alpha}{\beta^2 - \alpha\gamma} \right\} \cdot \frac{\alpha x + \beta}{3(\beta^2 - \alpha\gamma)\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}};$$

u. s. w.

Beispiel III.

Es ist:

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \int x^m \left(x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Substituirt man demnach in § 91, (4) $a = -\frac{\beta}{\alpha}$, $b = \frac{\gamma}{\alpha}$, $n = -\frac{1}{2}$, so folgt:

$$(6) \qquad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$$

$$= \frac{x^{m-1}\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}{m\alpha} - \frac{(2m-1)\beta}{m\alpha} \cdot \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$$

$$- \frac{(m-1)\gamma}{m\alpha} \cdot \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}.$$

Durch die wiederholte Anwendung dieser Relation reducirt sich das vorgelegte Integral, falls m eine **ganze positive** Zahl ist, stets auf

$$p \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}},$$

wo der Coefficient p auch $= 0$ sein kann. Ist $\beta = 0$ oder $\gamma = 0$, so bleibt rechts nur ein Integral übrig, was die Rechnung sehr erleichtert.

Im Besondern ist:

$$(7) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}},$$

$$(8) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \gamma}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha x^2 + \gamma},$$

$$(9) \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{m} x^{m-1}\sqrt{1 - x^2} + \frac{m-1}{m} \cdot \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Wegen der Wichtigkeit des letzten Integrals wollen wir es durch wiederholte Anwendung der Recursionsformel (9) völlig auswerthen.

Man erhält, wenn jetzt μ eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet:

(10) $$\int \frac{x^{2\mu}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left\{\frac{x^{2\mu-1}}{2\mu} + \frac{(2\mu-1)x^{2\mu-3}}{2\mu\cdot(2\mu-2)} + \cdots + \frac{(2\mu-1)\cdot(2\mu-3)\cdots 3\cdot x^1}{2\mu\cdot(2\mu-2)\cdots 4\cdot 2}\right\}\sqrt{1-x^2}$$

$$+ \frac{(2\mu-1)\cdot(2\mu-3)\cdots 3\cdot 1}{2\mu\cdot(2\mu-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot \arcsin x + C$$

(11) $$\int \frac{x^{2\mu+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left\{\begin{matrix} \dfrac{x^{2\mu}}{2\mu+1} + \dfrac{2\mu\cdot x^{2\mu-2}}{(2\mu+1)\cdot(2\mu-1)} + \cdots \\ \cdots + \dfrac{2\mu\cdot(2\mu-2)\cdots 2\cdot x^0}{(2\mu+1)\cdot(2\mu-1)\cdots 3\cdot 1} \end{matrix}\right\}\sqrt{1-x^2} + C.$$

Daher ist u. a.:

(12) $$\int_0^1 \frac{x^{2\mu}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2\mu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots\ 2\mu}\cdot\frac{\pi}{2},$$

(13) $$\int_0^1 \frac{x^{2\mu+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots\ 2\mu}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots(2\mu+1)}.$$

Anmerkung.

In denjenigen Fällen, welche wir hier nicht besonders behandelt haben, gelangt man stets zu den unter I oder II besprochenen Integralen durch Reduction nach § 91, (3) oder § 91 (4). Jedoch sind auch die andern Reductionsformeln jenes § je nach der Lage der Sache von Nutzen. Sind in dem Integrale

$$\int x^\mu \left(\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\right)^\nu dx$$

μ und ν keine ganzen Zahlen, so lässt es sich im Allgemeinen nicht in geschlossener Form durch lauter Elementarfunctionen auswerthen.

Ein strenger Beweis für die Stichhaltigkeit dieser Behauptung ist allerdings bis jetzt noch nicht erbracht, sondern es steht eigentlich nur fest, dass das Differential nicht generell rational gemacht werden kann (was wir in § 94 bewiesen haben), und dass man bis jetzt keine Methode der endlichen Entwickelung durch Elementarfunctionen gefunden hat.

§ 97.

Integrale von der Form $\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})\,dx$.

Lehrsatz.

Jedes Integral

$$\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})\,dx,$$

dessen Integrand $f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})$ eine rationale algebraische Function von $x, \sqrt{ax+b}$ und $\sqrt{\alpha x+\beta}$ ist, lässt sich in geschlossener Form durch die Elementarfunctionen darstellen.

Man reducirt es auf die in § 94 behandelten Integrale dadurch, dass man die eine von den Quadratwurzeln als neue Variable einführt.

Setzt man nämlich

$$\sqrt{ax+b} = u$$

und demnach

$$x = \frac{u^2 - b}{a}, \quad dx = \frac{2}{a} u\,du, \quad \sqrt{\alpha x+\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\alpha u^2 + (a\beta - \alpha b)},$$

so folgt:

$$\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{\alpha x+\beta})\,dx$$

$$= \frac{2}{a} \cdot \int f\left(\frac{u^2 - b}{a}, \ u, \ \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\alpha u^2 + (a\beta - \alpha b)}\right) u\,du;$$

was das Integral einer rationalen Function von u und $\sqrt{\alpha u^2 + (a\beta - \alpha b)}$ ist. Dasselbe lässt sich nach denjenigen Methoden auswerthen, welche wir in den vorigen §§ besprochen haben.

§ 98.

Beispiele für die Entwickelung der Integrale von algebraischen Differentialen durch unendliche Reihen.

In § 72 L. II ist dasjenige Kriterium für die Entwickelungsfähigkeit einer Function nach steigenden Potenzen der Variablen aufgestellt, bei welchem die Kenntniss des Restes nicht verlangt wird, sondern nur die Kenntniss derjenigen Werthe der Variablen, für welche die Function aufhört, monogen oder endlich bestimmt zu sein.

Die algebraischen Functionen lassen sich in Bezug hierauf verhältnissmässig leicht beurtheilen, da nur diejenigen Werthe der Variablen kritisch sind, für welche eine Wurzel oder ein Nenner verschwindet. Ist die Entwickelung des Differentials in eine Potenzreihe ausgeführt, so darf man (nach § 75 oder § 59) gliedweise integriren, so lange der Integrationsweg das Feld des Convergenzkreises oder unter gewissen Umständen dessen Peripherie nicht überschreitet.

Hieraus erhellt aber auch, dass man gemeinhin nur das bestimmte und nicht das unbestimmte Integral durch eine Potenzreihe darstellen kann.

Beispiel I.

Um zunächst ein Integral von bereits bekanntem Werthe nach dieser Methode zu behandeln, erinnern wir daran, dass in § 89, (6)

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi\mu}, \quad (0 < \mu < 1)$$

gefunden ist.

Nun lässt sich das Differential dieses Integrals zwar nicht für alle Werthe von x innerhalb des Integrationsintervalls in eine Potenzreihe entwickeln, es ist aber

$$\int_0^x \frac{x^{\mu-1}}{1+x}\,dx = \int_0^x dx \cdot \{x^{\mu-1} - x^{\mu} + x^{\mu+1} - x^{\mu+2} + \cdots\}$$

$$= \frac{x^{\mu}}{\mu} - \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + \frac{x^{\mu+2}}{\mu+2} - \frac{x^{\mu+3}}{\mu+3} + \cdots,$$

so lange x den Werth 1 nicht übersteigt. Daher hat man für $x=1$:

$$\int_0^1 \frac{x^{\mu-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+1} + \frac{1}{\mu+2} - \frac{1}{\mu+3} + \cdots$$

Ferner lässt sich das vorgelegte Integral in folgender Weise zerlegen:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1}}{1+x}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x}\,dx;$$

und das zweite Integral auf der rechten Seite geht, wenn man $x=u^{-1}$, $dx=-u^{-2}du$ einführt, über in

$$-\int_1^0 \frac{u^{-\mu+1}}{1+u^{-1}}\cdot u^{-2}\,du = +\int_0^1 \frac{u^{-\mu}}{1+u}\,du = +\int_0^1 \frac{x^{-\mu}}{1+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{1-\mu} - \frac{1}{2-\mu} + \frac{1}{3-\mu} - \frac{1}{4-\mu} + \cdots$$

Mithin erhält man durch Summation der beiden für die Theilintegrale entwickelten Werthe:

$$(1)\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{x^{\mu-1}+x^{-\mu}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\pi\mu}$$

$$=\frac{1}{\mu}-\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{2+\mu}-\frac{1}{3+\mu}+\frac{1}{4+\mu}-\cdots$$

$$+\frac{1}{1-\mu}-\frac{1}{2-\mu}+\frac{1}{3-\mu}-\frac{1}{4-\mu}+\cdots$$

$$=\frac{1}{\mu}+2\mu\cdot\left\{\frac{1}{1^2-\mu^2}-\frac{1}{2^2-\mu^2}+\frac{1}{3^2-\mu^2}-\frac{1}{4^2-\mu^2}+\cdots\right\}.$$

Das Endresultat stimmt mit § 66, (16) überein.

Die dortige Entwickelung von $\frac{\pi}{\sin\pi\mu}$ galt für jedes μ, welches keine ganze Zahl ist. Daraus folgt aber nicht, dass nun in derselben Ausdehnung auch das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\pi\mu}$$

sei; denn damit die beiden Integrale, aus denen wir es zusammengesetzt haben, durch die unendlichen Reihen ausgedrückt werden, muss erstens $\mu>0$ und zweitens auch $(1-\mu)>0$, d. i. es muss $0<\mu<1$ sein. Auch ergiebt sich aus den bereits in § 89 ausgeführten Betrachtungen, dass das Integral (1) sonst keinen endlichen Werth hat.

Beispiel II.

Um das Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

in welchem $k^2<1$ sein soll, für $0<x\overline{\gtrless}1$ auszuwerthen, kann man u. A. so verfahren. Es ist

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\{1-k^2x^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}k^2\cdot\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\cdot\int_0^x \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\cdots,$$

wo man nur noch aus § 96, (10) zu substituiren braucht.

Im Besondern ergiebt sich [§ 96, (12)]:

(2)
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6+\cdots\right\}.$$

Beispiel III.

Das Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

ist unter den zuletzt besprochenen Integralen für $k = i$ enthalten. Es ergiebt sich daher u. a. nach (2):

(3)
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{2}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2+\cdots\right\}.$$

Vermittelst directer Entwickelung des Differentials nach dem binomischen Satze folgt:

$$(4)\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^9}{9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^{13}}{13} + \cdots$$

$$\{-1 \overline{\overline{<}} x \leqq +1\}$$

Wir wollen das Integral noch auf eine dritte Art entwickeln, indem wir

$$x = \operatorname{tng}\omega,\quad dx = \frac{d\omega}{\cos\omega^2},\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}$$

einführen. Dies giebt vermittelst derjenigen Entwickelung, welcher der letzte Ausdruck nach § 74, (12) fähig ist:

$$(5)\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left\{\sin\omega - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 5\omega}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin 9\omega}{9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\sin 13\omega}{13} + \cdots\right\}.$$

$$\left\{-\frac{\pi}{4} \overline{\overline{<}} \omega \leqq +\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Giebt man den oberen Grenzen die correspondirenden Werthe $x = 1$, $\omega = \frac{\pi}{4}$, so folgt aus (4) und aus (5) übereinstimmend:

$$(6)\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{13} + \cdots.$$

Für andere Werthe von x aber ergeben sich verschiedene Ausdrücke: Z. B. liefert (4) für $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$(7)\quad \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5\cdot 9^1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9\cdot 9^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{13\cdot 9^3} + \cdots\right\}$$

und (5) für $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\omega = \frac{\pi}{6}$:

(8) $$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{13} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{13} \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{2}{21} - \cdots \end{array} \right\}.$$

§ 99.

Die Productentwickelung des Eulerschen Integrals erster Gattung $(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} \cdot dx$ und einige Transformationen des letzteren.

Es ist bereits in § 50, II gezeigt worden, dass die Bedingungen $m > 0$, $n > 0$ ausreichend und nothwendig sind, damit das Integral einen endlichen, völlig bestimmten Werth habe. — Wir setzen voraus, dass sie erfüllt seien.

Dann ist nach § 90, (6), wenn man dort $a = -1$ setzt, $(-x)$ für x, $(m-1)$ für m und $(n-1)$ für n schreibt:

$$\int x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{m} x^m (1-x)^n + \frac{m+n}{m} \cdot \int x^m (1-x)^{n-1} dx.$$

Hieraus folgt, wenn man mit Legendre

(1) $$(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

bezeichnet, sofort die Transformationsformel:

(2) $$(m, n) = \frac{m+n}{m} \cdot (m+1, n),$$

welche für jedes positive m und n gilt.

Ausserdem ergiebt sich ohne Weiteres

$$(1, n) = \int_0^1 (1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{n},$$

$$(3) \qquad 1 = n \cdot (1, n).$$

Durch die r-malige Anwendung von (2) auf sich selbst und auf (3) erhält man:

$$(m, n) = \frac{m+n}{m} \cdot \frac{m+1+n}{m+1} \cdot \frac{m+2+n}{m+2} \cdots \frac{m+r+n}{m+r} \cdot (m+r+1, n),$$

$$1 = n \cdot \frac{1+n}{1} \cdot \frac{2+n}{2} \cdot \frac{3+n}{3} \cdots \frac{1+r+n}{1+r} \cdot (1+r+1, n);$$

mithin, wenn man noch mit der letzten Gleichung in die vorletzte dividirt:

$$(4) \qquad (m, n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1(m+n)}{m \cdot (n+1)} \cdot \frac{2(m+n+1)}{(m+1)(n+2)} \cdot \frac{3(m+n+2)}{(m+2)(n+3)} \cdots$$

$$\cdots \frac{(r+1)(m+n+r)}{(m+r)(n+r+1)} \cdot \frac{(m+r+1, n)}{(r+2, n)}.$$

Nun geht aber erstens aus der Definitionsgleichung (1) als unzweifelhaft hervor, dass der Werth des Integrals (m, n) stetig abnimmt, wenn der Exponent m stetig wächst, dass also der Werth von $(m+r+1, n)$ zwischen $(k+r+1, n)$ und $(k+r+2, n)$ gelegen sein muss, wenn m zwischen den ganzen Zahlen k und $(k+1)$ liegt. Und zweitens ergiebt sich aus (2):

$$(r+2, n)$$
$$= \left(1 + \frac{n}{r+2}\right) \cdot (r+3, n)$$

$$= \left(1 + \frac{n}{r+2}\right)\left(1 + \frac{n}{r+3}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{k+r+1}\right) \cdot (k+r+2, n),$$

so dass bei jeder endlichen ganzen Zahl k

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{(k+r+2, n)}{(r+2, n)} = 1$$

hervorgeht.

Mithin ist auch

$$\lim_{r=\infty} \cdot \frac{(m+r+1, n)}{(r+2, n)} = 1\,.$$ [1]

Daher ist nach (4) bei allen positiven Werthen von m und n:

(5)
$$(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1\,(m+n)}{m\,(n+1)} \cdot \frac{2\,(m+n+1)}{(m+1)(n+2)} \cdot \frac{3\,(m+n+2)}{(m+2)(n+3)} \cdot \frac{4\,(m+n+3)}{(m+3)(n+4)} \cdots$$

Setzt man beispielsweise $m = n = \frac{1}{2}$, so folgt:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots,$$

was damit übereinstimmt, dass nach § 95, (14)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}} = \pi$$

und nach § 66, (6)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$

ist.

---

[1]) Liegt m zwischen k und $(k+1)$, so ist der Quotient $\frac{(m+r+1, n)}{(r+2, n)}$ ein Mittelwerth zwischen den reciproken Werthen von

$$\left(1 + \frac{n}{r+2}\right) \left(1 + \frac{n}{r+3}\right) \left(1 + \frac{n}{r+4}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{r+k}\right)$$

und

$$\left(1 + \frac{n}{r+2}\right) \left(1 + \frac{n}{r+3}\right) \left(1 + \frac{n}{r+4}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{r+k}\right) \left(1 + \frac{n}{r+k+1}\right).$$

Andere Formen des Eulerschen Integrals (m, n) erhält man durch die Substitution neuer Variabeln für x.

Setzt man beispielsweise $x = 1 - u$, $dx = -du$ ein, so folgt

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{m-1} du,$$

d. i.:

$$(6) \qquad (m, n) = (n, m).$$

Substituirt man

$$x = \frac{z}{1+z}, \quad dx = \frac{dz}{(1+z)^2}, \quad 1 - x = \frac{1}{1+z},$$

so folgt $z = 0$ für $x = 0$, $z = +\infty$ für $x = 1$, mithin:

$$(7) \ (m, n) = \int_0^\infty \frac{z^{m-1}}{(1+z)^{m+n}} dz = \int_0^\infty \frac{z^{n-1}}{(1+z)^{m+n}} dz, \quad (m > 0, \ n > 0).$$

Wählt man daher m und n so, dass $m + n = +1$ ist, so erhält man mit Rücksicht auf § 89, (6):

$$(8) \qquad (m, 1-m) = (1-m, m)$$

$$= \int_0^\infty \frac{z^{m-1}}{1+z} dz = \int_0^\infty \frac{z^{-m}}{1+z} dz = \frac{\pi}{\sin \pi m}, \ (0 < m < 1).$$

— Mit Hülfe der Productentwickelung (5) folgt hieraus für $\sin \pi m$ derselbe Ausdruck, welchen wir in § 66, (5) auf andere Weise gewonnen haben. Denn es ergiebt sich aus (5):

$$(9) \ (1-m, m) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1^2}{1^2 - m^2} \cdot \frac{2^2}{2^2 - m^2} \cdot \frac{3^2}{3^2 - m^2} \cdot \frac{4^2}{4^2 - m^2} \cdot \frac{5^2}{5^2 - m^2} \cdots$$

Substituirt man

$$x = \sin \omega^2, \ dx = 2 \sin \omega \cos \omega \, d\omega,$$

so entsteht der Ausdruck:

$$(10)\qquad (m,n) = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega^{2m-1}\cos\omega^{2n-1}\,d\omega,\ (0<m,\ 0<n);$$

$$(11)\qquad (m,1-m) = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tng}\omega^{2m-1}\,d\omega,\ (0<m<1).$$

Endlich wollen wir noch x^p für x substituiren, wo $p>0$ sein soll, und m für pm schreiben. Dann folgt aus (5):

$$(12)\qquad \int_0^1 x^{m-1}(1-x^p)^{n-1}\,dx = \frac{1}{p}\cdot\left(\frac{m}{p},n\right)$$

$$= \frac{1}{pn}\cdot\frac{1(m+pn)}{m(n+1)}\cdot\frac{2(m+pn+p)}{(m+p)(n+2)}\cdot\frac{3(m+pn+2p)}{(m+2p)(n+3)}\cdots,$$

so lange m, n, p positive Zahlen sind.

Capitel XV.

Integration transcendenter Functionen.

§ 100.

Integration der algebraischen Functionen von Kreisfunctionen.

Die Integration der Kreisfunctionen ist bereits in § 67 gelehrt worden. Wir wollen uns jetzt mit der Auswerthung des Integrals

$$\int f(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tng} x,\ \cot x)\cdot dx$$

beschäftigen, dessen Integrand f algebraisch aus den Kreisfunctionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tng} x$, $\cot x$ zusammengesetzt ist.

Bedenkt man, dass $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tng} x$, $\cot x$ rationale Functionen von $\operatorname{tng}\frac{x}{2} = u$ sind, nämlich:

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \operatorname{tng} x = \frac{2u}{1-u^2},\quad \cot x = \frac{1-u^2}{2u},$$

und dass nach § 67

$$\left(1+\operatorname{tng}\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{2}\,dx = du,\quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

hervorgeht, so ergiebt sich sofort der

Lehrsatz.

Vermittelst der Substitution

(1) $$\operatorname{tng}\frac{x}{2} = u$$

wird jedes aus den Kreisfunctionen von x algebraisch zusammengesetzte Differential in ein algebraisches Differential für u verwandelt, und zwar so, dass

$$(2) \qquad \int f(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tng} x,\ \cot x)\cdot dx$$
$$= 2\cdot\int f\left(\frac{2u}{1+u^2},\ \frac{1-u^2}{1+u^2},\ \frac{2u}{1-u^2},\ \frac{1-u^2}{2u}\right)\cdot\frac{du}{1+u^2}$$

hervorgeht.

Die Integrale aller **rationalen** Functionen der Kreisfunctionen lassen sich in geschlossener Form durch Elementarfunctionen von u auswerthen,[1]) die Integrale der **irrationalen** Functionen von sin x, cos x, ... gemeinhin nur dann, wenn sie entweder die Form

$$\int F\left(u, \sqrt[n]{\frac{au+b}{\alpha u+\beta}}\right) du$$

oder die Form

$$\int F\left(u, \sqrt{au+b},\ \sqrt{\alpha u+\beta}\right) du$$

oder die Form

$$\int F\left(u, \sqrt{\alpha u^2 + 2\beta u + \gamma}\right) du$$

annehmen, wo F eine rationale Function der Argumente anzeigt.[2])

In besonderen Fällen können andere Substitutionen eine bequemere Handhabe zur Reduction auf ein bereits bekanntes Integral bieten; denn es ist jede Kreisfunction eine algebraische Function jeder andern von gleichem Argument, so dass

$$f(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tng} x,\ \cot x)\cdot dx$$

stets in ein algebraisches Differential von v verwandelt wird, sobald man v nach Belieben für sin x oder cos x oder tng x oder cot x einführt.

Beispiel I.

Substituirt man nach der Anweisung (1) $\operatorname{tng}\frac{x}{2} = u$, so folgt:

$$\int\frac{dx}{a+b\sin x+c\cos x} = 2\cdot\int\frac{du}{(a+c)+2bu+(a-c)\cdot u^2}.$$

[1]) Cap. XIV. [2]) Cap. XV.

Ist $c = a$, so ergiebt sich demnach:

$$(3)\qquad \int \frac{dx}{a + b\sin x + a\cos x} = \frac{1}{b} \cdot l\left(\frac{a}{b} + \operatorname{tng}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Sind c und a verschieden und ist $a^2 \gtrless b^2 + c^2$, so folgt nach § 88:

$$(4)\int \frac{dx}{a + b\sin x + c\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \cdot \operatorname{arc\,tng} \frac{b + (a-c)\operatorname{tng}\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^2 + b^2 - a^2}} \cdot l \frac{b + (a-c)\operatorname{tng}\frac{x}{2} - \sqrt{c^2 + b^2 - a^2}}{b + (a-c)\operatorname{tng}\frac{x}{2} + \sqrt{c^2 + b^2 - a^2}} + C_1.$$

Ist $a^2 = b^2 + c^2$, so folgt:

$$(5)\qquad \int \frac{dx}{a + b\sin x + c\cos x} = -\frac{2}{b + (a-c)\operatorname{tng}\frac{x}{2}} + C.$$

Beispiel II.

Durch die Reduction auf das vorige Beispiel ergiebt sich:

$$(6)\qquad \int \frac{dx}{a + b\sin x^2 + c\cos x^2}$$

$$= \int \frac{d \cdot 2x}{(2a + b + c) + (c - b)\cos 2x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \cdot \operatorname{arc\,tng} \frac{(a+b)\operatorname{tng} x}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-(a+b)(a+c)}} \cdot l \frac{(a+b)\operatorname{tng} x - \sqrt{-(a+b)(a+c)}}{(a+b)\operatorname{tng} x + \sqrt{-(a+b)(a+c)}} + C_1.$$

Für $a + b = 0$ oder $a + c = 0$ haben diese Ausdrücke keinen bestimmten Sinn. Dann ist aber auch das zu entwickelnde Integral von einfacherer Gestalt, nämlich das Product aus einer Constanten und einem der Integrale

$$\int \frac{dx}{\sin x^2} = -\cot x + C, \int \frac{dx}{\cos x^2} = +\operatorname{tng} x + C \ldots \S\, 67, (12) \text{ u. } (11).$$

Will man sich nicht auf das vorige Beispiel zurückbeziehn, so kann man — von der im Lehrsatz erwähnten Substitution abweichend — setzen:

$$\operatorname{tng} x = v, \cos x^2 = \frac{1}{1+v^2}, \sin x^2 = \frac{v^2}{1+v^2}, x = \operatorname{arc\,tng} v, dx = \frac{dv}{1+v^2}.$$

Dadurch erhält man:

$$\int \frac{dx}{a + b \sin x^2 + c \cos x^2} = \int \frac{dv}{(a+c) + (a+b) v^2},$$

was zu demselben Resultat führt, wie oben.

Ebenso könnte man auch $\sin x$ oder $\cos x$ als Integrationsvariable einführen, wodurch dann irrationale Differentiale erhalten werden, welche sich in bekannter Weise integriren lassen.

U. A. ergiebt sich aus (6):

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + b \sin x^2 + c \cos x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{(a+b)(a+c)}}, (a+b > 0, a+c > 0).$$

§ 101.

Reductionsformeln für das Integral $\int \sin x^m \cos x^n dx$.

Substituirt man in den Reductionsformeln des § 90 einerseits $a = -1$ und andrerseits $(-\sin x^2)$ für x, so geht

$$\int x^m (x-a)^n dx$$

über in:

$$(-1)^{m+n+1} \cdot 2 \cdot \int \sin x^{2m+1} \cos x^{2n+1} dx.$$

Dividirt man dann nach der Substitution noch mit $(-1)^{m+n+1} \cdot 2$ und schreibt m für $(2m+1)$, n für $(2n+1)$, so erhält man der Reihe nach:

$$(1) \int \sin x^m \cos x^n dx = + \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \cdot \int \sin x^{m+2} \cos x^{n-2} dx,$$

$$(2) \int \sin x^m \cos x^n dx = - \frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \cdot \int \sin x^{m-2} \cos x^{n+2} dx;$$

$$(3) \int \sin x^m \cos x^n dx = + \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \cdot \int \sin x^m \cos x^{n-2} dx,$$

$$(4) \int \sin x^m \cos x^n dx = - \frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \cdot \int \sin x^{m-2} \cos x^n dx;$$

$$(5) \int \sin x^m \cos x^n dx = - \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \cdot \int \sin x^m \cos x^{n+2} dx,$$

$$(6) \int \sin x^m \cos x^n dx = + \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \cdot \int \sin x^{m+2} \cos x^n dx.$$

Vermittelst (1) und (2) wird der eine Exponent um 2 erniedrigt, der andere um 2 erhöht; (3) und (4) lassen den einen Exponenten ungeändert, während der andere um 2 erniedrigt wird; (5) und (6) endlich lassen ebenfalls den einen Exponenten ungeändert, erhöhen aber den andern um 2.

Sind m und n ganze Zahlen, so gelingt daher stets die Reduction auf eines der Integrale

$$(7) \quad \begin{cases} \int dx = + x + C, & \\ \int \sin x\, dx = - \cos x + C, & \ldots \S\ 67, (10). \\ \int \cos x\, dx = + \sin x + C, & \ldots \S\ 67, (9). \\ \int \frac{dx}{\sin x} = + l\, \mathrm{tng}\, \frac{x}{2} + C, & \ldots \S\ 67, (17). \\ \int \frac{dx}{\cos x} = + l\, \mathrm{tng}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C, & \ldots \S\ 67, (18). \\ \int \mathrm{tng}\, x\, dx = - l \cos x + C, & \ldots \S\ 67, (15). \\ \int \cot x\, dx = + l \sin x + C, & \ldots \S\ 67, (16). \end{cases}$$

nebst den beiden folgenden Integralen, welche in der so eben aufgestellten Tafel bereits enthalten sind:

$$(8)\quad \begin{cases} \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{4} \cdot \int \sin 2x \cdot d(2x) \\ = \frac{1}{2} \sin x^2 + C = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1, \\ \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{d(2x)}{\sin 2x} = + l \operatorname{tng} x + C. \end{cases}$$

Es verlohnt sich, noch einen besondern Fall anzumerken. Setzt man nämlich $n = -m$, so folgt aus (1) und (2):

$$(9)\quad \int \operatorname{tng} x^m dx = + \frac{\operatorname{tng} x^{m+1}}{m+1} - \int \operatorname{tng} x^{m+2} dx,$$

$$(10)\quad \int \operatorname{tng} x^m dx = + \frac{\operatorname{tng} x^{m-1}}{m-1} - \int \operatorname{tng} x^{m-2} dx.$$

Übrigens braucht man, um die Formeln (1) bis (6) abzuleiten, nicht auf die Formeln des § 90 zurückzugreifen, sondern nur in analoger Weise zu verfahren. Z. B. gewinnt man unsere Formel (1) vermittelst der partiellen Integration in folgender Weise:

$$\int \sin x^m \cos x^n dx$$

$$= \cos x^{n-1} \int \sin x^m \cos x \, dx - \int \left(\frac{d \cdot \cos x^{n-1}}{dx} \int \sin x^m \cos x \, dx \right) dx$$

$$= \frac{\cos x^{n-1} \sin x^{m+1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \cdot \int \cos x^{n-2} \sin x^{m+2} dx.$$

Beispiele.

Versteht man unter k eine ganze positive Zahl, so folgt aus (3), (4) und (10):

$$(11)\quad \int \cos x^{2k} dx = \frac{\sin x}{2k} \cdot \begin{Bmatrix} \cos x^{2k-1} + \frac{2k-1}{2k-2} \cos x^{2k-3} + \cdots \\ \cdots + \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2} \cdot \cos x^1 \end{Bmatrix}$$

$$+ \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2} \cdot \frac{x}{2k} + C,$$

$$(12)\int \cos x^{2k+1} dx = \frac{\sin x}{2k+1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos x^{2k} + \frac{2k}{2k-1} \cos x^{2k-2} + \cdots \\ \cdots + \frac{2k \cdot (2k-2) \cdots 2}{(2k-1) \cdot (2k-3) \cdots 1} \cos x^0 \end{array} \right\} + C;$$

$$(13) \int \sin x^{2k} dx = -\frac{\cos x}{2k} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin x^{2k-1} + \frac{2k-1}{2k-2} \sin x^{2k-3} + \cdots \\ \cdots + \frac{(2k-1)(2k-3) \cdots 3}{(2k-2)(2k-4) \cdots 2} \cdot \sin x^1 \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{(2k-1)(2k-3) \cdots 3}{(2k-2)(2k-4) \cdots 2} \cdot \frac{x}{2k} + C,$$

$$(14) \qquad \int \sin x^{2k+1} dx$$

$$= -\frac{\cos x}{2k+1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin x^{2k} + \frac{2k}{2k-1} \cdot \sin x^{2k-2} + \cdots \\ \cdots + \frac{2k \cdot (2k-2) \cdots 2}{(2k-1) \cdot (2k-3) \cdots 1} \cdot \sin x^0 \end{array} \right\} + C;$$

$$(15) \qquad \int \operatorname{tng} x^{2k} dx$$

$$= + \frac{\operatorname{tng} x^{2k-1}}{2k-1} - \frac{\operatorname{tng} x^{2k-3}}{2k-3} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{\operatorname{tng} x^1}{1} + (-1)^k \cdot x + C.$$

$$(16) \qquad \int \operatorname{tng} x^{2k+1} dx$$

$$= \frac{\operatorname{tng} x^{2k}}{2k} - \frac{\operatorname{tng} x^{2k-2}}{2k-2} + \cdots + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\operatorname{tng} x^2}{2} + (-1)^{k+1} \cdot l \cos x + C.$$

$$(17) \int \frac{dx}{\cos x^{2k}} = \frac{\sin x}{2k-1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\cos x^{2k-1}} + \frac{2k-2}{(2k-3) \cos x^{2k-3}} + \cdots \\ \cdots + \frac{(2k-2)(2k-4) \cdots 2}{(2k-3)(2k-5) \cdots 1 \cdot \cos x^1} \end{array} \right\} + C.$$

$$(18)\quad \int \frac{dx}{\cos x^{2k+1}} = \frac{\sin x}{2k} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\cos x^{2k}} + \frac{2k-1}{(2k-2)\cos x^{2k-2}} + \cdots \\ & + \cdots \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2\cos x^2} \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2} \cdot \frac{l\,\mathrm{tng}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{2k} + C.$$

Ist einer von den Exponenten m und n eine **ungrade positive** Zahl, so gelingt die Auswerthung des Integrals stets vermittelst (3) oder (4), da man entweder auf das Integral

$$\int \sin x^m \cos x\, dx = \int \sin x^m\, d \cdot \sin x = \frac{\sin x^{m+1}}{m+1}$$

oder auf das Integral

$$\int \sin x \cos x^n\, dx = -\int \cos x^n\, d \cdot \cos x = -\frac{\cos x^{n+1}}{n+1}$$

geführt wird.

Ist aber der eine Exponent **grade** oder **negativ ungrade**, so muss der andere im ersten Falle ganz und im zweiten Falle wenigstens rational sein, damit sich das Integral durch Elementarfunctionen darstellen lasse. — Denn: ist n die ganze Zahl, und setzt man $\sin x = u$, so gelangt man durch die Reduction entweder auf

$$\int \sin x^m\, dx = \int \frac{u^m}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

oder auf

$$\int \frac{\sin x^m}{\cos x}\, dx = \int \frac{u^m}{1-u^2}\, du.$$

Die Entwickelung des Integrals durch Reihen ist auf mehr als eine Weise ausführbar, namentlich sowohl nach Potenzen der Kreisfunctionen als nach Functionen der vielfachen Arcus.

Wir wollen diese doppelte Entwickelung für das Integral in seiner allgemeinsten Form vorführen.

Man kann schreiben:

$$\int \sin x^m \cos x^n \, dx = \int \sin x^m (1 - \sin x^2)^{\frac{n-1}{2}} \, d(\sin x)$$

und erhält durch Anwendung des binomischen Satzes auf das Differential des zweiten Ausdrucks sofort:

(19) $$\int \sin x^m \cos x^n \, dx$$

$$= C + \frac{\sin x^{m+1}}{m+1} - \binom{\frac{n-1}{2}}{1} \cdot \frac{\sin x^{m+3}}{m+3} + \binom{\frac{n-1}{2}}{2} \cdot \frac{\sin x^{m+5}}{m+5} - \cdots$$

Nur darf hierbei, damit diese Formel in unveränderter Gestalt brauchbar bleibe, m keine ganze negative Zahl sein, also nicht $= -(2k+1)$; denn dann tritt für dasjenige Glied, welches in (19) den Nenner $m + (2k+1)$ erhalten würde, ein logarithmisches Glied

$$(-1)^k \cdot \binom{\frac{n-1}{2}}{k} \cdot l \sin x$$

auf, und die ganze Formel lautet:

(20) $$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^{2k+1}} \, dx$$

$$= C - \frac{1}{2k \sin x^{2k}} + \binom{\frac{n-1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{2(k-1) \sin x^{2(k-1)}} - \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots + (-1)^k \binom{\frac{n-1}{2}}{k-1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot \sin x^{2 \cdot 1}}$$

$$+ (-1)^k \cdot \binom{\frac{n-1}{2}}{k} \cdot l \sin x + (-1)^{k+1} \cdot \binom{\frac{n-1}{2}}{k+1} \cdot \frac{\sin x^2}{2}$$

$$+ (-1)^{k+2} \cdot \binom{\frac{n-1}{2}}{k+2} \cdot \frac{\sin x^4}{4} + \cdots$$

In ganz analoger Weise lässt sich die Entwickelung des Integrals nach steigenden Potenzen von $\cos x$ ausführen.

Es folgt:

(21) $$\int \sin x^m \cos x^n dx$$

$$= C - \frac{\cos x^{n+1}}{n+1} + \binom{\frac{m-1}{2}}{1} \cdot \frac{\cos x^{n+3}}{n+3} - \binom{\frac{m-1}{2}}{2} \cdot \frac{\cos x^{n+5}}{n+5} + \cdots$$

und anstatt dessen, wenn $n = -(2k+1)$ eine ganze negative Zahl ist:

(22) $$\int \frac{\sin x^m}{\cos x^{2k+1}} dx$$

$$= C + \frac{1}{2k \cos x^{2k}} - \binom{\frac{m-1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{2(k-1) \cos x^{2(k-1)}} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + (-1)^{k-1} \binom{\frac{m-1}{2}}{k-1} \cdot \frac{1}{2 \cos x^2}$$

$$+ (-1)^{k-1} \cdot \binom{\frac{m-1}{2}}{k} \cdot l \cos x + (-1)^k \cdot \binom{\frac{m-1}{2}}{k+1} \cdot \frac{\cos x^2}{2}$$

$$+ (-1)^{k+1} \binom{\frac{m-1}{2}}{k+2} \cdot \frac{\cos x^4}{4} + \cdots$$

Besondere Bedingungen für die Convergenz dieser Entwickelungen (19) bis (22) existiren nicht, so lange $\sin x$ und $\cos x$ im Integrationsintervall von ± 1 verschieden bleiben. Wird aber $\sin x = \pm 1$, so muss in (19) und (20) $n + 1 > 0$ sein; wird $\cos x = \pm 1$, so muss in (21) und (22) $m + 1 > 0$ sein. — Durch die Anwendung der Reductionsformeln (5) und (6) kann man es immer dahin bringen, dass diese Bedingungen erfüllt werden.

Um unsere Integrale nach steigenden Arcus zu entwickeln, kann man dasselbe Verfahren benutzen, wie in § 68, nämlich dieses, dass man

$$\cos x^n = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n = \frac{e^{inx}}{2^n} \cdot \left(1 + e^{-i2x}\right)^n,$$

$$\sin x^m = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^m = \frac{e^{im.\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}}{2^m} \cdot \left(1 - e^{-i2x}\right)^m$$

substituirt und dann das Product

$$(23)\qquad \sin x^m \cos x^n = \frac{e^{i\left[(m+n)x-\frac{m\pi}{2}\right]}}{2^{m+n}}\cdot\left(1-e^{-i2x}\right)^m\left(1+e^{-i2x}\right)^n$$

mit Hülfe des binomischen Satzes in eine unendliche Reihe verwandelt. Ohne die Convergenzbedingungen sofort in aller Schärfe fixiren zu wollen, erinnern wir daran, dass dieselben nach § 73 im Wesentlichen nur $m+1>0$ und $n+1>0$ voraussetzen. Dann ist:

$$\left(1-e^{-i2x}\right)^m = 1-\binom{m}{1}e^{-i2x}+\binom{m}{2}e^{-i4x}-\binom{m}{3}e^{-i6x}+\cdots,$$

$$\left(1+e^{-i2x}\right)^n = 1+\binom{n}{1}e^{-i2x}+\binom{n}{2}e^{-i4x}+\binom{n}{3}e^{-i6x}+\cdots$$

und es folgt durch Multiplication:

$$(24)\qquad \left(1-e^{-i2x}\right)^m\cdot\left(1+e^{-i2x}\right)^n$$

$$=1+\begin{bmatrix}m,n\\1\end{bmatrix}\cdot e^{-i2x}+\begin{bmatrix}m,n\\2\end{bmatrix}\cdot e^{-i4x}+\begin{bmatrix}m,n\\3\end{bmatrix}\cdot e^{-i6x}+\cdots$$

wo der Abkürzung wegen

$$(25)\qquad \begin{bmatrix}m,n\\r\end{bmatrix}=\binom{n}{r}-\binom{n}{r-1}\binom{m}{1}+\binom{n}{r-2}\binom{m}{2}-\cdots+(-1)^r\cdot\binom{m}{r}$$

gesetzt ist.

Aus (23) und (24) ergiebt sich nach der Sonderung der reellen Bestandtheile:

$$(26)\qquad 2^{m+n}\sin x^m\cos x^n$$

$$=\cos\left((m+n)x-\frac{m\pi}{2}\right)+\begin{bmatrix}m,n\\1\end{bmatrix}\cdot\cos\left((m+n-2)x-\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$+\begin{bmatrix}m,n\\2\end{bmatrix}\cdot\cos\left((m+n-4)x-\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$+\begin{bmatrix}m,n\\3\end{bmatrix}\cdot\cos\left((m+n-6)x-\frac{m\pi}{2}\right)+\cdots,$$

(27) $$0 = \sin\left((m+n)x - \frac{m\pi}{2}\right)$$

$$+ \begin{bmatrix} m, n \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \sin\left((m+n-2)x - \frac{m\pi}{2}\right) + \begin{bmatrix} m, n \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \sin\left((m+n-4)x - \frac{m\pi}{2}\right)$$

$$+ \begin{bmatrix} m, n \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \sin\left((m+n-6)x - \frac{m\pi}{2}\right) + \cdots$$

Integrirt man jetzt, so erhält man aus (26):

(28) $$2^{m+n} \cdot \int \sin x^m \cos x^n \, dx$$

$$= \frac{\sin\left((m+n)x - \frac{m\pi}{2}\right)}{m+n} + \begin{bmatrix} m, n \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sin\left((m+n-2)x - \frac{m\pi}{2}\right)}{m+n-2}$$

$$+ \begin{bmatrix} m, n \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sin\left((m+n-4)x - \frac{m\pi}{2}\right)}{m+n-4} + \cdots$$

oder falls $m+n=0$ ist, indem wir hierbei der Unterscheidung wegen $m=\mu$, $n=-\mu$ schreiben:

(29) $$\int \operatorname{tng} x^{\mu} \, dx = x \cdot \cos\frac{\mu\pi}{2}$$

$$+ \begin{bmatrix} \mu, -\mu \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sin\left(2x + \frac{\mu\pi}{2}\right)}{2} + \begin{bmatrix} \mu, -\mu \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sin\left(4x + \frac{\mu\pi}{2}\right)}{4} + \cdots$$

In analoger Weise folgt aus (27), indem wir gewisse Integrationsconstanten durch $f(m,n)$ und $\varphi(\mu)$ bezeichnen:

(30) $$f(m, n)$$

$$= \frac{\cos\left((m+n)x - \frac{m\pi}{2}\right)}{m+n} + \begin{bmatrix} m, n \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\cos\left((m+n-2)x - \frac{m\pi}{2}\right)}{m+n-2}$$

$$+ \begin{bmatrix} m, n \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{\cos\left((m+n-4)x - \frac{m\pi}{2}\right)}{m+n-4} + \cdots,$$

$$(31) \qquad \varphi(\mu) = x \cdot \sin\frac{\mu\pi}{2} - \left[\begin{matrix}\mu, -\mu\\ 1\end{matrix}\right] \cdot \frac{\cos\left(2x + \frac{\mu\pi}{2}\right)}{2}$$

$$- \left[\begin{matrix}\mu, -\mu\\ 2\end{matrix}\right] \cdot \frac{\cos\left(4x + \frac{\mu\pi}{2}\right)}{4} - \ldots$$

Die Gleichung (28) wird für $m = n = -1$ mit der Gl. (29) des § 74 identisch, woraus man erkennt, dass die Entwickelung (28) stets Gültigkeit hat, sobald $m \overline{>} -1$ und $n \overline{>} -1$ ist, nur dass bei $m = -1$ nicht $\sin x = 0$ und bei $n = -1$ nicht $\cos x = 0$ werden darf.

Die Gleichung (29) gilt demnach unter der Voraussetzung, dass $-1 < \mu < +1$ sei, gestattet aber auch den Werth $\mu = +1$, wenn im Integrationsintervall nicht $\cos x = 0$ wird, und den Werth $\mu = -1$, wenn nicht $\sin x = 0$ wird. — Vergl. § 74, (28).

Die Convergenzbedingungen zu (30) und (31) sind dieselben, wie zu (28) und (29).

Dass die Integrationsconstanten, welche auf den linken Seiten in (30) und (31) durch $f(m, n)$ und $\varphi(\mu)$ bezeichnet sind, nicht für m, n und μ constant zu sein brauchen, ist selbstverständlich. Dass sie es in der That nicht sind, kann man aber auch leicht a posteriori darthun; denn man erhält u. A. ohne Schwierigkeit $f(0, 1) = 0$, während man durch Vergleichung von $f(-1, -1)$ mit § 74, (32) findet: $f(-1, -1) = -\frac{1}{8}\pi$.

Wir haben oben den besondern Fall hervorgehoben, dass in (28) $m + n = 0$ ist. Ist dort $m + n = 2k$ überhaupt eine grade positive Zahl, so muss ersichtlicher Weise dasjenige Glied, welches den Coefficienten $\left[\begin{matrix}m, n\\ k\end{matrix}\right]$ hat, durch

$$\left[\begin{matrix}m, n\\ k\end{matrix}\right] \cos\frac{m\pi}{2} \cdot x$$

ersetzt werden.

Für die durch $\begin{bmatrix} m, n \\ r \end{bmatrix}$ bezeichneten Coefficienten kann man mancherlei andere Formen finden. Wir wollen noch eine Form ableiten, welche $-n = m = \mu$ voraussetzt, und eine andere wenigstens andeuten.

Nach der Definition ist $\begin{bmatrix} \mu, -\mu \\ r \end{bmatrix}$ der Coefficient von z^r in der Entwickelung von $\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^\mu$ nach steigenden Potenzen von z. Aber:

$$\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^\mu = \left(1 - \frac{2z}{1+z}\right)^\mu = 1 - \binom{\mu}{1}\frac{2z}{1+z} + \binom{\mu}{2}\frac{2^2z^2}{(1+z)^2} - \binom{\mu}{3}\frac{2^3z^3}{(1+z)^3} + \cdots$$

Entwickelt man nun im letzten Ausdruck die einzelnen Brüche und nimmt diejenigen Glieder zusammen, welche gleich hohe Potenzen von z besitzen, so erhält man:

(32)
$$(-1)^{r+1}\begin{bmatrix} \mu, -\mu \\ r+1 \end{bmatrix}$$
$$= 2^1\binom{\mu}{1} + 2^2\binom{\mu}{2}\binom{r}{1} + 2^3\binom{\mu}{3}\binom{r}{2} + \cdots + 2^{r+1}\binom{\mu}{r+1}\binom{r}{r}.$$

Anstatt $\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^\mu$ in der so eben ausgeführten Weise zu behandeln, kann man auch von der Entwickelung

$$\mu \cdot l\,\frac{1-z}{1+z} = -2\mu \cdot \left\{z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \cdots\right\}$$

ausgehn, welche zunächst den Ausdruck

$$\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^\mu = e^{-2\mu z} \cdot e^{-\frac{2\mu z^3}{3}} \cdot e^{-\frac{2\mu z^5}{5}} \cdot e^{-\frac{2\mu z^7}{7}} \cdots = \psi(z)$$

zur Folge hat. Dann ist nach dem Obigen und nach dem Maclaurinschen Satze offenbar:

(33) $$\begin{bmatrix} \mu, -\mu \\ r \end{bmatrix} = \frac{\psi^{(r)}(0)}{r!}.$$

Der Ausführung der durch diese Formel vorgeschriebenen Operation stellt sich, so lange man für r niedrige numerisch gegebene Werthe im Sinne hat, keine Schwierigkeit entgegen. Man sieht auch schon ohne Rechnung, dass man für $\begin{bmatrix} \mu, -\mu \\ r \end{bmatrix}$ einen nach Potenzen von μ geordneten Ausdruck erhalten wird. Das Bildungsgesetz für die Coefficienten dieser Potenzen von μ ist aber complicirter, als dass es räthlich sein möchte, uns hier mit ihm zu befassen.

Um die Resultate für die kleineren Werthe von r möglichst schnell zu gewinnen, schreiben wir $\left(-\frac{\mu}{2}\right)$ für μ und entwickeln die Exponentialfunctionen nach der bekannten Reihe für e^x. Dann geht hervor:

$$\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{-\frac{\mu}{2}} = e^{\mu z} \cdot e^{\frac{\mu z^3}{3}} \cdot e^{\frac{\mu z^5}{5}} \cdot e^{\frac{\mu z^7}{7}} \cdots$$

$$= \begin{cases} \left(1 + \frac{\mu z}{1!} + \frac{\mu^2 z^2}{2!} + \frac{\mu^3 z^3}{3!} + \frac{\mu^4 z^4}{4!} + \frac{\mu^5 z^5}{5!} + \frac{\mu^6 z^6}{6!} + \frac{\mu^7 z^7}{7!} + \cdots\right) \\ \cdot\left(1 + \frac{\mu z^3}{1!\,3} + \frac{\mu^2 z^6}{2!\,3^2} + \frac{\mu^3 z^9}{3!\,3^3} + \cdots\right) \\ \cdot\left(1 + \frac{\mu z^5}{1!\,5} + \frac{\mu^2 z^{10}}{2!\,5^2} + \frac{\mu^3 z^{15}}{3!\,5^3} + \cdots\right) \\ \cdot\left(1 + \frac{\mu z^7}{1!\,7} + \frac{\mu^2 z^{14}}{2!\,7^2} + \frac{\mu^3 z^{21}}{3!\,7^3} + \cdots\right) \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Multiplicirt man ferner die Klammern aus und zieht diejenigen Glieder zusammen, welche gleich hohe Potenzen von z erhalten, so folgert man nach (33):

$$
(34)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\begin{matrix} -\frac{\mu}{2}, +\frac{\mu}{2} \\ 1 \end{matrix}\right] = \mu, \\
&\left[\begin{matrix} -\frac{\mu}{2}, +\frac{\mu}{2} \\ 2 \end{matrix}\right] = \frac{\mu^2}{2!} = \frac{1}{2}\mu^2, \\
&\left[\begin{matrix} -\frac{\mu}{2}, +\frac{\mu}{2} \\ 3 \end{matrix}\right] = \frac{\mu^3}{3!} + \frac{\mu}{1!3} = \frac{1}{6}\mu(\mu^2+2), \\
&\left[\begin{matrix} -\frac{\mu}{2}, +\frac{\mu}{2} \\ 4 \end{matrix}\right] = \frac{\mu^4}{4!} + \frac{\mu^2}{1!1!3} = \frac{1}{24}\mu^2(\mu^2+8), \\
&\left[\begin{matrix} -\frac{\mu}{2}, +\frac{\mu}{2} \\ 5 \end{matrix}\right] = \frac{\mu^5}{5!} + \frac{\mu^3}{2!1!3} + \frac{\mu}{1!5} \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{120}\mu(\mu^4+20\mu^2+24), \\
&\left[\begin{matrix} -\frac{\mu}{2}, +\frac{\mu}{2} \\ 6 \end{matrix}\right] = \frac{\mu^6}{6!} + \frac{\mu^4}{3!1!3} + \frac{\mu^2}{1!1!5} + \frac{\mu^2}{2!3^2} \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{720}\mu^2(\mu^4+40\mu^2+180), \\
&\left[\begin{matrix} -\frac{\mu}{2}, +\frac{\mu}{2} \\ 7 \end{matrix}\right] = \frac{\mu^7}{7!} + \frac{\mu^5}{4!1!3} + \frac{\mu^3}{2!1!5} + \frac{\mu^3}{1!2!3^2} + \frac{\mu}{1!7} \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{5040}\mu(\mu^6+70\mu^4+784\mu^2+720).
\end{aligned}
\right.
$$

Für die Eulerschen Integrale erster Gattung ergeben sich aus den obigen Formeln, weil nach § 99, (10)

$$
(m, n) = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{2m-1} \cos x^{2n-1}\, dx
$$

ist, mehrere Ausdrücke.

Es folgt nämlich aus (19) und (21):

$$
(35)\quad (m,n) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\cdot\binom{n-1}{1} + \frac{1}{m+2}\cdot\binom{n-1}{2} - \frac{1}{m+3}\cdot\binom{n-1}{3} + \cdots
$$

$$
= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\cdot\binom{m-1}{1} + \frac{1}{n+2}\cdot\binom{m-1}{2} - \frac{1}{n+3}\cdot\binom{m-1}{3} + \cdots
$$

Ferner folgt, wenn man der kürzeren Schreibweise wegen

$$(36)\qquad \begin{bmatrix} 2m-1, \; 2n-1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} m, n \\ r \end{Bmatrix}$$

einführt, aus (28):

$$(37)\qquad 4^{m+n-1} \cdot (m, n)$$

$$= \frac{\cos m\pi + \cos n\pi}{1-(m+n)} + \begin{Bmatrix} m,n \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{\cos m\pi - \cos n\pi}{2-(m+n)} + \begin{Bmatrix} m,n \\ 2 \end{Bmatrix} \cdot \frac{\cos m\pi + \cos n\pi}{3-(m+n)}$$

$$+ \begin{Bmatrix} m,n \\ 3 \end{Bmatrix} \cdot \frac{\cos m\pi - \cos n\pi}{4-(m+n)} + \begin{Bmatrix} m,n \\ 4 \end{Bmatrix} \cdot \frac{\cos m\pi + \cos n\pi}{5-(m+n)} + \cdots$$

$$= \cos m\pi \cdot \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{1-(m+n)} + \dfrac{\begin{Bmatrix} m,n \\ 1 \end{Bmatrix}}{2-(m+n)} + \dfrac{\begin{Bmatrix} m,n \\ 2 \end{Bmatrix}}{3-(m+n)} \\ + \dfrac{\begin{Bmatrix} m,n \\ 3 \end{Bmatrix}}{4-(m+n)} + \cdots \end{array} \right\}$$

$$+ \cos n\pi \cdot \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{1-(m+n)} - \dfrac{\begin{Bmatrix} m,n \\ 1 \end{Bmatrix}}{2-(m+n)} + \dfrac{\begin{Bmatrix} m,n \\ 2 \end{Bmatrix}}{3-(m+n)} \\ - \dfrac{\begin{Bmatrix} m,n \\ 3 \end{Bmatrix}}{4-(m+n)} + \cdots \end{array} \right\}$$

Im Falle aber in dieser Formel $m + n = 1$ sein sollte, so tritt für sie nach (29) die folgende ein, bei deren Aufstellung wir uns wegen des Integralwerthes zugleich auf § 99, (8) beziehn:

$$(38)\qquad (m, 1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi}$$

$$= \pi \sin m\pi + 2\cos m\pi \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{1}{1} \cdot \begin{Bmatrix} m, 1-m \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{Bmatrix} m, 1-m \\ 3 \end{Bmatrix} \\ + \frac{1}{5} \cdot \begin{Bmatrix} m, 1-m \\ 5 \end{Bmatrix} + \cdots \end{array} \right].$$

Vertauscht man in (25) m mit n, so ändert sich $\begin{bmatrix} m, n \\ r \end{bmatrix}$ offenbar nicht, falls r eine grade Nummer ist, während es bei ungradem r eine blosse Änderung des Vorzeichens zur Folge hat.

Daher gilt nach (36) dasselbe von $\begin{Bmatrix} m, n \\ r \end{Bmatrix}$, d. h. es ist:

$$\begin{Bmatrix} m, n \\ r \end{Bmatrix} = (-1)^r \cdot \begin{Bmatrix} n, m \\ r \end{Bmatrix}.$$

Bezeichnet man also

$$(39) \qquad \Phi(m, n)$$
$$= \frac{1}{1-(m+n)} + \frac{\begin{Bmatrix} m, n \\ 1 \end{Bmatrix}}{2-(m+n)} + \frac{\begin{Bmatrix} m, n \\ 2 \end{Bmatrix}}{3-(m+n)} + \frac{\begin{Bmatrix} m, n \\ 3 \end{Bmatrix}}{4-(m+n)} + \cdots,$$

so lässt sich die Gleichung (37) auch in folgender Weise schreiben:

$$(40) \qquad 4^{m+n-1} \cdot (m, n) = \cos m\pi \cdot \Phi(m, n) + \cos n\pi \cdot \Phi(n, m).$$

Und weil nach (39)

$$(41) \qquad \Phi(m, n) - \Phi(n, m)$$
$$= 2 \cdot \left[\frac{\begin{Bmatrix} m, n \\ 1 \end{Bmatrix}}{2-(m+n)} + \frac{\begin{Bmatrix} m, n \\ 3 \end{Bmatrix}}{4-(m+n)} + \frac{\begin{Bmatrix} m, n \\ 5 \end{Bmatrix}}{6-(m+n)} + \cdots \right]$$

ist, so lässt sich (38) in der Form

$$(42) \qquad (m, 1-m)$$
$$= \frac{\pi}{\sin m\pi} = \pi \sin m\pi + \cos m\pi \cdot [\Phi(m, 1-m) - \Phi(1-m, m)]$$

darstellen, weshalb der Ausdruck (41) für $n = 1 - m$ den Werth $\pi \cot m\pi$ hat.

§ 102.

Integration von Differentialen, welche aus der Variabeln und ihren directen oder inversen Kreisfunctionen algebraisch zusammengesetzt sind.

Die bisher betrachteten Differentiale mit Kreisfunctionen waren von der Beschaffenheit, dass sich noch Kriterien von einiger Allgemeinheit aufstellen liessen, um von vorne herein zu beurtheilen, ob das Integral in endlicher Form durch Elementarfunctionen auswerthbar sei. Als Mittel der Beurtheilung diente die Reduction auf algebraische Functionen einer neuen Variabeln.

Hier sind wir im Gegensatze dazu auf die Vorführung einzelner Formen angewiesen, bei welchen die Auswerthung mittelst geschlossener Ausdrücke gelingt. Wir wollen uns nur mit den wichtigsten derselben befassen.

Es ergiebt sich durch partielle Integration:

$$(1)\qquad \int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n\cdot\int x^{n-1}\cos x\, dx,$$

$$(2)\qquad \int x^n \cos x\, dx = +x^n \sin x - n\cdot\int x^{n-1}\sin x\, dx.$$

Wendet man diese Formeln abwechselnd auf einander an, so erhält man, falls n eine ganze positive Zahl bedeutet:

$$(3)\qquad \int x^n \sin x\, dx$$

$$= -x^n\cos x + 1!\binom{n}{1}x^{n-1}\sin x + 2!\binom{n}{2}x^{n-2}\cos x - 3!\binom{n}{3}x^{n-3}\sin x$$
$$-4!\binom{n}{4}x^{n-4}\cos x + \cdots,$$

$$(4)\qquad \int x^n \cos x\, dx$$

$$= +x^n\sin x + 1!\binom{n}{1}x^{n-1}\cos x - 2!\binom{n}{2}x^{n-2}\sin x - 3!\binom{n}{3}x^{n-3}\cos x$$
$$+4!\binom{n}{4}x^{n-4}\sin x + \cdots$$

— jede von den beiden Formeln (3) und (4) so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht.

Kehrt man die beiden Formeln (2) und (1) um, indem man zugleich $(-n)$ für $(n-1)$ schreibt, so ergiebt sich:

$$(5)\qquad \int \frac{\sin x}{x^n}dx = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\cdot\int\frac{\cos x}{x^{n-1}}dx,$$

$$(6)\qquad \int \frac{\cos x}{x^n}dx = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\cdot\int\frac{\sin x}{x^{n-1}}dx.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln auf einander gelangt man, falls n eine ganze positive Zahl ist, schliesslich zu einem der beiden Integrale

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx,$$

welche sich nicht in geschlossener Form durch Elementarfunctionen auswerthen lassen.

Substituirt man aber für $\sin x$ und $\cos x$ die unendlichen Reihen § 61, (2) und (3), durch welche diese Functionen definirt sind, so folgt:

$$(7) \qquad \int \frac{\sin x}{x} dx = C + \frac{x^1}{1!1} - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \cdots,$$

$$(8) \qquad \int \frac{\cos x}{x} dx = C + lx - \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^4}{4!4} - \frac{x^6}{6!6} + \cdots$$

Übrigens kann man das erste von diesen beiden Integralen noch in einer andern Weise auswerthen, welche zugleich geeignet ist, die obere Grenze unendlich gross zu machen, was in (7) nicht angeht.

Wir schreiben der grösseren Bequemlichkeit wegen (πx) für x. Dann ist bei jedem positiven ganzen n für $x = n + u$:

$$\int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin(n\pi + \pi u)}{n+u} du = (-1)^n \cdot \int_0^1 \frac{\sin(\pi u)}{n+u} du;$$

und wenn man noch $u = 1 - v$ einführt, offenbar auch:

$$\int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx = (-1)^n \cdot \int_0^1 \frac{\sin(\pi v)}{(n+1) - v} dv.$$

Addirt man die beiden letzten Gleichungen und schreibt zugleich x für u und v, so folgt:

$$2\cdot\int_n^{n+1}\frac{\sin(\pi x)}{x}dx=(-1)^n\cdot\int_0^1\sin(\pi x)\,dx\left\{\frac{1}{n+x}+\frac{1}{n+1-x}\right\}.$$

Wird nun n nach der Reihe $=0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ genommen, so erhält man unter Benutzung der Formel

$$\int_0^n=\int_0^1+\int_1^2+\int_2^3+\cdots+\int_{n-1}^n$$

den folgenden Ausdruck:

$$(9)\qquad 2\cdot\int_0^n\frac{\sin(\pi x)}{x}dx$$

$$=\int_0^1\sin(\pi x)\,dx\cdot\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1+x}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-x}\right\}.$$

Der Inhalt der Gesichtsklammer auf der rechten Seite nähert sich nach § 66, (16) bei unendlich wachsendem n dem Grenzwerthe $\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$. Mithin ist:

$$(10)\qquad \int_0^\infty\frac{\sin(\pi x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

und überhaupt für jedes beliebige positive α:

$$(11)\qquad \int_0^\infty\frac{\sin(\alpha x)}{x}dx=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2},\ ^{1)}$$

wie man sofort erkennt, wenn man $x=\alpha u$ setzt.

[1]) Will man die Gleichung (11) nach α differentiiren, so darf man (vergl. § 34) nicht unter dem Integralzeichen differentiiren, weil das Integral

$$\int_0^\infty\frac{\partial^2\sin(\alpha x)}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{dx}{x}=-\int_0^\infty x\sin(\alpha x)\,dx$$

Als Function von α betrachtet, ist das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ stetig mit Ausnahme der Stelle $\alpha = 0$, wo es den Doppelsprung von $+\frac{\pi}{2}$ auf 0 und dann auf $-\frac{\pi}{2}$ macht.

Substituirt man aus der Formel (16) des § 66 in unsere Formel (9), so kommt:

$$(12) \qquad 2 \cdot \int\limits_0^n \frac{(\sin \pi x)}{x} dx$$

$$= \pi - (-1)^n \cdot \int\limits_0^1 \sin(\pi x)\, dx \cdot \left\{ \frac{1}{n+x} + \frac{1}{n+1-x} - \frac{1}{n+1+x} - \frac{1}{n+2-x} + \cdots \right\}$$

$$= \pi - (-1)^n \cdot 2 \cdot \int\limits_0^1 \sin(\pi x)\, dx \cdot \left\{ \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x} + \frac{1}{n+2+x} - \frac{1}{n+3+x} + \cdots \right\}$$

Und ist die obere Grenze keine ganze Zahl, sondern $= n + z$, wo wir $0 < z < 1$ annehmen, so kann man

---

keinen endlichen Werth hat. Man kann sich aber auch sehr leicht direct überzeugen, dass die Relation, welche durch Differentiation unter dem Integralzeichen erhalten würde, nämlich

$$\int\limits_0^\infty \cos(\alpha x)\, dx = 0,$$

falsch ist; denn es ergiebt sich der Werth

$$\int\limits_0^z \cos(\alpha x)\, dx = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha z),$$

welcher bei unendlich wachsendem z zwischen $-\frac{1}{\alpha}$ und $+\frac{1}{\alpha}$ oscillirt.

$$\int_0^{n+z} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx = \int_0^n \frac{\sin(\pi x)}{x} dx + (-1)^n \cdot \int_0^z \frac{\sin(\pi x)}{n+x} dx$$

setzen, woraus sich der Zuschlag verhältnismässig leicht berechnet.

Auch in den meisten andern Fällen, in denen das Differential das Product aus einer Potenz von x und einer Kreisfunction eines Vielfachen von x oder des Logarithmus einer solchen ist, sind die Formeln des § 66 nützlich, um das Integral durch eine unendliche Reihe darzustellen. Z. B. ergiebt sich aus § 66, (27) und (24) für $-1 < x < +1$:

(13) $$\frac{\pi}{4} \cdot \int x^{\mu} \cdot \operatorname{tng} \frac{\pi x}{2} \cdot dx$$

$$= C + c_2 \cdot \frac{x^{\mu+2}}{\mu+2} + c_4 \cdot \frac{x^{\mu+4}}{\mu+4} + c_6 \cdot \frac{x^{\mu+6}}{\mu+6} + \cdots,$$

(14) $$\int x^{\mu-1} \cdot l \cos \frac{\pi x}{2} \cdot dx$$

$$= C - c_2 \cdot \frac{x^{\mu+2}}{1(\mu+2)} - c_4 \cdot \frac{x^{\mu+4}}{2(\mu+4)} - c_6 \cdot \frac{x^{\mu+6}}{3(\mu+6)} - \cdots,$$

wo

$$c_{2n} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \cdots$$

bedeutet und in endlicher Form durch die dortige Formel (40) bestimmt wird.

Kommen im Differential **inverse** Kreisfunctionen vor, so gelangt man in den einfacheren Fällen dadurch zum Ziele, dass man dieselben als Integrationsvariabeln einführt.

Denn man erhält dadurch:

$$
(15) \quad \begin{cases}
\int f(\text{arc}\sin x)\,dx = +\int f(u)\cos u\,du, & \text{arc}\sin x = u; \\
\int f(\text{arc}\cos x)\,dx = -\int f(v)\sin v\,dv, & \text{arc}\cos x = v; \\
\int f(\text{arc}\,\text{tng}\,x)\,dx = +\int \frac{f(w)}{\cos w^2}\,dw, & \text{arc}\,\text{tng}\,x = w; \\
\int f(\text{arc}\cot x)\,dx = -\int \frac{f(z)}{\sin z^2}\,dz, & \text{arc}\cot x = z.
\end{cases}
$$

Z. B. ergiebt sich:

$$
(16) \qquad \int (\text{arc}\sin x)^n\,dx = \int u^n \cos u\,du,
$$

so dass man jetzt die Formel (2) oder (6) anwenden kann, und:

$$
(17) \qquad \int (\text{arc}\cos x)^n\,dx = -\int v^n \sin v\,dv,
$$

was nach (1) oder (5) weiter zu behandeln ist.

Hieraus folgt im Besondern unter Benutzung von (4):

$$
(18) \quad \int (\text{arc}\sin x)^2\,dx = \int u^2 \cos u\,du = u^2 \sin u + 2u\cos u - 2\sin u
$$

$$
= x(\text{arc}\sin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\cdot \text{arc}\sin x - 2x.
$$

Ist das Differential das Product aus einer inversen Kreisfunction und dem Differential einer algebraischen Function, so kann man das Gesammtintegral stets auf das Integral einer algebraischen Function reduciren.

Bezeichnet man nämlich

$$
\int f(x)\,dx = F(x),
$$

so folgt durch partielle Integration:

$$(19)\quad \int f(x)\arcsin x\,dx = F(x)\arcsin x - \int \frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$(20)\quad \int f(x)\arccos x\,dx = F(x)\arccos x + \int \frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$(21)\quad \int f(x)\,\mathrm{arc\,tng}\,x\,dx = F(x)\,\mathrm{arc\,tng}\,x - \int \frac{F(x)}{1+x^2}dx,$$

$$(22)\quad \int f(x)\,\mathrm{arc\,cot}\,x\,dx = F(x)\,\mathrm{arc\,cot}\,x + \int \frac{F(x)}{1+x^2}dx.$$

Wie man die Integrale auf den rechten Seiten von (19) bis (22) zu behandeln hat, ist in den beiden vorhergehenden Capiteln gelehrt worden.

Im Besondern ist demnach:

$$\int x\,\mathrm{arc\,tng}\,x = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arc\,tng}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2)\,\mathrm{arc\,tng}\,x - \frac{1}{2}x.$$

§ 103.

Integration von Differentialen, welche aus der Variabeln und ihren Exponentialfunctionen oder Logarithmen algebraisch zusammengesetzt sind. — Der Integrallogarithmus.

Da

$$a^x = (e^x)^{la}, \quad l\frac{x}{a} = \frac{1}{la}\cdot lx$$

ist, so darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit sowohl bei den Exponentialfunctionen als auch bei den Logarithmen stets e als Basis voraussetzen.

Ausserdem ist, was schon in § 47 erwähnt und benutzt wurde:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \int f(x, e^x)\,dx = \int f(lu, u)\,\frac{du}{u}, \\ \int \varphi(u, lu)\,du = \int \varphi(e^x, x)\,e^x\,dx\cdot \end{array}\right\}, \ (e^x = u,\ x = lu).$$

Dies zeigt die Reduction von Integralen, deren Differentiale ausser der Variabeln noch Exponentialfunctionen oder Logarithmen enthalten, auf einander an; so dass man nur eine von diesen beiden Gattungen einer näheren Betrachtung zu unterwerfen braucht, um auch bei der andern das Wesentliche zu übersehn.

Hier liegt uns, nachdem wir uns in den §§ 45 und 47 schon einmal mit dem Gegenstande beschäftigt haben, nur noch ob, eine Nachlese zu halten und diejenigen wichtigeren Fälle in Betracht zu ziehn, zu deren Bewältigung die Mittel erst später gewonnen sind.

Zunächst beachte man den folgenden Satz:

Ist der Integrand eine algebraische Function von $e^x = u$, so ist das Differential für die Variable u algebraisch. Denn es folgt:

$$(2)\qquad \int f(e^x)\,dx = \int \frac{f(u)}{u}\,du.$$

Z. B. ist:

$$(3)\qquad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{du}{\left(u + \frac{1}{u}\right)\cdot u} = \int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arc\,tng} u + C$$

$$= \operatorname{arc\,tng}(e^x) + C,$$

$$(4)\qquad \int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{du}{(u+1)\,u} = l\,\frac{u}{u+1} + C$$

$$= C - l(1 + e^{-x}),$$

$$(5)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u-1}} = \arccos\frac{2-u}{u} + C \ \ldots\ \S\ 93,\ (5)$$

$$= \arccos(2e^{-x} - 1) + C = 2\operatorname{arctng}\sqrt{e^x - 1} + C$$

und demnach:

(6) $$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{4},$$

(7) $$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1} = l2,$$

(8) $$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \pi.$$

Ferner folgt aus (1) der Satz:

Ist der Integrand eine algebraische Function von $lu = x$, so ist er das Product aus e^x und einer algebraischen Function von x, nämlich:

(9) $$\int f(lu)\,du = \int f(x)\,e^x\,dx.$$

Wo die bereits in den §§ 45 und 47 entwickelten Formeln nicht ausreichen, wird man demnach entweder für e^x oder für $f(x)$ oder auch für beide Functionen gleichzeitig eine unendliche Reihe einzuführen haben, um die Integration durch Elementarfunctionen zu bewerkstelligen. Behält man zunächst e^x bei, so bleibt die Auswerthung von Integralen von der Form

$$\int x^m e^x\,dx = \int (lu)^m\,du$$

übrig, welche theilweise bereits in § 47 behandelt sind. Sonst kann man vermittelst der bekannten Reihenentwickelung von e^x jedenfalls

$$\int x^m e^x\,dx = \int dx \left\{ x^m + \frac{x^{m+1}}{1!} + \frac{x^{m+2}}{2!} + \frac{x^{m+3}}{3!} + \cdots \right\}$$

$$= C + \frac{x^{m+1}}{(m+1)} + \frac{x^{m+2}}{1!(m+2)} + \frac{x^{m+3}}{2!(m+3)} + \frac{x^{m+4}}{3!(m+4)} + \cdots$$

darstellen: mit Ausschluss von $x = \pm\infty$ und von ganzen negativen Werthen des m.

Namentlich interessirt der Fall, in welchem $m = -1$ ist und $x = -\infty$ oder $u = 0$ zur unteren Grenze genommen wird, d. h. es interessirt namentlich das Integral

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x} dx = \int_{0}^{u} \frac{du}{l u}.$$

Dasselbe wird der **Integrallogarithmus** von u genannt und gewöhnlich durch li · u bezeichnet.

Es fragt sich zunächst, in welchem Umfange dem Integrallogarithmus durch diese Definition ein völlig bestimmter Werth ertheilt ist. Denn obgleich die untere Grenze des Integrals

(10) $$\text{li} \cdot u = \int_{0}^{u} \frac{du}{l u} = \int_{-\infty}^{l u} \frac{e^x}{x} dx$$

keine Schwierigkeit macht, weil $\frac{1}{l u}$ bei der Annäherung von u an Null verschwindet, so darf nicht übersehn werden, dass $\frac{1}{l u}$ bei der Annäherung von u an 1 negativ unendlich wächst, und dass

$$\lim_{u=1} \cdot \frac{1-u}{l u} = \lim_{u=1} \cdot \frac{\frac{d(1-u)}{du}}{\frac{d l u}{du}} = \lim_{u=1} \cdot \frac{-1}{u^{-1}} = -1$$

ein völlig bestimmter endlicher Werth ist. Daher hat man nach § 50:

$$\lim_{u=1} \cdot \left[\int_{0}^{u} \frac{du}{l u} : \int_{0}^{u} \frac{du}{1-u} \right] = -1$$

oder:

(11) $$\lim_{u=1} \cdot \frac{\text{li} \cdot u}{l(1-u)} = +1,$$

so dass der Integrallogarithmus li·u bei der Annäherung von u an 1 negativ unendlich wächst, wie $l(1-u)$, und nur für $0 \overline{\gtrless} u < 1$ einen Sinn hat, sich aber innerhalb dieses Intervalles von $\text{li} \cdot 0 = 0$ aus stetig ändert und demnach stets negativ ist.

Eine Entwickelung des Integrallogarithmus li · u nach steigenden Potenzen von u ist unmöglich, wie sich aus § 72 ergiebt, weil

seine Derivirte $\frac{1}{l u} = \frac{1}{l(re^{i\varrho})} = \frac{1}{lr + i\varrho}$ ihren Werth ändert, wenn ϱ um 2π wächst. Man kann ihn aber nach steigenden Potenzen von $l u = x$ entwickeln.

Denn da

$$(12) \qquad \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots$$

ist, so erhält man:

$$\int \frac{e^x}{x} dx = C + l x + \frac{x^1}{1!1} + \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^4}{4!4} + \cdots,$$

wo die Constante C nur von der unteren Grenze des Integrals abhängt.

Nach dem Obigen besitzt das Integral für die untere Grenze $x = -\infty$ oder $u = 0$ einen bestimmten endlichen Werth. Also ist die Constante C auch bei dieser unteren Grenze eine völlig bestimmte Zahl M und muss sich ermitteln lassen, wenngleich unsere Reihenentwickelung nicht direct dazu tauglich ist.

Nach Mascheroni ist sie:

(13) $\qquad M = 0,577215\ 664901\ 532860\ 618112\ldots$ [1])

Und man hat mit diesem Werthe von C:

$$(14) \qquad li \cdot u = M + \frac{1}{2} l(l u)^2 + \frac{(l u)^1}{1!1} + \frac{(l u)^2}{2!2} + \frac{(l u)^3}{3!3} + \frac{(l u)^4}{4!4} + \cdots$$

$$(15) \qquad li \cdot e^{-x} = M + l x \quad - \frac{x}{1!1} + \frac{x^2}{2!2} - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^4}{4!4} - \cdots$$

$$\{0 < x < +\infty\}$$

Um eine **Formel zur Berechnung** von M zu erhalten, stellen wir die letzte Gleichung noch in der Form

---

[1]) Wir bezeichnen sie mit M, um dadurch an ihren ausführlichsten Berechner zu erinnern, nennen sie aber die Eulersche **Constante** wegen der Bedeutung der **Eulerschen** Arbeiten auf demjenigen Gebiete, auf welchem diese Constante eine Rolle spielt. Nach Euler hat Legendre am meisten zur Durchforschung desselben beigetragen.

$$(16)\qquad \mathrm{li}\cdot e^{-x} = M + l x + \int_0^x \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx$$

dar, welche sich mit Rücksicht auf (12) sofort ergiebt, und ziehen aus ihr und der Definitionsgleichung (10), nach welcher $\lim_{x=\infty} \cdot (\mathrm{li}\cdot e^{-x}) = 0$ ist, die Folgerung, dass

$$M = \lim_{n=\infty} \cdot \left\{ \int_0^n \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx - l n \right\}$$

sein müsse.

Bedenkt man nun, dass nach § 40, (3) desto genauer, je grösser n ist,

$$e^{-x} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

gesetzt werden kann, sobald nur x nicht $> n$ gemacht wird, so erhält man demnach auch:

$$M = \lim_{n=\infty} \cdot \left\{ \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,dx - l n \right\}.$$

Setzt man endlich hierin

$$1 - \frac{x}{n} = z, \quad x = n(1-z), \quad dx = -n\,dz,$$

so folgt:

$$M = \lim_{n=\infty} \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{1-z^n}{1-z}\,dz - l n \right\}$$

oder, weil

$$\frac{1-z^n}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}$$

ist:

$$(17)\qquad M = \lim_{n=\infty} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - l n \right\}.$$

Direct zur numerischen Berechnung von M ist diese Formel noch wenig geeignet, weil man n sehr gross annehmen müsste, um eine nennenswerthe Genauigkeit zu erhalten. Man kann sie aber leicht so umgestalten, dass die Rechnung bequemer wird.

Nach § 42, (3) ist nämlich:

$$l\left(1 \pm \frac{1}{r}\right) = \pm \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \pm \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{r^4} \pm \cdots$$

Macht man in dieser Gleichung r nach der Reihe $= 2, 3, 4, \ldots, n$ und summirt mit Rücksicht auf die Relation $la + lb = l(ab)$, so erhält man, indem der Abkürzung wegen

$$S_k = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots + \frac{1}{n^k}$$

geschrieben wird, bei den oberen Vorzeichen:

$$l\,\frac{n+1}{2} = S_1 - \frac{1}{2} \cdot S_2 + \frac{1}{3} \cdot S_3 + \frac{1}{4} \cdot S_4 + \cdots$$

und bei den unteren:

$$l\,\frac{1}{n} = -S_1 - \frac{1}{2} \cdot S_2 - \frac{1}{3} \cdot S_3 - \frac{1}{4} \cdot S_4 - \cdots.$$

Aus diesen beiden Relationen folgt beziehungsweise:

$$1 + S_1 - l(n+1) = 1 - l2 + \frac{1}{2} S_2 - \frac{1}{3} S_3 + \frac{1}{4} S_4 - \frac{1}{5} S_5 + \cdots$$

$$1 + S_1 - ln \quad = 1 \quad - \frac{1}{2} S_2 - \frac{1}{3} S_3 - \frac{1}{4} S_4 - \frac{1}{5} S_5 - \cdots$$

Lässt man nun n unendlich wachsen, so ist nach (17) der Grenzwerth eines jeden dieser beiden Ausdrücke $= M$, und zwar derjenige des letzten Ausdrucks unmittelbar nach der Angabe von (17), derjenige des vorletzten aber deshalb, weil die Gleichung $l(n+1) = ln + l\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ gilt, in welcher der letzte Summand die Null zum Grenzwerthe hat.

Die S_k der rechten Seiten verwandeln sich bei unendlich wachsendem n in Summen convergenter Reihen

(18) $$\varsigma_k = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \cdots$$

Demnach ist nach (17):

$$(19)\qquad M = 1 - l2 + \frac{1}{2}\varsigma_2 - \frac{1}{3}\varsigma_3 + \frac{1}{4}\varsigma_4 - \frac{1}{5}\varsigma_5 + \cdots,$$

$$(20)\qquad M = 1 \qquad - \frac{1}{2}\varsigma_2 - \frac{1}{3}\varsigma_3 - \frac{1}{4}\varsigma_4 - \frac{1}{5}\varsigma_5 - \cdots;$$

und wenn man noch die halbe Summe dieser beiden Ausdrücke für M nimmt:

$$(21)\qquad M = 1 - l\sqrt{2} - \frac{1}{3}\varsigma_3 - \frac{1}{5}\varsigma_5 - \frac{1}{7}\varsigma_7 - \frac{1}{9}\varsigma_9 - \cdots.$$

Namentlich der letzte Ausdruck convergirt schon ziemlich schnell.[1]) Denn es ist:

$$(22)^{2)}\quad \begin{cases} \frac{1}{3}\cdot\varsigma_3 = 0,067\,352\,301\,1, & \frac{1}{17}\cdot\varsigma_{17} = 0,000\,000\,449\,2, \\ \frac{1}{5}\cdot\varsigma_5 = 0,007\,385\,551\,0, & \frac{1}{19}\cdot\varsigma_{19} = 0,000\,000\,100\,4, \\ \frac{1}{7}\cdot\varsigma_7 = 0,001\,192\,753\,9, & \frac{1}{21}\cdot\varsigma_{21} = 0,000\,000\,022\,7, \\ \frac{1}{9}\cdot\varsigma_9 = 0,000\,223\,154\,8, & \frac{1}{23}\cdot\varsigma_{23} = 0,000\,000\,005\,2, \\ \frac{1}{11}\cdot\varsigma_{11} = 0,000\,044\,926\,2, & \frac{1}{25}\cdot\varsigma_{25} = 0,000\,000\,001\,2, \\ \frac{1}{13}\cdot\varsigma_{13} = 0,000\,009\,439\,5, & \frac{1}{27}\cdot\varsigma_{27} = 0,000\,000\,000\,3, \\ \frac{1}{15}\cdot\varsigma_{15} = 0,000\,002\,039\,2, & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und nach § 43:

$$l\sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot l\,2 = 0,346\,573\,590\,3.$$

Mit Benutzung dieser Werthe bis ς_{15} findet man M aus (21) schon auf 6 Decimalstellen genau, wie man sich leicht überzeugt.

---

[1]) Eine bequemere Formel wird in § 112, (10) aufgestellt.

[2]) Eine ausführlichere Tafel in 19 Decimalstellen hat Legendre im 2ten Theil seiner Traité des fonctions elliptiques auf Seite 432 gegeben.

§ 104.
Integrale von Differentialen, welche Exponential- und Kreisfunctionen enthalten.

Es ist

$$\int e^{(a+ib)x}\,dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}\cdot e^{(a+ib)x},$$

zu welchem Resultate man sofort gelangt, wenn man $(a+ib)x$ als Integrationsvariable einführt.

Denkt man sich nun a und b als reelle Zahlen, so folgert man hieraus durch die Sonderung der reellen Bestandtheile:

$$(1)\qquad \int e^{ax}\cos(bx)\,dx = C + e^{ax}\cdot\frac{a\cos(bx)+b\sin(bx)}{a^2+b^2},$$

$$(2)\qquad \int e^{ax}\sin(bx)\,dx = C + e^{ax}\cdot\frac{a\sin(bx)-b\cos(bx)}{a^2+b^2}.$$

Selbstverständlich kann man dieselben Resultate auch dadurch erhalten, dass man die linken Seiten partiell integrirt.

Für ein negatives $a = -\alpha$ folgt hieraus:

$$\left.\begin{aligned}(3)\qquad &\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(bx)\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+b^2},\\ (4)\qquad &\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin(bx)\,dx = \frac{b}{\alpha^2+b^2},\end{aligned}\right\}\ (\alpha > 0);$$

und es lassen sich aus diesen Gleichungen neue Relationen durch Differentiation und Integration nach den Parametern α und b ableiten.

Z. B. ergiebt sich aus (3) und (4), obgleich diese Gleichungen für den Substitutionswerth $\alpha = 0$ nicht mehr zutreffen, durch Integration nach α zwischen einem positiven α und $\lim\cdot\alpha = 0$:

$$(6)\qquad \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{x}\cos(bx)\,dx = l\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{b^2}},$$

(7) $$\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{x} \sin(bx)\, dx = \operatorname{arc\,tng} \frac{\alpha}{b}.$$

Lässt man α in (7) unendlich wachsen, so erhält man — wie in § 102, (11), für $b > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(bx)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Es verdient noch angemerkt zu werden, dass man in (6) und (7) nicht unter dem Integralzeichen nach b differentiiren darf.

Die Integrale

$$\int e^{ax} (\cos bx)^n dx, \quad \int e^{ax} (\sin bx)^n dx$$

kann man, falls $n+1>0$ ist, nach § 68 und § 74 stets durch Integrale von der Form (1) oder (2) ausdrücken, da sich dann $(\cos bx)^n$ und $(\sin bx)^n$ durch die erste Potenz der Cosinus oder Sinus der Vielfachen von x darstellen lassen. Und zwar erhält man geschlossene Ausdrücke, wenn n eine ganze Zahl ist, sonst unendliche Reihen.

Nach dieser Methode ergiebt sich z. B.:

$$\int e^{ax} \cos x^n dx$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \int e^{ax} dx \cdot \left\{ \cos nx + \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x + \cdots \right\},$$

d. i. nach (1) für $n+1>0$:

(8) $$\int e^{ax} \cos x^n\, dx - C$$

$$= \frac{e^{ax}}{2^n} \cdot \left\{ \frac{a \cos nx + n \sin nx}{a^2+n^2} + \binom{n}{1} \frac{a \cos(n-2)x + (n-2)\sin(n-2)x}{a^2+(n-2)^2} + \cdots \right\},$$

(9) $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos x^n\, dx$$

$$= \frac{\alpha}{2^n} \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha^2+n^2} + \frac{\binom{n}{1}}{\alpha^2+(n-2)^2} + \frac{\binom{n}{2}}{\alpha^2+(n-4)^2} + \cdots \right\}.$$

$$\{\alpha > 0, \quad n+1 > 0\}$$

Anstatt die Functionen des vielfachen Arcus einzuführen, kann man aber auch vermittelst der partiellen Integration zum Ziele gelangen.

Es ist nämlich, wenn man zunächst nur die Integration

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax}$$

ausführt:

$$\int e^{ax}(\cos bx)^n\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\,e^{ax}(\cos bx)^n + \frac{bn}{a}\int e^{ax}(\cos bx)^{n-1}\sin bx\,dx,$$

ferner bei analogem Verfahren:

$$\int e^{ax}(\cos bx)^{n-1}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax}(\cos bx)^{n-1}\sin bx$$

$$+ \frac{b}{a}\int e^{ax}\left[(n-1)(\cos bx)^{n-2}(\sin bx)^2 - (\cos bx)^n\right]dx$$

$$= \frac{1}{a}\,e^{ax}(\cos bx)^{n-1}\sin bx$$

$$+ \frac{b(n-1)}{a}\int e^{ax}(\cos bx)^{n-2}\,dx - \frac{bn}{a}\int e^{ax}(\cos bx)^n\,dx.$$

Setzt man dies in die obige Gleichung ein und löst sie dann für $\int e^{ax}(\cos bx)^n dx$ als Unbekannte auf, so findet man:

$$(10)\quad \int e^{ax}(\cos bx)^n\,dx = C + e^{ax}(\cos bx)^{n-1}\cdot\frac{a\cos bx + bn\sin bx}{a^2+b^2n^2}$$

$$+ \frac{b^2n(n-1)}{a^2+b^2n^2}\cdot\int e^{ax}(\cos bx)^{n-2}\,dx.$$

Durch ein ganz analoges Verfahren erhält man:

$$(11)\quad \int e^{ax}(\sin bx)^n\,dx = C + e^{ax}(\sin bx)^{n-1}\cdot\frac{a\sin bx - bn\cos bx}{a^2+b^2n^2}$$

$$+ \frac{b^2n(n-1)}{a^2+b^2n^2}\cdot\int e^{ax}(\sin bx)^{n-2}\,dx.$$

Da man also vermittelst dieser beiden Formeln n schrittveise um 2 erniedrigen kann, so gelangt man dabei, wenn n ganz und positiv ist, allmählich zu bekannten Integralen.

Schliesslich entwickeln wir noch

$$\int x^n e^{(a+ib)x} dx = x^n \int e^{(a+ib)x} dx - \int \left[n x^{n-1} \int e^{(a+ib)x} dx \right] dx,$$

$$12) \int x^n e^{(a+ib)x} dx = \frac{x^n e^{(a+ib)x}}{a+ib} - \frac{n}{a+ib} \cdot \int x^{n-1} e^{(a+ib)x} dx.$$

Sondert man die reellen Bestandtheile, so folgt:

$$13) \quad \int x^n e^{ax} \cos bx\, dx = x^n e^{ax} \cdot \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2}$$

$$- \frac{na}{a^2+b^2} \cdot \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx\, dx - \frac{nb}{a^2+b^2} \cdot \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx\, dx,$$

$$14) \quad \int x^n e^{ax} \sin bx\, dx = x^n e^{ax} \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2}$$

$$- \frac{na}{a^2+b^2} \cdot \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx\, dx + \frac{nb}{a^2+b^2} \cdot \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx\, dx.$$

ierdurch ist die Reduction auf ein niedrigeres n vollzogen. an thut jedoch, wenn es sich um die Auswerthung der Integrale 3) und (14) bei einem ganzen positiven n handelt, besser daran, cht die Formeln (13) und (14) zur weiteren Entwickelung zu nutzen, sondern auf die Formel (12) zurückzugreifen. Denn s dieser folgt zunächst ohne Weiteres:

$$\int x^n e^{(a+ib)x} dx$$

$$= e^{(a+ib)x} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^n}{a+ib} - \frac{n x^{n-1}}{(a+ib)^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(a+ib)^3} - \cdots \\ \qquad \cdots + (-1)^n \cdot \frac{n(n-1)\cdots 1 \cdot x^0}{(a+ib)^{n+1}} \end{array} \right\}.$$

Und wenn man nun noch

$$a + ib = m e^{i\mu},$$

d. i.:

$$a = m \cos \mu, \quad b = m \sin \mu, \quad m^2 = a^2 + b^2$$

einführt, so ergiebt die Sonderung der reellen Bestandtheile:

$$(15) \qquad \int x^n e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$= e^{ax} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{x^n \cos(bx - \mu)}{m^1} - 1!\binom{n}{1} \frac{x^{n-1} \cos(bx - 2\mu)}{m^2} + \cdots \\ & \cdots + (-1)^n \cdot n! \binom{n}{n} \cdot \frac{x^0 \cos(bx - (n+1)\mu)}{m^{n+1}} \end{aligned} \right\}.$$

$$(16) \qquad \int x^n e^{ax} \sin bx \, dx$$

$$= e^{ax} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{x^n \sin(bx - \mu)}{m^1} - 1!\binom{n}{1} \frac{x^{n-1} \sin(bx - 2\mu)}{m^2} + \cdots \\ & \cdots + (-1)^n \cdot n! \binom{n}{n} \cdot \frac{x^0 \sin(bx - (n+1)\mu)}{m^{n+1}} \end{aligned} \right\}.$$

§ 105.

Die Gammafunction (Eulersches Integral zweiter Gattung.

Wir haben uns bereits in § 50 die Ueberzeugung verschafft, dass das „Eulersche Integral zweiter Gattung“

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} dx$$

bei solchen reellen Werthen von μ einen bestimmten endlichen Werth besitzt, welche > 0 sind, während das Integral für $\mu < 0$ keinen Sinn hat.

Daraus folgt sofort, dass ein Gleiches für

$$\Gamma(\mu + i\nu) = \int_0^\infty x^{\mu + i\nu - 1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \cdot e^{i\nu l x} dx$$

gilt, weil die Differentiale von $\Gamma(\mu)$ und $\Gamma(\mu + i\nu)$ sich nur um den Factor $e^{i\nu lx}$ unterscheiden, dessen Modul endlich (nämlich $= 1$) ist.

Nehmen wir die zweite Form des Integrals hinzu, welche durch Substitution von x für e^{-x} erhalten wird — vergl. § 50 — und nehmen auch x^μ als Integrationsvariable, so sehen wir demnach, dass die Gammafunction durch die Formel

$$(1) \qquad \Gamma(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} dx = \int_0^1 \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} dx = \frac{1}{\mu} \cdot \int_0^\infty e^{-\sqrt[\mu]{x}} dx$$

auf mehrfache Weise völlig definirt ist, so lange μ eine positive Zahl (excl. Null) oder auch eine complexe Zahl bedeutet, deren rein reeller Bestandtheil positiv ist.

Da vermittelst partieller Integration

$$\int x^\mu \cdot e^{-x} dx = x^\mu \cdot \int e^{-x} dx - \mu \cdot \int \left[x^{\mu-1} \int e^{-x} dx\right]$$
$$= -x^\mu e^{-x} + \mu \cdot \int x^{\mu-1} e^{-x} dx$$

gefunden wird, so ergiebt sich durch Substitution der Grenzen 0 und ∞, dass — zunächst unter den für μ aufgestellten Bedingungen —

$$(2) \qquad \Gamma(\mu + 1) = \mu \cdot \Gamma(\mu)$$

und dass im Speciellen

$$(3) \qquad \Gamma(1) = 1,$$

ist. Deshalb geht bei einem ganzen positiven n hervor:

$$(4) \qquad \Gamma(n + 1) = n!$$

als besonderer Fall der allgemeinen Formel

$$(5) \qquad \Gamma(\mu + 1) = \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \cdots (\mu - n)\,\Gamma(\mu - n),$$

zu welcher die Formel (2) durch wiederholte Anwendung auf sich selbst führt.

Man kann $\Gamma(\mu)$, was zuerst Gauss [1]) in den Commentationes

[1]) Gauss bezeichnet $\Gamma(\mu) = \Pi(\mu - 1)$.

Gotting. rec. T. II, anno 1812, gezeigt hat, durch ein unendliches Product darstellen, welches wir jetzt entwickeln wollen.

Nach § 40 ist $e^{-x} = \lim_{n=\infty} . \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$; und zwar gilt, weil

$$\frac{\partial}{\partial n} \cdot \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \cdot \left[\left(1-\frac{x}{n}\right) l \left(1-\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}\right]$$

$$= \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \cdot \left[\frac{x^2}{1 \cdot 2n^2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3n^3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4n^4} + \cdots\right]$$

für $0 < x \overline{\gtrless} n$ positiv ist, die Scala:

$$e^{-x} > \left(1-\frac{x}{n}\right)^n.$$

Hieraus folgt nach (1):

$$\Gamma(\mu) > \int_0^n x^{\mu-1} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Substituirt man nun $1-\frac{x}{n}=u$, so kann man dies auch so schreiben:

(6) $$\Gamma(\mu) > n^\mu \cdot \int_0^1 u^n (1-u)^{\mu-1} du = n^\mu \cdot (n+1, \mu).$$

Bedenkt man ferner, dass für $x > 0$

$$e^x > \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

ist — wie man durch eine der obigen ganz analoge Schlussweise sofort erkennt, so folgt nach (1):

$$\Gamma(\mu) < \int_0^\infty x^{\mu-1} \left(1+\frac{x}{p}\right)^{-p} dx$$

oder wenn man hier $1+\frac{x}{p}=\frac{1}{u}$ einführt:

$$\Gamma(\mu) < p^\mu \cdot \int_0^1 u^{p-\mu-1}(1-u)^{\mu-1}\,du = p^\mu \cdot (p-\mu,\mu);$$

d. i. für $p = n + \mu + 1$:

$$\Gamma(\mu) < (n+\mu+1)^\mu \cdot (n+1,\mu). \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt:

$$n^\mu \cdot (n+1,\mu) < \Gamma(\mu) < (n+\mu+1)^\mu \cdot (n+1,\mu), \tag{8}$$

so wie auch:

$$\frac{\Gamma(\mu)}{\left(1+\frac{m+1}{n}\right)^\mu} < n^\mu \cdot (n+1,\mu) < \Gamma(\mu). \tag{9}$$

Die beiden Scalen (8) und (9) stellen Beziehungen zwischen $\Gamma(\mu)$ und dem Eulerschen Integral erster Gattung $(n+1,\mu)$ dar, welche zur Berechnung von $\Gamma(\mu)$ mit einem erkennbaren Grade der Genauigkeit benutzt werden können, und zeigen, dass

$$\Gamma(\mu) = \lim_{n=\infty} \cdot n^\mu (n+1,\mu) \tag{10}$$

ist.

Kehrt man die Formel (2) des § 99 um, schreibt sie also in der Gestalt

$$(n+1,\mu) = \frac{n}{n+\mu} \cdot (n,\mu),$$

wendet sie dann wiederholt auf sich selbst an und benutzt aus § 99, (3) den Werth $(1,\mu) = \frac{1}{\mu}$, so ergiebt sich aus (8):

$$\frac{n^\mu}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{2}{\mu+2} \cdot \frac{3}{\mu+3} \cdots \frac{n}{\mu+n} \tag{11}$$
$$< \Gamma(\mu) < \frac{(n+\mu+1)^n}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{2}{\mu+2} \cdot \frac{3}{\mu+3} \cdots \frac{n}{\mu+n},$$

$$\Gamma(\mu) = \frac{1^\mu}{\mu} \cdot \frac{2^\mu}{1^{\mu-1}(\mu+1)} \cdot \frac{3^\mu}{2^{\mu-1}(\mu+2)} \cdot \frac{4^\mu}{3^{\mu-1}(\mu+3)} \cdots \tag{12}$$

Definirt man $\Gamma(\mu)$ durch diese Gleichung (12) — anstatt durch das bestimmte Integral (1) — so erhält $\Gamma(\mu)$ eine völlig bestimmte Bedeutung für alle reellen und complexen Werthe von μ und wird — natürlich abgesehn von singulären Punkten — eine generell stetige Function von μ.

Es würde uns zu weit führen, wenn wir hier näher darauf eingehn wollten.[1]) Wir begnügen uns mit der Entwickelung der Grundeigenschaften der Gammafunctionen, d. i. namentlich ihrer einfachsten Beziehungen zu einander und zu den Eulerschen Integralen erster Gattung.

Stellt man aus (12) die unendlichen Producte für $\Gamma(\mu+\nu)$ und $\Gamma(\mu-\nu)$ auf und multiplicirt dieselben mit einander, so erhält man:

$$\Gamma(\mu+\nu)\cdot\Gamma(\mu-\nu)$$

$$=\frac{1^{2\mu}}{\mu^2-\nu^2}\cdot\frac{2^{2\mu}}{1^{2\mu-2}\left[(\mu+1)^2-\nu^2\right]}\cdot\frac{3^{2\mu}}{2^{2\mu-2}\left[(\mu+2)^2-\nu^2\right]}\cdot\frac{4^{2\mu}}{3^{2\mu-2}\left[(\mu+3)^2-\nu^2\right]}\cdots$$

Hieraus folgt unter abermaliger Benutzung von (12):

$$(13)\qquad \frac{\left\{\Gamma(\mu)\right\}^2}{\Gamma(\mu+\nu)\cdot\Gamma(\mu-\nu)}$$

$$=\left[1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right]\cdot\left[1-\frac{\nu^2}{(\mu+1)^2}\right]\cdot\left[1-\frac{\nu^2}{(\mu+2)^2}\right]\cdot\left[1-\frac{\nu^2}{(\mu+3)^2}\right]\cdots$$

Für $\mu=1$ wird der Zähler der linken Seite $=1$ (nach (3)) und die rechte Seite $=\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$ (nach § 66, (5)). Daher ergiebt die Gleichung (13) als speciellen Fall:

$$(14)\qquad \Gamma(1+\nu)\cdot\Gamma(1-\nu)=\frac{\pi\nu}{\sin(\pi\nu)}.$$

Und es ist bemerkenswerth, dass — wenn man hierin $i\nu$ für ν schreibt — die Relation

$$(15)\qquad \Gamma(1+i\nu)\cdot\Gamma(1-i\nu)=\frac{2\pi\nu}{e^{\pi\nu}-e^{-\pi\nu}}.$$

erhalten wird.

[1]) Siehe Hankel im neunten Bande der Zeitschrift für Math. u. Phys

Substituirt man aus (2) in (14) $\Gamma(1+\nu)=\nu\cdot\Gamma(\nu)$, so folgt:

$$(16)\qquad \Gamma(\nu)\cdot\Gamma(1-\nu)=\frac{\pi}{\sin(\pi\nu)};$$

und dies giebt für $\nu=\frac{1}{2}$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

oder, wenn man auf die in (1) ausgesprochene Bedeutung von $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ zurückgreift:

$$(17)\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{l\frac{1}{x}}}=2\cdot\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

Der Zusammenhang zwischen den Eulerschen Integralen erster und zweiter Gattung ist in der vorangehenden Entwickelung einigermaassen verdeckt. Wir fügen deshalb noch die folgende hinzu, welche ausserdem geeignet ist, die Fruchtbarkeit des in § 34 bewiesenen Satzes zu beleuchten.

Setzt man in dem Integral

$$\int_0^\infty u^{\mu-1}e^{-(1+z)u}du$$

unter der Voraussetzung positiver Werthe von μ und $(1+z)$

$$(1+z)\cdot u=x,\quad du=\frac{dx}{1+z},$$

so erhält man:

$$\int_0^\infty u^{\mu-1}e^{-(1+z)u}du=\frac{1}{(1+z)^\mu}\cdot\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(\mu)}{(1+z)^\mu}$$

und folglich:

$$\int_0^\infty \left[z^{\nu-1} dz \cdot \int_0^\infty u^{\mu-1} e^{-(1+z)u} du\right]$$

$$= \Gamma(\mu) \cdot \int_0^\infty \frac{z^{\nu-1}}{(1+z)^\mu} dz = \Gamma(\mu) \cdot (\nu, \mu - \nu) \cdot$$

— das Letztere nach § 99, (7).

Kehrt man aber auf der linken Seite die Integrationsfolge um, was nach § 34 gestattet ist, so geht das Doppelintegral über in:

$$\int_0^\infty \left[u^{\mu-1} du \int_0^\infty z^{\nu-1} e^{-(1+z)u} dz\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \cdot \int_\varepsilon^\infty \left[u^{\mu-1} e^{-u} du \cdot \int_0^\infty z^{\nu-1} e^{-zu} dz\right];$$

und falls man $v = zu$ austatt des z als erste Integrationsvariable einführt, so folgt:

$$\int_\varepsilon^\infty \left[u^{\mu-\nu-1} e^{-u} du \cdot \int_0^\infty v^{\nu-1} e^{-v} dv\right] = \int_\varepsilon^\infty \left[u^{\mu-\nu-1} e^{-u} du \cdot \Gamma(\nu)\right]$$

$$= \Gamma(\nu) \cdot \int_\varepsilon^\infty u^{\mu-\nu-1} e^{-u} du \cdot$$

Hier ist es nicht ohne Weiteres gestattet, $\varepsilon = 0$ zu machen, weil die Substitution $v = zu$ in dem Integral

$$\int_0^\infty z^{\nu-1} e^{-zu} dz$$

keinen Sinn hat, sobald $u = 0$ wird. Denn für $u = 0$ geht unser Integral über in

$$\int_0^\infty z^{\nu-1} dz = \frac{1}{\nu} \cdot \left[z^\nu\right]_0^\infty \cdot$$

Es hat also selbst keines Falls einen Sinn, welchen Werth ν auch besitzen mag. Jedoch schliesst man aus dem Obigen mit Sicherheit, dass

$$\int_0^\infty \left[z^{\nu-1}\,dz \int_0^\infty u^{\mu-1}\,e^{-(1+z)u}\,du\right] = \lim_{\varepsilon=0} \cdot \Gamma(\nu) \int_\varepsilon^\infty u^{\mu-\nu-1}\,e^{-u}\,du$$
$$= \Gamma(\nu)\cdot\Gamma(\mu-\nu)$$

sein müsse, wenn $\mu > \nu > 0$ ist.

Daher ist:

$$(18)\quad \begin{cases} \Gamma(\nu)\cdot\Gamma(\mu-\nu) = (\nu, \mu-\nu)\cdot\Gamma(\mu), \; (\mu > \nu > 0), \\ (m, n) = \dfrac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \; (m > 0, \; n > 0). \end{cases}$$

Diese Relation, welche ein Eulersches Integral erster und drei Integrale zweiter Gattung enthält, dient als Ausgangspunkt einer langen Reihe von Entwickelungen, unter denen auch (16) und (17) in Folge von § 99, (8) enthalten sind, ohne dass der Ausdruck (12) bekannt sein müsste.

Wir machen noch darauf aufmerksam, dass die Formel (5) bei reellen Werthen des Arguments von $\Gamma(\mu)$ diese Function auf das Intervall $0 < \mu < 1$ reducirt, und dass die Formel (16) dasjenige Intervall, innerhalb welches die Werthe von $\Gamma(\mu)$ zum Zwecke der leichten Berechnung der übrigen bekannt sein müssen, noch um die Hälfte verkleinert, so dass man für $\Gamma(\mu)$ mit Tafeln ausreicht, welche sich von $\mu = 0$ bis $\mu = \frac{1}{2}$ oder von $\mu = \frac{1}{2}$ bis $\mu = 1$ ausdehnen.

Eine kurze Tafel für die Logarithmen von $\Gamma(\mu)$ wird im nächsten § gegeben werden.

§ 106.

Der Logarithmus der Gammafunction.

Da $\Gamma(\mu)$, und demnach auch $l\,\Gamma(\mu)$, bei der Annäherung von μ an 0 unendlich wächst, so lässt sich keine von diesen beiden Functionen durch eine steigende Potenzreihe in μ mit nur positiven Exponenten entwickeln.

Anders verhält es sich mit $\Gamma(\mu+1)$ und $l\,\Gamma(\mu+1)$, wie man sogleich erkennt, wenn man erwägt, dass nach § 105, (2) $\Gamma(\mu+1)=\mu\cdot\Gamma(\mu)$ ist, dass also nach (1) und (12) des vorigen § die Function

$$(1)\qquad \Gamma(\mu+1)=\int_0^{\infty} e^{-\sqrt[\mu]{x}}\,dx$$

$$=\frac{2^\mu}{1^{\mu-1}(\mu+1)}\cdot\frac{3^\mu}{2^{\mu-1}(\mu+2)}\cdot\frac{4^\mu}{3^{\mu-1}(\mu+3)}\cdots$$

an der Stelle $\mu=0$ endlich — nämlich $=1$ —, monogen und stetig bleibt.

Die Entwickelung von $\Gamma(\mu+1)$ in eine Potenzreihe giebt kein hinreichend übersichtliches Resultat, um uns hier mit ihr zu befassen. Dagegen wird das Resultat für $l\,\Gamma(\mu+1)$ einfach.

Denn bricht man das obige Product für $\Gamma(\mu+1)$ an irgend einer Stelle ab, so hat man — wie man am bequemsten aus § 105, (11) ersieht —

$$\Gamma(\mu+1)+\theta=n^\mu\cdot\frac{1}{1+\mu}\cdot\frac{2}{2+\mu}\cdot\frac{3}{3+\mu}\cdots\frac{n}{n+\mu}$$

$$=n^\mu\cdot\left(1+\frac{\mu}{1}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{\mu}{2}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{\mu}{3}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-1},$$

wo θ eine Zahl bedeutet, welche bei unendlich grossem n verschwindet.

Mithin erhält man unter Benutzung von § 42, (5):

$$l\left\{\Gamma(1+\mu)+\theta\right\}=-\mu\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-l\,n\right)$$

$$+\frac{1}{2}\mu^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$-\frac{1}{3}\mu^3\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\mu^4\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}\right)$$

$$-\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Nach § 103, (17) und (13) ist hier der Grenzwerth des Coefficienten von $-\mu$ bei unendlich wachsendem n die Eulersche Constante

$$M = 0,577\,215\,664\,9\cdots$$

Hinsichtlich der Grenzwerthe der andern Coefficienten vergleiche man § 103, (18) und (22) nebst § 66, (18) und (52).

Es folgt:

(2)
$$l\Gamma(1+\mu)$$
$$= -M\cdot\mu + \frac{1}{2}(1+\varsigma_2)\mu^2 - \frac{1}{3}(1+\varsigma_3)\mu^3 + \frac{1}{4}(1+\varsigma_4)\mu^4 - \cdots$$
$$= -l(1+\mu) + (1-M)\mu + \frac{1}{2}\varsigma_2\mu^2 - \frac{1}{3}\varsigma_3\mu^3 + \frac{1}{4}\varsigma_4\mu^4 - \cdots$$
$$\{-1 < \mu \leqq +1\}.$$

Da demnach

$$l\Gamma(1-\mu)$$
$$= -l(1-\mu) - (1-M)\mu + \frac{1}{2}\varsigma_2\mu^2 + \frac{1}{3}\varsigma_3\mu^3 + \frac{1}{4}\varsigma_4\mu^4 + \cdots$$
$$\{-1 \leqq \mu < +1\}$$

ist, so ergiebt sich einerseits durch Addition beider Gleichungen mit Rücksicht auf § 105, (14):

(3)
$$l\frac{\pi\mu(1-\mu^2)}{\sin(\pi\mu)} = \varsigma_2\mu^2 + \frac{1}{2}\varsigma_4\mu^4 + \frac{1}{3}\varsigma_6\mu^6 + \cdots,$$
$$\{-1 < \mu < +1\}$$

andrerseits aber durch Subtration:

(4)
$$l\Gamma(1+\mu)$$
$$= \frac{1}{2}l\frac{\pi\mu(1-\mu)}{\sin(\pi\mu)(1+\mu)} + (1-M)\mu - \frac{1}{3}\varsigma_3\mu^3 - \frac{1}{5}\varsigma_5\mu^5 - \frac{1}{7}\varsigma_7\mu^7 - \cdots;$$
$$\{-1 < \mu < +1\}$$

und zwar das Letztere, weil nach § 105, (14)

$$\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1-\mu)} = \frac{\{\Gamma(1+\mu)\}^2}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\mu)} = \frac{\{\Gamma(1+\mu)\}^2\cdot\sin(\pi\mu)}{\pi\mu}$$

ist.

Man beachte die hierbei sichtbar gewordene Beziehung zwischen der Gammafunction und dem Integrallogarithmus; auf welche wir hier übrigens nur aufmerksam gemacht haben wollen, ohne sie weiter zu verfolgen.

Da man μ nur zwischen 0 und 0,5 anzunehmen braucht, so haben die obigen Formeln eine ziemlich schnelle Convergenz, weshalb sie sehr wohl zur Berechnung einer Tafel der Logarithmen der Gammafunctionen benutzt werden können.

Eine ziemlich ausführliche Tafel der gemeinen Logarithmen $\underline{l\Gamma(\mu)}$ hat Legendre im zweiten Bande seiner Traité des fonctions elliptiques auf Seite 490 bis 499 mit den Differenzen $\Delta\mu = 0{,}001$ in 12 Decimalen gegeben, aus welcher wir einen kurzen Auszug hierher setzen.

μ	$\underline{l\Gamma(\mu)}$
1,00	0,000 000 000 — 1
1,05	0,988 337 859 — 1
1,10	0,978 340 674 — 1
1,15	0,969 900 696 — 1
1,20	0,962 922 504 — 1
1,25	0,957 321 084 — 1
1,30	0,953 020 277 — 1
1,35	0,949 951 514 — 1
1,40	0,948 052 771 — 1
1,45	0,947 267 708 — 1
1,50	0,947 544 941 — 1
1,55	0,948 837 441 — 1
1,60	0,951 102 018 — 1
1,65	0,954 298 875 — 1
1,70	0,958 391 246 — 1
1,75	0,963 345 059 — 1
1,80	0,969 128 666 — 1
1,85	0,975 712 597 — 1
1,90	0,983 069 344 — 1
1,95	0,991 173 182 — 1
2,00	0,000 000 000

§ 107.

Einige Integrale, welche auf Gammafunctionen zurückkommen.

Verändert man die complexe Zahl

$$z = v e^{i\varphi} = x + iy$$

so, dass ihr Argument φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthalten bleibt, während ihr Modul v unendlich wächst, so bleibt die Function

$$z^{\mu-1} e^{-z}$$

hierbei überall monogen und eindeutig, sobald ein Werth von $z^{\mu-1}$ festgesetzt ist. Wir wollen dieser Potenz denjenigen Werth geben, welcher für $z = +1$ bei stetiger Aenderung in $+1$ übergeht.

Der rein reelle Bestandtheil von μ sei > 0.

Dann besitzt das Integral

$$\int_0^{\zeta} z^{\mu-1} e^{-z} dz$$

nicht nur einen völlig bestimmten Werth (§ 50), sondern es ist dieser Werth auch unabhängig von dem Integrationswege (§ 71).

Mithin folgt, wenn wir $\zeta = \xi + i\eta$ setzen, u. A.:

$$\int_0^{\zeta} z^{\mu-1} e^{-z} dz = \left[\int_0^{\xi} z^{\mu-1} e^{-z} dz\right]_{y=0} + \left[\int_{\xi}^{\xi+i\eta} z^{\mu-1} e^{-z} dz\right]_{x=\xi},$$

d. h., weil im ersten Integral $z = x$ und im zweiten $z = \xi + i \cdot y$ ist:

$$\int_0^{\zeta} z^{\mu-1} e^{-z} dz = \int_0^{\xi} x^{\mu-1} e^{-x} dx + i \cdot \int_0^{\eta} (\xi + iy)^{\mu-1} e^{-(\xi+iy)} dx.$$

Das letzte von den beiden Integralen rechter Hand nähert sich aber bei unendlich wachsendem ξ dem Grenzwerthe Null. Denn wenn wir für den Moment den rein reellen Bestandtheil von μ

durch m bezeichnen und $\eta = \xi \cdot \operatorname{tng} \Phi$ setzen, so ist der Modul des Integranden kleiner als

$$\left(\xi^2 + \eta^2\right)^{\frac{m-1}{2}} e^{-\xi} = \cos \Phi^{1-m} \cdot \xi^{m-1} e^{-\xi},$$

welche Grösse, weil nach der Voraussetzung $\cos \Phi > 0$ bleibt und nach § 45, (16) $\lim\limits_{\xi=\infty} \cdot \xi^{m-1} e^{-\xi} = 0$ ist, bei unendlich wachsendem ξ verschwindet. Daher verschwindet auch das Integral unter denselben Umständen.

Mithin ist

$$(1) \qquad \Gamma(\mu) = \lim_{v=\infty} \cdot \int_0^{v e^{i\varphi}} z^{\mu-1} e^{-z} dz$$

sobald auf dem Integrationswege $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$ bleibt, und der rein relle Bestandtheil von μ einen positiven Werth besitzt.

Bei einem constanten φ geht (1) über in:

$$(2) \qquad \Gamma(\mu) = e^{i\mu\varphi} \cdot \int_0^{\infty} v^{\mu-1} e^{-v e^{i\varphi}} dv;$$

und wenn μ einen reellen Werth hat, so erhält man hieraus vermittelst der Zerfällung in die reellen Bestandtheile:

$$(3) \qquad \Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} v^{\mu-1} e^{-v \cos\varphi} \cos\left[\mu\varphi - v \sin\varphi\right] dv,$$

$$(4) \qquad 0 = \int_0^{\infty} v^{\mu-1} e^{-v \cos\varphi} \sin\left[\mu\varphi - v \sin\varphi\right] dv$$

oder, wenn man die Gleichung (2) vorher durch $e^{i\mu\varphi}$ dividirt:

$$(5) \qquad \int_0^{\infty} v^{\mu-1} e^{-v\cos\varphi} \cos(v \sin\varphi) \, dv = \Gamma(\mu) \cdot \cos(\mu\varphi),$$

$$(6) \qquad \int_0^{\infty} v^{\mu-1} e^{-v\cos\varphi} \sin(v \sin\varphi) \, dv = \Gamma(\mu) \cdot \sin(\mu\varphi).$$

Um diese Formeln einerseits zu verallgemeinern und andrerseits in eine Form zu bringen, welche in manchen Fällen bequemer ist, führen wir

$$v = \alpha x,\quad \alpha\cos\varphi = a,\quad \alpha\sin\varphi = b,\quad \alpha = \sqrt{a^2+b^2},\quad dv = \alpha dx$$

ein. Dadurch ergiebt sich aus (2), (5) und (6):

$$(7)\qquad \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-(a+ib)x}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(a+ib)^\mu},\quad (a>0);$$

$$(8)\qquad \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^\mu}\cdot\cos\left(\mu \operatorname{arc\,tng}\frac{b}{a}\right),$$
$$(a>0),$$

$$(9)\qquad \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax}\sin(bx)\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^\mu}\cdot\sin\left(\mu \operatorname{arc\,tng}\frac{b}{a}\right),$$
$$(a>0).$$

Übrigens hört die Gültigkeit der obigen Formeln nicht unbedingt auf, sobald $a = 0$, d. i.: sobald $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ wird, sondern sie bleibt unter gewissen Voraussetzungen über μ bestehn, wenn nur b von Null verschieden ist.

Dass die rechten Seiten für $a = 0$ und $b \gtrless 0$ völlig bestimmte Werthe erhalten, welche beziehungsweise die Grenzwerthe der linken Seiten für ein unendlich abnehmendes positives a sind, reicht zur Entscheidung der Frage offenbar nicht aus, weil die Substitutionswerthe für $a = 0$ sehr wohl von den Grenzwerthen für $\lim \cdot a = 0$ verschieden sein können[1]) oder auch gar nicht existiren.

Um zunächst die Frage nach der Existenz der Substitutionswerthe zu erledigen, so ist dem Begriffe nach:

[1]) Man erinnere sich an das einfache Beispiel

$$\frac{1}{1+x} = (1-x)x^0 + (1-x)x^2 + (1-x)x^4 + \cdots$$

für $x = 1$ und $\lim \cdot x = 1$.

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\cos(bx)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2b}} x^{\mu-1}\cos(bx)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2b}}^{\frac{3\pi}{2b}} x^{\mu-1}\cos(bx)\,dx+\int_{\frac{3\pi}{2b}}^{\frac{5\pi}{2b}} x^{\mu-1}\cos(bx)\,dx+\cdots$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2b}} x^{\mu-1}\cos(bx)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{b}}\sin(bx)\,dx\cdot\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\pi}{2b}+x\right)^{\mu-1}-\left(3\frac{\pi}{2b}+x\right)^{\mu-1}\\ +\left(5\frac{\pi}{2b}+x\right)^{\mu-1}-\cdots\end{array}\right\}$$

und in analoger Weise:

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\sin(bx)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{b}} x^{\mu-1}\sin(bx)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{b}}\sin(bx)\,dx\cdot\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\pi}{b}+x\right)^{\mu-1}-\left(\frac{2\pi}{b}+x\right)^{\mu-1}\\ +\left(\frac{3\pi}{b}+x\right)^{\mu-1}-\cdots\end{array}\right\}.$$

Die unendlichen Reihen in den Differentialen der schliesslichen Ausdrücke convergiren nur dann, wenn $1>\mu$ ist.

Von den zuvor abgesonderten Integralen hat nach § 50

$$\int_0^{\frac{\pi}{2b}} x^{\mu-1}\cos(bx)\,dx$$

nur dann einen Werth, wenn $\mu>0$ ist, wogegen in dem Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2b}} x^{\mu-1}\sin(bx)\,dx$$

nur $\mu+1>0$ zu sein braucht.

Mithin haben, wenn $a = 0$ gemacht wird, die linken Seiten von (7) und (8) völlig bestimmte Werthe für $1 > \mu > 0$, die linke Seite von (9) aber für $1 > \mu > -1$.

Um darüber zu entscheiden, ob diese Substitutionswerthe für $a = 0$ mit den Grenzwerthen für $\lim \cdot a = 0$ übereinstimmen, schreiben wir in (7) z für a, $1 - \mu$ für μ und machen $b = 0$. Dann ist:

$$\Gamma(1-\mu) \cdot z^{\mu-1} = \int_0^\infty x^{-\mu} e^{-zx} dx, \quad (z > 0).$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung des so eben gewonnenen Resultats über die Endlichkeit des Integralwerthes:

$$\Gamma(1-\mu) \cdot \int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-ibz} dz = \int_0^\infty e^{-ibz} dz \int_0^\infty x^{-\mu} e^{-zx} dx.$$

Vertauscht man nun rechts die Folge der Integrationen, so ergiebt sich zunächst als eine ebenfalls zulässige Form der rechten Seite:

$$\int_0^\infty x^{-\mu} dx \int_0^\infty e^{-(x+ib)z} dz$$

oder wenn man den Werth

$$\int_0^\infty e^{-(x+ib)z} dz = \left[\frac{e^{-(x+ib)z}}{-(x+ib)}\right]_{z=0}^{z=\infty} = \frac{1}{x+ib}$$

einsetzt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\mu}}{x+ib} dx.$$

Dieses Resultat ist, obgleich der substituirte Werth $\frac{1}{x+ib}$ an der Stelle $x = 0$ nicht mehr zutrifft, dennoch gültig, weil

$$\lim_{z=\infty} \cdot \int_0^z e^{-ibz} dz = \frac{1}{ib} \cdot \left[1 - \lim_{z=\infty} \cdot e^{-ibz}\right]$$

freilich unbestimmt, aber endlich ist (§ 50).

Man hat also:

$$(10)\quad \Gamma(1-\mu)\cdot\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ibx} dx = \int_0^\infty \frac{x^{-\mu}}{x+ib} dx, \quad (1>\mu>0).$$

Das letzte Integral kommt auf ein Eulersches Integral erster Gattung zurück; denn es ist, wenn man das Differential mit $x - ib$ erweitert, offenbar:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\mu}}{x+ib} dx = \int_0^\infty \frac{x^{1-\mu}}{b^2+x^2} dx - ib\cdot\int_0^\infty \frac{x^{-\mu}}{b^2+x^2} dx,$$

oder wenn man rechts $x = b\cdot z^{\frac{1}{2}}$, $dx = \frac{1}{2} b z^{-\frac{1}{2}} dz$ einführt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\mu}}{x+ib} dx = \frac{1}{2} b^{-\mu}\cdot\left\{\int_0^\infty \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{1+z} dz - i\cdot\int_0^\infty \frac{z^{-\frac{1+\mu}{2}}}{1+z} dz\right\},$$

d. h. nach § 99, (8):

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\mu}}{x+ib} dx = \frac{1}{2} b^{-\mu}\cdot\left\{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi\mu}{2}} - i\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi(1+\mu)}{2}}\right\}$$

oder:

$$(11)\quad \int_0^\infty \frac{x^{-\mu}}{x+ib} dx = \frac{\pi e^{-i\frac{\pi\mu}{2}}}{b^\mu \sin(\pi\mu)}$$

$$= b^{-\mu}\cdot\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu)\cdot e^{-i\frac{\pi\mu}{2}}, \quad (1>\mu>0).$$

— Der letzte Ausdruck folgt aus dem ersten mit Hülfe von § 105, (16).

Aus der Verbindung von (10) und (11) ergiebt sich endlich:

$$(12)\quad \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ibx} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu} \cdot e^{-i\frac{\pi\mu}{2}} = \frac{\Gamma(\mu)}{(ib)^\mu},\ (1 > \mu > 0);$$

so dass die Gleichungen (7), (8) und (9) auch noch für $a = 0$ ihre Gültigkeit behalten, wenn nur $1 > \mu > 0$ ist. Für (9) existirt sogar nur die Bedingung: $1 > \mu > -1$.

Die Gleichungen (8) und (9) nehmen für $a = 0$ die Form an:

$$(13)\quad \int_0^\infty x^{\mu-1} \cos(bx) dx = \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu} \cdot \cos\frac{\pi\mu}{2},\ (1 > \mu > 0);$$

$$(14)\quad \int_0^\infty x^{\mu-1} \sin(bx) dx = \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu} \cdot \sin\frac{\pi\mu}{2},\ (+1 > \mu > -1).$$

Nähert sich das μ der Gleichung (14) der Null, so folgt, weil

$$\Gamma(\mu) \cdot \sin\frac{\pi\mu}{2} = \Gamma(\mu+1) \cdot \frac{\sin\frac{\pi\mu}{2}}{\mu}$$

ist, die schon von früher her bekannte Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(bx)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Für $x = \sqrt[\mu]{z}$ geht (7) über in:

$$(15)\qquad \int_0^\infty e^{-(a+ib)\sqrt[\mu]{z}} dz = \frac{\Gamma(\mu)}{\mu(a+ib^\mu},$$

was u. a., weil $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ist, die Relationen

$$(16)\qquad \int^\infty e^{-(a+ib).z^2} dz = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{a+ib}},\ (a > 0),$$

(17) $$\int_0^\infty e^{-az^2}\cos(bz^2)\,dz = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{a^2+b^2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tng}\frac{b}{a}\right),$$

(18) $$\int_0^\infty e^{-az^2}\sin(bz^2)\,dz = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{a^2+b^2}}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tng}\frac{b}{a}\right),$$

ergiebt.

Diejenigen unter den obigen Gleichungen, in denen μ vorkommt, lassen sich nach μ differentiiren, wodurch dann neue Relationen geschaffen werden.

Man muss dazu die Derivirte von $\Gamma(\mu)$ nach μ kennen. Dieselbe lässt sich sowohl aus den unendlichen Reihen für $l\,\Gamma(\mu)$ als auch direct aus der Formel

$$\Gamma(\mu) = \lim_{n=\infty}\cdot\left\{n^\mu\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{\mu+1}\cdot\frac{2}{\mu+2}\cdots\frac{n}{\mu+n}\right\}$$

ableiten, welche aus § 105, (6) folgt. Aus der letzteren ergiebt sich durch Logarithmirung und Differentiation:

$$\frac{\Gamma'(\mu)}{\Gamma(\mu)} = \lim_{n=\infty}\cdot\left\{l\,n - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+1} - \frac{1}{\mu+2} - \cdots - \frac{1}{\mu+n}\right\}$$

$$= \lim_{n=\infty}\cdot\left\{l\,n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n+1}\right\}$$

$$+ \lim_{n=\infty}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu+1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{\mu+2} + \cdots \\ \qquad\cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\mu}\end{array}\right\}$$

d. i.:

$$\frac{\Gamma'(\mu)}{\Gamma(\mu)} = -M + \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}\,dx - \lim_{n=\infty}\cdot\int_0^1 x^{n+1}\,\frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}\,dx$$

oder, weil $\frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}$ zwischen 1 und $(\mu-1)$ variirt, weshalb

$$\int_0^1 x^{n+1} \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x} dx = \theta \cdot \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{\theta}{n+2}, \quad \left(\theta = M\{1, \mu-1\}\right)$$

ist:

$$\Gamma'(\mu) = \left\{ \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x} dx - M \right\} \cdot \Gamma(\mu). \tag{19}$$

Mit Benutzung dieses Werthes folgt durch Differentiation von (7) nach μ:

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\, l x\, e^{-(a+ib)x} dx \tag{20}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)}{(a+ib)^\mu} \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x} dx - l(a+ib) - M \right\};$$

oder, wenn man wieder $a + ib = ve^{i\varphi}$ einführt:

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\, l x \cdot e^{-ve^{i\varphi}x} dx \tag{21}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)}{v^\mu} e^{-i\mu\varphi} \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x} dx - M - v - i\varphi \right\}, \left(+\frac{\pi}{2} > \varphi > -\frac{\pi}{2}\right),$$

wo aber auch $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ gemacht werden darf, wenn $1 > \mu > 0$ ist.

Die leicht ausführbare Zerlegung in die reellen Bestandtheile, so wie die Specialisirungen und die anderen Verwendungen wollen wir dem Leser überlassen. Sehr viele und interessante Einzelheiten findet man u. a. bei Legendre (Traité des fonctions elliptiques) und Schlömilch (Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis).

Capitel XVI.

Numerische Berechnung der Werthe von bestimmten Integralen.

§ 108.

Die Maclaurin-Malmsténsche Reihe.

Die Taylorsche Reihe (§ 36, (2) und § 38, (2))

$$f(z)-f(a)=\frac{z-a}{1!}f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(z-a)^{n+1}}{n!}\cdot\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(z-(z-a)u)\,du$$

lässt sich, wenn die Function $\Phi(x)=f'(x)$ gegeben ist, direct benutzen, um das Integral $\int_a^z \Phi(x)\,dx=f(z)-f(a)$ zu berechnen, da man nur überall $\Phi^{(r)}(x)$ für $f^{(r+1)}(x)$ einzusetzen braucht.

Man kann meistens jedoch eine schnellere Convergenz erzielen, wenn man mit dieser Reihe zuvor eine Transformation vornimmt, welche Maclaurin zuerst gezeigt,[1]) und für welche Malmstén zuerst den Rest[2]) bestimmt hat.

---

[1]) Treatise on fluxions, 1742.

[2]) Crelles Journ., Bd. 35.

Vertauscht man nämlich in der obigen Reihe auch z mit a, setzt dann beide Male $z - a = h$, $z = a + h$ und schreibt x für u, so ergiebt sich zunächst:

$$(1)\quad \begin{cases} f(a+h) - f(a) = +\dfrac{h}{1!}f'(a) + \dfrac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots \\ \qquad \cdots + \dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dfrac{h^{n+1}}{n!}\cdot\displaystyle\int_0^1 x^n f^{(n+1)}(a+h-hx)\,dx, \\ f(a) - f(a+h) = -\dfrac{h}{1!}f'(a+h) + \dfrac{h^2}{2!}f''(a+h) - \cdots \\ \cdots + (-1)^n\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+h) - (-1)^n\dfrac{h^{(n+1)}}{n!}\cdot\displaystyle\int_0^1 x^n f^{(n+1)}(a+hx)\,dx. \end{cases}$$

Wir wollen ferner die folgenden Bezeichnungen einführen, um die Übersicht über die Formeln zu erleichtern:

$$f\ (a) - f\ (a+h) = f_0,$$
$$f'\ (a) + f'\ (a+h) = f_1,$$
$$f''\ (a) - f''\ (a+h) = f_2,$$
$$f'''(a) + f'''(a+h) = f_3,$$

u. s. w.

$$(2)\qquad f^{(r)}(a) - (-1)^r\cdot f^{(r)}(a+h) = f_r;$$

$$(3)\qquad f^{(r)}(a+h-hx) - (-1)^r\cdot f^{(r)}(a+hx) = F_r(x).$$

Dann folgt aus den Gleichungen (1) durch Subtraction die erste Gleichung der nachstehenden Gruppe und aus ihr durch Erhöhung der Indices der f_r mit gleichzeitiger Verminderung der Gliederzahl um 2 die Reihe aller übrigen Gleichungen, nur dass die zweite aus (1) durch Addition entstanden ist, nachdem man $f(x)$ in $f'(x)$ verwandelt hat.

$$0 = 2f_0 + \frac{h}{1!}f_1 + \frac{h^2}{2!}f_2 + \frac{h^3}{3!}f_3 + \frac{h^4}{4!}f_4 + \frac{h^5}{5!}f_5 + \frac{h^6}{6!}f_6 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^n}{n!}f_n + \frac{h^{n+1}}{n!}\cdot\int_0^1 x^n F_{n+1}(x)\,dx,$$

$$0 = \frac{h}{1!}f_2 + \frac{h^2}{2!}f_3 + \frac{h^3}{3!}f_4 + \frac{h^4}{4!}f_5 + \frac{h^5}{5!}f_6 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f_n + \frac{h^n}{(n-1)!}\cdot\int_0^1 x^{n-1} F_{n+1}(x)\,dx,$$

$$0 = 2\,f_2 + \frac{h}{1!}f_3 + \frac{h^2}{2!}f_4 + \frac{h^3}{3!}f_5 + \frac{h^4}{4!}f_6 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f_n + \frac{h^{n-1}}{(n-2)!}\cdot\int_0^1 x^{n-2} F_{n+1}(x)\,dx,$$

$$0 = 2\,f_4 + \frac{h}{1!}f_5 + \frac{h^2}{2!}f_6 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-4}}{(n-4)!}f_n + \frac{h^{n-3}}{(n-4)!}\cdot\int_0^1 x^{n-4} F_{n+1}(x)\,dx,$$

$$0 = 2\,f_6 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-6}}{(n-6)!}f_n + \frac{h^{n-5}}{(n-6)!}\cdot\int_0^1 x^{n-6} F_{n+1}(x)\,dx,$$

u. s. w.

Diese Gleichungen multipliciren wir der Reihe nach mit

$$1,\ -\frac{1}{2}h,\ +\frac{B_1}{2!}h^2,\ -\frac{B_2}{4!}h^4,\ +\frac{B_3}{6!}h^6,\ \cdots,$$

addiren und bestimmen schliesslich die Zahlen B_1, B_2, B_3, $\cdots$ so, dass die Coefficienten von f_3, f_5, f_7, $\cdots$ verschwinden, d. h. so, dass

$$\frac{1}{3!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}\cdot\frac{B_1}{2!}=0,$$

$$\frac{1}{5!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}\,\frac{B_1}{2!}-\frac{1}{1!}\,\frac{B_2}{4!}=0,$$

$$\frac{1}{7!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6!}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{B_1}{2!}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{B_2}{4!}+\frac{1}{1!}\,\frac{B_3}{6!}=0,$$

u. s. w.

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{(2r+1)!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2r)!\,1!}+\frac{B_1}{(2r-1)!\,2!}-\frac{B_2}{(2r-3)!\,4!}\\&\qquad+\frac{B_3}{(2r-5)!\,6!}-\cdots+(-1)^{r-1}\frac{B_r}{1!\,(2r)!}=0,\\&1-\frac{1}{2}\cdot\binom{2r+1}{1}+\binom{2r+1}{2}B_1-\binom{2r+1}{4}B_2\\&\qquad+\binom{2r+1}{6}B_3-\cdots+(-1)^{r-1}\binom{2r+1}{2r}B_r=0\end{aligned}\right.$$

wird.

Wir bezeichnen ferner

$$(5)\qquad \varphi(x,r)$$
$$=x^r-\frac{1}{2}\binom{r}{1}x^{r-1}+\binom{r}{2}B_1x^{r-2}-\binom{r}{4}B_2x^{r-4}+\binom{r}{6}B_3x^{r-6}-\cdots,$$

wo die rechte Seite mit demjenigen Gliede abschliessen soll, welches die Potenz x^2 oder x^1 enthält.

Dann wird offenbar, wenn man in der zu summirenden Gleichungsgruppe die ungrade Zahl $(2n+1)$ für n setzt und die Gruppe möglichst vollständig denkt, als Endresultat der Operation erhalten:

$$(6)\qquad 0 = 2f_0 + \frac{h}{1!}f_1 + B_1 h^2 f_2 + \frac{\varphi(1,4) - 2B_2}{4!} h^4 f_4$$

$$+ \frac{\varphi(1,6) + 2B_3}{6!} h^6 f_6 + \frac{\varphi(1,8) - 2B_4}{8!} h^8 f_8 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\varphi(1,2n) - (-1)^n 2B_n}{(2n)!} h^{2n} f_{2n} + \frac{h^{2n+2}}{(2n+1)!} \cdot \int_0^1 \varphi(x, 2n+1) F_{2n+2}(x) dx$$

Dies stellt aber noch nicht die einfachste Gestalt des Eliminationsresultats dar; denn es ist nicht nur $\varphi(1, 2r+1) = 0$ — was die Formel (4) ausspricht — sondern es lässt sich leicht zeigen, dass auch $\varphi(1, 2r) = 0$ hervorgeht. Wir wählen zur Demonstration einen Weg, welcher zugleich die Natur der sogenannten „Bernoullischen Functionen"[1]) $\varphi(x, r)$ etwas genauer kennen lehrt, als es der nächstliegende Zweck durchaus erfordert.

Nach § 66, (33) ist nämlich, wenn man dort $2\pi x = z$ setzt, für abs $\cdot\, z < 2\pi$:

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{s_2}{2^1 \pi^2} \cdot z^2 - \frac{s_4}{2^3 \pi^4} \cdot z^4 + \frac{s_6}{2^5 \pi^6} \cdot z^6 - \frac{s_8}{2^7 \pi^8} \cdot z^8 + \cdots$$

oder — indem man die Formel § 66, (54) benutzt, durch welche die Bernoullischen Zahlen B_r definirt sind:

$$(7)\qquad \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{B_1}{2!} \cdot z^2 - \frac{B_2}{4!} \cdot z^4 + \frac{B_3}{6!} \cdot z^6 - \frac{B_4}{8!} \cdot z^8 + \cdots,$$

wobei es vorläufig dahingestellt bleibt, ob diese Bernoullischen Zahlen $B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots$, mit denjenigen Zahlen identisch sind, welche wir durch das Gleichungssystem (4) eingeführt haben, oder nicht. Multiplicirt man nun die letzte Gleichung mit der für jedes z und x geltenden Gleichung

$$e^{xz} - 1 = \frac{1}{1!} xz + \frac{1}{2!} x^2 z^2 + \frac{1}{3!} x^3 z^3 + \frac{1}{4!} x^4 z^4 + \cdots.$$

und ordnet das Product nach steigenden Potenzen von z, so folgt:

[1]) Diese Benennung hat ihnen J. Raabe bei ihrer ersten genaueren Untersuchung gegeben in Crelles Journ., Bd. 42.

$$z\cdot\frac{e^{xz}-1}{e^z-1}$$

$$=xz+\left\{\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!}x\right\}z^2+\left\{\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{1!}\frac{B_1}{2!}x\right\}z^3$$

$$+\left\{\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{2!}\cdot\frac{B_1}{2!}x^2\right\}z^4+\cdots$$

$$=xz+\left\{x^2-\frac{1}{2}\binom{2}{1}x\right\}\frac{z^2}{2!}+\left\{x^3-\frac{1}{2}\binom{3}{1}x^2+\binom{3}{2}B_1\,x\right\}\frac{z^3}{3!}$$

$$+\left\{x^4-\frac{1}{2}\binom{4}{1}x^3+\binom{4}{2}B_1\,x^2\right\}\frac{z^4}{4!}$$

$$+\left\{x^5-\frac{1}{2}\binom{5}{1}x^4+\binom{5}{2}B_1\,x^3-\binom{5}{4}B_2\,x\right\}\frac{z^5}{5!}+\cdots,$$

d. i. wegen der Analogie der Gesichtsklammern mit dem Ausdruck (5):

$$(8)\qquad z\cdot\frac{e^{xz}-1}{e^z-1}=xz+\varphi(x,2)\cdot\frac{z^2}{2!}+\varphi(x,3)\cdot\frac{z^3}{3!}+\varphi(x,4)\cdot\frac{z^4}{4!}$$

$$+\varphi(x,5)\cdot\frac{z^5}{5!}+\cdots,$$

$$\{-2\pi<z<+2\pi\}$$

wenn wir supponiren, dass die in (4) definirten Zahlen mit den Bernoullischen identisch sind, und dass demnach auch die hier durch $\varphi(x,r)$ bezeichneten Functionen mit den in (5) definirten übereinstimmen. Dies ist aber unzweifelhaft der Fall, weil unsere letzte Gleichung (8) für $x=1$ in

$$z=z+\varphi(1,2)\cdot\frac{z^2}{2!}+\varphi(1,3)\cdot\frac{z^3}{3!}+\varphi(1,4)\cdot\frac{z^4}{4!}$$

$$+\varphi(1,5)\cdot\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

übergeht; was wegen einer bekannten Eigenschaft gleicher Potenzreihen (§ 59) die Consequenz hat, dass

(9) $$\varphi(1, r) = 0, \quad (r > 1)$$

sein muss.

Damit ist die Formel (4), welche diese Eigenschaft zunächst nur für ungrade r in $\varphi(1, r)$ beansprucht, verallgemeinert, zugleich aber auch die Identität der anfangs durch B_r bezeichneten Zahlen mit den gleichbenannten Bernoullischen bewiesen, weil das aus (9) für ungrade r hervorgehende lineare Gleichungssystem zur Berechnung der sämmtlichen B dient, mag man unsere B oder die Bernoullischen Zahlen in Absicht haben.

Substituirt man demnach aus (8) in (6), so erhält man nach der Division mit 2:

$$0 = f_0 + \frac{1}{2} h f_1 + \frac{B_1}{2!} h^2 f_2 - \frac{B_2}{4!} h^4 f_4 + \frac{B_3}{6!} h^6 f_6 - \frac{B_4}{8!} h^8 f_8 + \cdots$$

$$- (-1)^n \frac{B_n}{(2n)!} h^{2n} f_{2n} + \frac{1}{2} \frac{h^{2n+2}}{(2n+1)!} \cdot \int_0^1 \varphi(x, 2n+1) F_{2n+2}(x) dx$$

oder in ausführlicherer Schreibweise:

(10) $$f(a+h) - f(a)$$

$$= \frac{1}{2} h \cdot \left\{ f'(a+h) + f'(a) \right\} - \frac{B_1}{2!} h^2 \cdot \left\{ f''(a+h) - f''(a) \right\}$$

$$+ \frac{B_2}{4!} h^4 \cdot \left\{ f^{IV}(a+h) - f^{IV}(a) \right\}$$

$$- \frac{B_3}{6!} h^6 \left\{ f^{VI}(a+h) - f^{VI}(a) \right\} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{B_n}{(2n)!} h^{2n} \cdot \left\{ f^{(2n)}(a+h) - f^{(2n)}(a) \right\} + R_{2n},$$

wo der Rest R_{2n} die Bedeutung hat:

(11) $$R_{2n}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{h^{2n+2}}{(2n+1)!}\cdot\int\limits_0^1\varphi(x,2n+1)\cdot\left\{f^{(2n+2)}(a+h-hx)-f^{(2n+2)}(a+hx)\right\}dx.$$

Wir wollen denselben im nächsten § discutiren.

Hier aber mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die rechte Seite von (10) keine Potenzreihe ist, weil die Coefficienten der Potenzen von h diese Variable ebenfalls enthalten,[1]) und dass es deshalb nicht gestattet ist, auf die Identität der Coefficienten unserer Reihe (10) mit denjenigen einer zweiten analogen Entwickelung zu schliessen, welche etwa an der Stelle der B_r Zahlen hat, deren Werthe erst ermittelt werden sollen.

Solche analogen Entwickelungen lassen sich in beliebiger Anzahl aus derjenigen Gleichungsgruppe beschaffen, welche wir zu Grunde gelegt haben, weil die Anzahl der benutzten Gleichungen um 1 grösser ist, als sie zur Elimination von f_3, f_5, f_7, ..., f_{2n+1} zu sein brauchte. Daher ging es auch an, die zweite Gleichung ohne Widerspruch nicht mit einer erst später zu ermittelnden, sondern mit einer von vorne herein fixirten Zahl $\left(-\frac{1}{2}h\right)$ zu multipliciren. Lässt man die Wahl derselben vorläufig noch frei, so ist das Resultat der Elimination offenbar eine in der Form mit (10) völlig übereinstimmende Reihe, deren Coefficienten für besondere Werthe des fraglichen Parameters in die obigen übergehn. Und zwar geschieht dies — wie die nähere Untersuchung zeigt — nicht bloss dann, wenn man ihn $=-\frac{1}{2}h$ setzt, sondern auch noch in anderen Fällen.

---

[1]) Für $f(x)=x^7$ geht (9) beispielsweise über in:

$$(a+h)^7-a^7=\frac{1}{2}\cdot\binom{7}{1}h\left\{(a+h)^6+a^6\right\}-B_1\binom{7}{2}h^2\left\{(a+h)^5-a^5\right\}$$
$$+B_2\binom{7}{4}h^4\left\{(a+h)^3-a^3\right\}-B_3\binom{7}{6}h^6\left\{(a+h)^1-a^1\right\}$$
$$=\frac{7}{2}h\left\{(a+h)^6+a^6\right\}-\frac{7}{2}h^2\left\{(a+h)^5-a^5\right\}$$
$$+\frac{7}{6}h^4\left\{(a+h)^3-a^3\right\}-\frac{1}{6}h^6\left\{(a+h)^1-a^1\right\}.$$

§ 109.

Discussion des Restes der Maclaurin-Malmsténschen Reihe aus den Eigenschaften der Bernoullischen Functionen.

Da die Gleichung (8) des vorigen § den Werth der Function

$$(1) \qquad \psi(z, x) = z \cdot \frac{e^{xz} - 1}{e^z - 1}$$

in der Form des Taylorschen Satzes nach steigenden Potenzen von z entwickelt, so erkennt man sofort, dass

$$(2) \qquad \varphi(x, r) = \psi_z^{(r)}(0, x)$$

sein muss, wo durch den untern Index z an dem Functionszeichen ψ angedeutet werden soll, dass die r-malige Differentiation von $\psi(z, x)$ nach z auszuführen ist.

Aus der identischen Gleichung

$$\frac{e^{(1-x)z} - 1}{e^z - 1} = 1 - \frac{e^{-xz} - 1}{e^{-z} - 1}$$

folgt aber, wenn man beiderseits mit z multiplicirt:

$$\psi\ (z, 1 - x) = z + \psi(-z, x),$$

$$\psi'_z\ (z, 1 - x) = 1 - \psi'_{-z}(-z, x),$$

$$\psi''_z\ (z, 1 - x) = \ + \psi''_{-z}(-z, x),$$

$$\psi'''_z(z, 1 - x) = \ - \psi'''_{-z}(-z, x),$$

u. s. w.

$$\psi_z^{(r)}(z, 1 - x) = (-1)^r \cdot \psi_{-z}^{(r)}(-z, x), \quad (r > 1).$$

Macht man nach der Differentiation $z = 0$, so ist es auf der rechten Seite der letzten Gleichung gleichgültig, ob man ursprünglich nach $(-z)$ oder nach z differentiirt hat, um $\psi^{(r)}(0, x)$ zu erhalten. Daher folgt durch Substitution aus (2):

$$(3) \qquad \varphi(1 - x, r) = (-1)^r \cdot \varphi(x, r), \quad (r > 1).$$

Aus dieser Relation ergiebt sich erstens, dass

$$\varphi(1,r) = (-1)^r \varphi(0,r) = 0$$

ist — was wir schon im vorigen § gesehn haben — und zweitens, dass

$$\varphi\left(\frac{1}{2} - x, r\right) = (-1)^r \cdot \varphi\left(\frac{1}{2} + x, r\right), \quad (r > 1)$$

ist, dass also jede Bernoullische Function ihrem absoluten Betrage nach für solche Argumente gleichwerthig ist, welche gleich weit von $\frac{1}{2}$ abstehn.

Für $x = \frac{1}{2}$ liefert die Gleichung (3):

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, r\right) = (-1)^r \cdot \varphi\left(\frac{1}{2}, r\right),$$

d. i.:

(4)
$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2r+1\right) = 0,$$

während der Werth von $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2r\right)$ aus (3) nicht erhellt. Zieht man aber in Betracht, dass nach (1)

$$\psi\left(z, \frac{1}{2}\right) = z \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}z} - 1}{e^z - 1} = z\,\frac{\left(e^{\frac{1}{2}z} + 1\right) - 2}{e^z - 1} = 2 \cdot \left\{ \frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z} - 1} - \frac{z}{e^z - 1} \right\}$$

ist, so folgt unter Verwendung der Gleichung (7) des vorigen §:

$$\psi^{(2r)}\left(0, \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left\{ \frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r}} B_r - (-1)^{r-1} B_r \right\}$$

oder nach (2):

(5)
$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2r\right) = (-1)^r \cdot \frac{2^{2r} - 1}{2^{2r-1}} \cdot B_r. \quad ^{1)}$$

---

[1]) In der Beziehungsweise des § 66 ist dies auch:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2r\right) = (-1)^r \cdot \frac{r u_{2r}}{4^{2r-1}}.$$

Die Art, wie die Bernoullischen Functionen $\varphi(x, r)$ zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ wachsen und abnehmen, erkennt man aus Vorzeichen und Grösse von $\varphi'(x, r)$. Um diese Derivirte zu bilden, kann man wieder von der Formel (2) ausgehn. Dieselbe ergiebt:

$$\varphi'(x, r) = \frac{d}{dx} \cdot \psi_z^{(r)}(0, x) = \left[\frac{d^r}{dz^r} \cdot \frac{d\psi(z, x)}{dx}\right]_{z=0}.$$

Nach (1) ist aber:

$$\frac{d\psi(z, x)}{dx} = z^2 \cdot \frac{e^{xz}}{e^z - 1} = z^2 \cdot \frac{e^{xz} - 1}{e^z - 1} + \frac{z^2}{e^z - 1}.$$

Multiplicirt man also die Gleichungen (8) und (7) des vorigen § mit z, um sie dann rmal nach z zu differentiiren, so findet man

$$\left[\frac{d^r}{dz^r} \cdot \frac{z^2(e^{xz} - 1)}{e^z - 1}\right]_{z=0} = r \cdot \varphi(x, r - 1),$$

während

$$\left[\frac{d^r}{dz^r} \cdot \frac{z^2}{e^z - 1}\right]_{z=0} = 0 \text{ oder } = -(-1)^{\frac{r-1}{2}} \cdot r \cdot B_{\frac{r-1}{2}}$$

wird, je nachdem r eine grade oder eine ungrade Zahl ist.

Mithin gelten die Formeln: [1])

(6) $\qquad \varphi'(x, 2r) = 2r \cdot \varphi(x, 2r - 1), \quad (r > 1);$

(7) $\qquad \varphi'(x, 2r + 1) = (2r + 1) \cdot \left\{\varphi(x, 2r) - (-1)^r B_r\right\}, \quad (r \geqq 1).$

(8) $\qquad \int_0^x \varphi(x, 2r)\, dx = \frac{1}{2r + 1} \cdot \varphi(x, 2r + 1) + (-1)^r B_r \cdot x,$

(9) $\qquad \int_0^x \varphi(x, 2r - 1)\, dx = \frac{1}{2r} \cdot \varphi(x, 2r).$

---

[1]) Sie sind zuerst von Schlömilch angegeben worden in der „Zeitschrift für Math. u. Physik“, Bd. I. — Die obige einfache Methode der Behandlung der Bernoullischen Functionen ist im Wesentlichen sein Verdienst

Das giebt mit Rücksicht auf (4) und (5) im Besondern:

$$(10) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x, 2r)\, dx = (-1)^r \frac{1}{2} B_r,$$

$$(11) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x, 2r-1)\, dx = (-1)^r \cdot \frac{2^{2r}-1}{r \cdot 2^{2r}} B_r.$$

Es interessirt noch der Nachweis dafür, dass die Functionen $\varphi(x, r)$ im Intervall $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ihr Vorzeichen nicht wechseln. Derselbe lässt sich aus (6) und (7) u. a. auf folgende Weise führen.

Da nach § 108, (5)

$$\varphi(x, 2) = x^2 - \frac{1}{2}\binom{2}{1} x = x^2 - x = x(x-1),$$

$$\varphi'(x, 2) = 2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

ist, so bleibt $\varphi(x, 2)$ im Intervall $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ negativ und vermindert sich von $\varphi(0, 2) = 0$ bis $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2\right) = -\frac{1}{4}$, weil $\varphi'(x, 2)$ bis dahin negativ ist (§ 3).

Nach (7) besitzt nun die Derivirte von $\varphi(x, 3)$, nämlich

$$\varphi'(x, 3) = 3 \cdot \left\{\varphi(x, 2) + B_1\right\},$$

für $x = 0$ einen positiven Werth $\varphi'(0, 3) = 3 \cdot \left\{\varphi(0, 2) + B_1\right\} = 3 B_1 = +\frac{1}{2}$, von welchem aus sie wegen der fortschreitenden Abnahme der Function $\varphi(x, 2)$ zwischen den Werthen $\varphi(0, 2) = 0$ und $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2\right) = -\frac{1}{4}$ stetig in den Werth

$$\varphi'\left(\frac{1}{2}, 3\right) = 3 \cdot \left\{\varphi\left(\frac{1}{2}, 2\right) + B_1\right\} = 3\left\{-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right\} = -\frac{1}{4}$$

mit einmaligem Vorzeichenwechsel übergeht. Mithin nimmt die Function $\varphi(x,3)$ zuerst von $\varphi(0,3)=0$ an zu und dann bis $\varphi\left(\frac{1}{2},3\right)=0$ hin wieder ab und besitzt im Intervall $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ einen einzigen Maximalwerth, bleibt aber positiv.

Daher bleibt nach (6)

$$\varphi'(x,4)=4\cdot\varphi(x,3)$$

im Intervall $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ positiv, weshalb $\varphi(x,4)$ in demselben von $\varphi(0,4)=0$ an bis $\varphi\left(\frac{1}{2},4\right)=+\frac{2^4-1}{2^3}\cdot B_2=+\frac{1}{16}$ unausgesetzt wächst, also positiv bleibt.

Entnimmt man nun wieder aus (7), dass

$$\varphi'(x,5)=5\cdot\left\{\varphi(x,4)-B_2\right\}$$

ist, so erhellt, dass $\varphi'(x,5)$ stetig von $\varphi'(0,5)=-5\cdot B_2$ an bis

$$\varphi'\left(\frac{1}{2},5\right)=5\left\{\varphi\left(\frac{1}{2},4\right)-B_2\right\}=+5\cdot\frac{2^3-1}{2^3}B_2$$

wächst, also vom Negativen zum Positiven übergeht, weshalb $\varphi(x,5)$ von $\varphi(0,5)=0$ an zunächst abnimmt und — nachdem ein gewisser negativer Minimalwerth erreicht ist — bis $\varphi\left(\frac{1}{2},5\right)=0$ wieder wächst. Also ist $\varphi(x,5)$ im Intervall $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ überall negativ.

Dass die Schlussfolge, welche wir hier eingeleitet haben, ohne Störung fortgesetzt werden kann, ist unmittelbar ersichtlich. Sie basirt nach den Eingangsbetrachtungen im Wesentlichen darauf, dass die Zahlen

$$\varphi(0,2r)-(-1)^r B_r=-(-1)^r B_r$$

und

$$\varphi\left(\frac{1}{2},2r\right)-(-1)^r B_r=(-1)^r\cdot\frac{2^{2r-1}-1}{2^{2r-1}}B_r$$

entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Um schliesslich die Anwendung auf den Rest (§ 108, (11)) der Maclaurin-Malmsténschen Reihe zu machen, so folgt, weil nach (3)

$$\varphi(x, 2n+1) = -\varphi(1-x, 2n+1)$$

ist:

$$\int_0^1 \varphi(x, 2n+1) f^{(2n+2)}(a+h-hx)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x, 2n+1) f^{(2n+2)}(a+h-hx)\,dx$$

$$- \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi(1-x, 2n+1) f^{(2n+2)}(a+h-hx)\,dx$$

oder wenn man noch im letzten Integral $1-x$ für x schreibt:

$$\int_0^1 \varphi(x, 2n+1) f^{(2n+2)}(a+h-hx)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x, 2n+1) \left\{ f^{(2n+2)}(a+h-hx) - f^{(2n+2)}(a+hx) \right\} dx.$$

In ganz analoger Weise wird

$$\int_0^1 \varphi(x, 2n+1) f^{(2n+2)}(a+hx)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x, 2n+1) \left\{ f^{(2n+2)}(a+hx) - f^{(2n+2)}(a+h-hx) \right\} dx.$$

Durch die Substitution in § 108, (11) ergiebt sich daher:

(12)
$$R_{2n}$$

$$= \frac{h^{2n+2}}{(2n+1)!} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x, 2n+1) \left\{ f^{(2n+2)}(a+h-hx) - f^{(2n+2)}(a+hx) \right\} dx.$$

Da ferner $a + h - hx$ und $a + hx$ gleich weit von $a + \frac{1}{2}h$ abstehn, so nimmt der eingeklammerte Factor des Differentials alle Werthe an, welche der Ausdruck

$$f^{(2n+2)}\left(a + \frac{1}{2}h(1+\theta)\right) - f^{(2n+2)}\left(a + \frac{1}{2}h(1-\theta)\right)$$

zwischen $\theta = 0$ und $\theta = +1$ erlangen kann, und demnach besitzt — weil $\varphi(x, 2n+1)$ sein Vorzeichen im Integrationsintervall nicht ändert — das Integral einen Werth, welcher das Product aus $\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x, 2n+1)\,dx$ und einem Mittelwerth jenes Ausdrucks ist.

Benutzt man schliesslich noch die Formel (11) dieses §, so erhält man auch:

$$R_{2n} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n+2}-1}{(2n+2)!\,2^{2n+1}} \cdot B_{n+1} \cdot h^{2n+2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &f^{(2n+2)}\left(a + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h\theta\right) \\ &- f^{(2n+2)}\left(a + \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}h\theta\right) \end{aligned} \right|$$

oder, wenn man der bessern Übersicht wegen n um 1 erniedrigt:

$$(13) \quad R_{2n-2} = (-1)^{n} \cdot \frac{2^{2n}-1}{(2n)!\,2^{2n-1}} B_n h^{2n} \cdot \left\{ \begin{aligned} &f^{(2n)}\left(a + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h\theta\right) \\ &- f^{(2n)}\left(a + \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}h\theta\right) \end{aligned} \right| .$$

$$(0 < \theta < 1).$$

Diese Formel (13) gilt allgemein, wenn nur $f^{(2n)}(x)$ von $x = a$ bis $x = (a+h)$ stetig ist.

Im Falle aber $f^{(2n)}(x)$ von $x = a$ bis $x = (a+h)$ entweder nur wächst oder nur abnimmt, kann man für sie auch schreiben:

$$(14) \quad R_{2n-2} = (-1)^{n} \cdot \frac{2^{2n}-1}{(2n)!\,2^{2n-1}} B_n h^{2n} \cdot \theta \left\{ f^{(2n)}(a+h) - f^{(2n)}(a) \right\},$$

$$(0 < \theta < 1);$$

da dann die Zahl $\left\{f^{(2n)}(a+h) - f^{(2n)}(a)\right\}$ dasselbe Vorzeichen besitzt, wie der Ausdruck, für welchen wir sie gesetzt haben, dem absoluten Betrage nach aber grösser ist.

Bedenkt man ferner, dass

$$\frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) < 2$$

ist, so kann man anstatt der Gleichung (14) offenbar die noch einfachere Form

$$(15)\quad R_{2n-2} = (-1)^n \cdot \frac{2B_n}{(2n)!} h^{2n} \theta \left\{f^{(2n)}(a+h) - f^{(2n)}(a)\right\},$$

$$(0 < \theta < 1)$$

oder

$$(16)\quad R_{2n-2} = (-1)^n \cdot 4\theta \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2n} \cdot s_{2n} \cdot \left\{f^{(2n)}(a+h) - f^{(2n)}(a)\right\},$$

$$(0 < \theta < 1)$$

verwenden, wo nach § 66, (54) und (52)

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots$$

ist.

In früheren Zeiten verhielt man sich den Resten der Reihenentwickelungen gegenüber sehr harmlos, indem man — namentlich wenn die Glieder anfänglich abnehmen — des guten Glaubens lebte, die Genauigkeit müsse bei wachsender Gliederzahl ebenfalls wachsen. Da dieser Irrthum auch jetzt noch weiter verbreitet ist, als man erwarten sollte, so erscheint es als geboten, eine aus (16) ohne Weiteres fliessende Folgerung mit Nachdruck hervorzuheben, nämlich:

Die Maclaurin-Malmsténsche Reihe ist nur dann convergent, wenn für jedes zwischen a und (a+h) liegende x sich $\lim_{n=\infty} \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2n} f^{(2n)}(x) = 0$ ergiebt, u. a. also, wenn die Derivirte $f^{(2n)}(x)$ nicht gleichzeitig mit ihrer Ordnung unendlich wächst, stets für $h < 2\pi$. Sonst

ist sie divergent. Im letzteren Falle kann sie zu den sogenannten **halbconvergenten** Reihen gehören, deren Rest anfänglich abnimmt und erst dann zu wachsen anfängt, wenn die Gliederzahl eine gewisse Nummer überschritten hat.

Dass die fragliche Reihe, auch wenn sie divergent ist, in der That die letztgedachte Eigenschaft zu besitzen pflegt, begründet ihre hohe Wichtigkeit für numerische Näherungsrechnungen; was wir jetzt durch ein Beispiel beleuchten wollen.

Für $f(x) = l\,x$ ergiebt sich:

$$l(a+h) - l\,a = \frac{1}{2} h \frac{2a+h}{a(a+h)} - \frac{1}{2} B_1 h^2 \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+h)^2} \right\}$$

$$+ \frac{1}{4} B_2 h^4 \left\{ \frac{1}{a^4} - \frac{1}{(a+h)^4} \right\} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-2} B_{n-1} h^{2n-2} \left\{ \frac{1}{a^{2n-2}} - \frac{1}{(a+h)^{2n-2}} \right\}$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{1}{n} B_n h^{2n} \theta \left\{ \frac{1}{a^{2n}} - \frac{1}{(a+h)^{2n}} \right\}.$$

Da der wesentliche Factor des Restes

$$\frac{1}{n} B_n h^{2n} \left\{ \frac{1}{a^{2n}} - \frac{1}{(a+h)^{2n}} \right\} = 4 \cdot (2n-1)! \left(\frac{h}{2\pi a} \right)^{2n} \cdot s_{2n} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{a}{a+h} \right)^{2n} \right\}$$

$$\text{äquivalent mit } \left\{ \frac{(4n-1)h}{4\pi e a} \right\}^{2n-\frac{1}{2}} \cdot \text{Const.}$$

ist (§ 58, II), so zeigt sich auch hieraus die Divergenz der Reihe bei jedem beliebig kleinen Werthe von h. Anfänglich aber nimmt der Rest sogar für $h = a = 1$ ab; denn man erhält unter Benutzung der numerischen Werthe der B_r aus § 66:

$$l\,2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{120} \cdot \frac{15}{16} - \frac{1}{252} \cdot \frac{63}{64} + \frac{1}{240} \cdot \frac{255}{256} - \frac{1}{660} \cdot \frac{1023}{1024}$$

$$+ \frac{691}{32760} \cdot \frac{4095}{4096} - \frac{1}{12} \cdot \frac{16383}{16384} + \frac{3617}{8160} \cdot \frac{65535}{65536} - \frac{43867}{14364} \cdot \frac{262143}{262144}$$

u. s. w.,

wo man nach der Vorschrift der obigen Formeln an jeder Stelle abbrechen darf, indem man das zuletzt benutzte Glied mit einer zwischen 0 und 2 liegenden, näher aber nicht bekannten Zahl multiplicirt. Das kleinste unter den obigen Gliedern ist $\frac{1}{660} \cdot \frac{1023}{1024}$. Nimmt man also die Summe der vorhergehenden Glieder als Näherungswerth von $l\,2$, so ist der Fehler $< \frac{1}{330} \cdot \frac{1023}{1024}$, wogegen der Fehler schon bis auf 6 gestiegen sein kann, wenn man alle aufgeschriebenen Glieder vor dem letzten in Anwendung bringt. Es ist daher mit der grössten Genauigkeit, welche unsere Formel verbürgt:

$$l\,2 = \frac{2849}{4096} - \frac{\theta}{330} = 0,6956 - \theta \cdot 0,003.$$

— Der wahre Werth beträgt 0,693 147, also etwa 0,0025 weniger als 0,6956. In diesem Specialfall ist demnach keine grosse Genauigkeit zu erlangen gewesen.

Nimmt man aber das h kleiner an, so verbessert sich die Verwendbarkeit der Formel; denn es wird für $a = 1$ und $h = \frac{1}{2}$:

$$l\,\frac{3}{2} = \frac{5}{12} - \frac{1}{12 \cdot 4} \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right) + \frac{1}{120 \cdot 16} \cdot \left(1 - \frac{4^2}{9^2}\right)$$
$$- \frac{1}{252 \cdot 64} \cdot \left(1 - \frac{4^3}{9^3}\right) + \frac{1}{240 \cdot 256} \cdot \left(1 - \frac{4^4}{9^4}\right)$$
$$- \frac{1}{660 \cdot 1024} \cdot \left(1 - \frac{4^5}{9^5}\right) + \frac{691}{32760 \cdot 4096} \cdot \left(1 - \frac{4^6}{9^6}\right) \text{ u. s. w.},$$

wo der Fehler nicht ganz das Doppelte des zuletzt benutzten Gliedes betragen kann. Benutzt man daher die ersten 5 Glieder, so ist der Fehler $< \frac{1}{120 \cdot 256} = \frac{1}{30720} < 0,000\,03\ldots$, und benutzt man 6 Glieder, so hat er noch nicht den Werth

$$\frac{1}{330 \cdot 1024} = \frac{1}{337\,920} < 0,000\,003.$$

§ 110.

Anwendung auf die Berechnung von Integralen und Reihensummen.

Schreibt man in der Gleichung (10) des § 108 $f(x)$ für $f'(x)$ und erniedrigt zugleich n um 1, so folgt:

$$(1)\qquad \int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{1}{2}h\left\{f(a+h)+f(a)\right\}$$

$$-\frac{B_1}{2!}\cdot h^2\left\{f'(a+h)-f'(a)\right\}+\frac{B_2}{4!}h^4\cdot\left\{f'''(a+h)-f'''(a)\right\}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{B_{n-1}}{(2n-2)!}h^{2n-2}\cdot\left\{f^{(2n-3)}(a+h)-f^{(2n-3)}(a)\right\}+R_n.$$

Für den Rest R_n wollen wir nur den aus § 109, (15) folgenden Ausdruck

$$(2)\quad R_n=(-1)^n\cdot\frac{2B_n}{(2n)!}h^{2n}\cdot\theta\cdot\left\{f^{(2n-1)}(a+h)-f^{(2n-1)}(a)\right\},$$

$$(0<\theta<1),$$

benutzen, welche zur Voraussetzung hat, dass die Function $f^{(2n-1)}(x)$ von $x=a$ bis $x=(a+h)$ entweder nur wächst oder nur abnimmt.

Substituirt man in der Formel (1) für a nach und nach $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, ..., $a+(r-1)h$ und setzt

$$(3)\qquad a+rh=b,\quad h=\frac{b-a}{r},$$

so folgt durch die Summation sämmtlicher Gleichungen:

$$(3)\quad \int_a^b f(x)\,dx = h\cdot\left\{\begin{array}{l} f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)+\cdots \\ \cdots+f\big(a+(r-1)h\big)+f(b) \end{array}\right\}$$

$$-\frac{1}{2}h\left\{f(a)+f(b)\right\}-\frac{B_1}{2!}h^2\left\{f'(b)-f'(a)\right\}$$

$$+\frac{B_2}{4!}h^4\left\{f'''(b)-f'''(a)\right\}-\frac{B_3}{6!}h^6\left\{f^{V}(b)-f^{V}(a)\right\}+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}}{(2n-2)!}h^{2n-2}\left\{f^{(2n-3)}(b)-f^{(2n-3)}(a)\right\}$$

$$+\mathfrak{R}_n;$$

wo $\mathfrak{R}_n$ die Summe sämmtlicher Reste der einzelnen Reihen bedeutet. Die letzteren haben nach (2) sämmtlich einerlei Vorzeichen, wenn $f^{(2n-1)}(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ nur wächst oder nur abnimmt, und sind dem absoluten Werthe nach kleiner, als wenn man in (2) $\theta=1$ macht. Daraus folgt, dass

$$(4)\qquad \mathfrak{R}_n=(-1)^n\cdot\frac{2B_n}{(2n)!}h^{2n}\cdot\theta\left\{f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)\right\}$$

$$=(-1)^n\cdot 4\theta\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2n}s_{2n}\cdot\left\{f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)\right\},$$

$$(0<\theta<1)$$

hervorgeht, falls $f^{(2n-1)}(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ nur wächst oder nur abnimmt. (s_{2n} nähert sich als Summe der reciproken $(2n)^{\text{ten}}$ Potenzen der ganzen Zahlen mit wachsendem n dem Grenzwerthe 1 und ist höchstens $=\pi^2 B_1 = 1{,}6449$, nämlich für $n=1$.)

Die Formel (3) ist geeignet, das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit jedem gewünschten Grade der Genauigkeit zu berechnen, und zwar in folgender Weise:

Nachdem man die Derivirten $f'(x)$, $f'''(x)$, $f^{V}(x)$, ..., $f^{(2n-1)}(x)$ gebildet hat, wähle man den Werth von n so, dass die Function $f^{(2n-1)}(x)$ nur eine mässige Anzahl mal

innerhalb des Integrationsintervalls im Wachsen und Abnehmen wechselt — d. i. so, dass (nach § 3) die Function $f^{(2n)}(x)$ nur eine geringe Anzahl von Vorzeichenwechseln zeigt — und theile das Gesammtintervall in solche Unterintervalle (a, b), in denen kein Wechsel dieser Art stattfindet. Diese Unterintervalle behandle man gesondert nach der Formel (3).

Bedeutet nun $\mathfrak{R}_n$ den Fehler, welchen man bei der Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$ höchstens zulassen will, so bestimme man h — nach Anleitung der Formel (4) — so, dass dem absoluten Betrage nach

$$h = \frac{b-a}{r} < \sqrt[2n]{\text{abs}\cdot\frac{(2n)!\,\mathfrak{R}_n}{2B_n\left\{f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)\right\}}}$$

wird und dabei für die numerische Substitution in (3) möglichst bequem ausfällt.

Schliesslich substituire man einen solchen Werth von h in (3).

Um die Tragweite der Formel (3) völlig zu würdigen, machen wir noch darauf aufmerksam, dass sie auch geeignet ist, bei der Summation von endlichen und auch von unendlichen Reihen gute Dienste zu leisten.

Denn löst man sie für den ersten Summanden der rechten Seite als Unbekannte auf, indem man $a = h = 1$ setzt, nachdem man das Glied $h f(b)$ abgesondert hat, so erhält man:

$$(5)\qquad f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(r)$$

$$=\int_1^{r+1} f(x)\,dx-\frac{1}{2}\left\{f(r+1)-f(1)\right\}+\frac{B_1}{2!}\left\{f'(r+1)-f'(1)\right\}$$

$$-\frac{B_2}{4!}\left\{f'''(r+1)-f'''(1)\right\}+\frac{B_3}{6!}\left\{f^{V}(r+1)-f(1)\right\}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-2)!}\cdot\left\{f^{(2n-3)}(r+1)-f^{(2n-3)}(1)\right\}-\mathfrak{R}_n,$$

wo

(6) $$\mathfrak{R}_n = (-1)^n \frac{2B_n}{(2n)!} \cdot \theta \cdot \left\{ f^{(2n-1)}(r+1) - f^{(2n-1)}(1) \right\},$$
$$(0 < \theta < 1),$$

ist, falls $f^{(2n-1)}(x)$ von $x = 1$ bis $x = (r+1)$ nur wächst oder nur abnimmt.

§ 111.

Numerisches Beispiel für die Berechnung der Integrale durch die Maclaurin-Malmsténsche Reihe.

Nehmen wir uns vor, numerisch das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

dessen Werth bekanntlich $= \frac{\pi}{4}$ ist, zu berechnen, so ist in den Formeln des vorigen § $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx} \cdot \operatorname{arc\,tng} x$ zu setzen. Nach § 67, (23) hat man daher:

$$f^{(m)}(x) = m! \cos \omega^{m+1} \cdot \sin\left[(m+1)\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)\right], \quad \operatorname{tng} \omega = x.$$

Vorzeichenwechsel von $f^{(2n)}$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$, d. i. zwischen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{4}$ finden für solche ω dieses Intervalls statt, für welche

$$(2n+1)\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = k\pi, \quad \omega = \frac{2(k-n)-1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

bei einem ganzen k wird. Dies geschieht also

für $n = 1$ bei $\omega = \frac{\pi}{6} = 30^0$,

„ $n = 2$ „ $\omega = \frac{\pi}{10} = 18^0$,

„ $n = 3$ „ $\omega = \frac{\pi}{14} = 12^0 25', 714$ und $\omega = \frac{3\pi}{14} = 37^0 17', 142$,

„ $n = 4$ „ $\omega = \frac{\pi}{18} = 10^0$ „ $\omega = \frac{3\pi}{18} = 30^0$,

u. s. w.

Legen wir unserer Rechnung den Werth $n = 2$ zu Grunde. so muss demnach das Intervall (0, 1) in zwei Unterabtheilungen zerlegt werden, deren Grenze bei $x = \operatorname{tng} 18^0 = 0,3249197$ liegt. Sodann ist zunächst

$$f'''(\operatorname{tng} 18^0) = 3!\,(\cos 18^0)^4 \sin\left[4\left(\frac{\pi}{2} + 18^0\right)\right] = 3!\,(\cos 18^0)^4 \sin 72^0$$
$$= 3!\,(\cos 18^0)^5 \qquad = 3!\,0,\cdot 778093$$

zu berechnen, hierauf;

$$\sqrt[4]{\frac{4!\,\Re_2}{2\,B_1\left[f'''(\operatorname{tng} 18^0) - f'''(0)\right]}} = \sqrt[4]{\Re_2}\cdot 1,981698,$$

$$\sqrt[4]{\frac{4!\,\Re_2}{2\,B_1\left[f'''(\operatorname{tng} 18^0) - f'''(1)\right]}} = \sqrt[4]{\Re_2}\cdot 1,981698.$$

Da die Fehler der beiden Intervalle entgegengesetzte Vorzeichen haben, so verstärken sie sich nicht, sondern heben sich theilweise auf. Man kann daher mit Sicherheit schliessen, dass der Gesammtfehler $R_2 < 0,0001$ sein wird, wenn man durchgängig $h = 0,2$ macht, also nach der Formel

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$
$$= 0,2\cdot\left\{1 + \frac{1}{1,04} + \frac{1}{1,16} + \frac{1}{1,36} + \frac{1}{1,64} + \frac{1}{2}\right\}$$
$$- \frac{0,2}{2}\left\{1 + \frac{1}{2}\right\} - \frac{0,04}{12}\cdot\left\{-\frac{1}{2} + 0\right\}$$
$$= 0,2\cdot\left\{\frac{1}{1,04} + \frac{1}{1,16} + \frac{1}{1,36} + \frac{1}{1,64}\right\} + \cdot\frac{3}{20} + \frac{1}{600}$$
$$= \frac{1}{5,2} + \frac{1}{5,8} + \frac{1}{6,8} + \frac{1}{8,2} + \frac{3}{20} + \frac{1}{600}$$

rechnet; da 0,2 sich von $\sqrt[4]{0,0001}\cdot 1,98 = 0,198$ zu wenig (nur um 0,002) unterscheidet, um eine wesentliche Änderung zu Ungunsten des Resultats hervorzurufen.

Das Resultat der sehr einfachen Berechnung auf 9 Decimalstellen ist $\frac{\pi}{4} = 0,785\,398\,195$.

Wir wollen, indem wir jetzt die Formel (3) des vorigen § eingehender zu Rathe ziehn, zu ermitteln suchen, wie gross die Genauigkeit dieses Werthes wirklich ist, da sich schon oben ein Grund für die Erwartung zeigte, dass der Fehler wesentlich kleiner als 0,0001 ausfallen möchte.

Macht man nämlich zu dem Zwecke $n = 4$, so kommt zu den bereits in Berechnung gezogenen Gliedern noch hinzu:

$$+\frac{B_2}{4!}\cdot 0{,}2^4\cdot\left\{f'''(1)-f'''(0)\right\}-\frac{B_3}{6!}\cdot 0{,}2^6\cdot\left\{f^{V}(1)-f^{V}(0)\right\}$$

$$= +0-\frac{B_3}{6!}\cdot 5!\,\frac{0{,}2^6}{8} = -\frac{1}{31\,500\,000} = -0{,}000\,000\,032$$

nebst einem Reste $\mathfrak{R}_4$, zu dessen Beurtheilung wir auf folgende Weise gelangen können:

Die Function $f^{VIII}(a)$ wechselt, wie wir oben gesehn haben, zwischen $x = 0$ und $x = 1$ ihr Vorzeichen an den Stellen $x = \operatorname{tng} 10^0 = 0{,}176$ und $x = \operatorname{tng} 30^0 = 0{,}577$, indem sie von $f^{VIII}(0) = +8!$ ausgeht. Daher wächst $f^{VII}(x)$ von $f^{VII}(0) = 0$ aus bis zu einem Maximalwerthe $f^{VII}(\operatorname{tng} 10^0) = +7!\cdot 0{,}871$, nimmt dann bis zu einem Minimalwerthe $f^{VII}(\operatorname{tng} 30^0) = -7!\cdot 0{,}274$ ab und wächst schliesslich wieder bis $f^{VII}(1) = 0$.

Mithin ist nach der Bedeutung, welche der Rest $\mathfrak{R}_4$ der Formel (3) des vorigen § hat, die Schätzung von $\mathfrak{R}_4$ bei der obigen Wahl des Werthes von $h = 0{,}2$ nicht gerade bequem und scharf, weil die Zahlen 0,176 und 0,577 keine Vielfachen von h sind. Man erkennt aber, dass $\mathfrak{R}_4$ sich aus drei Theilen zusammensetzen lässt, indem man das ganze Intervall (0, 1) an den Stellen 0,2 und 0,6 abtheilt, und dass man dann den Fehler nicht unterschätzen wird, wenn man für die einzelnen Theile nach der Formel (4) des vorigen § rechnet, indem man im ersten Intervall $f^{VII}(\operatorname{tng} 10^0)$ anstatt $f^{VII}(0,2)$ und im zweiten Intervall ausserdem $f^{VII}(\operatorname{tng} 30^0)$ anstatt $f^{VII}(6)$ in Rechnung zieht. Thut man dies, so folgt:

$$R_4 = + \frac{2B_4}{8!} \cdot 0{,}2^8 \begin{Bmatrix} \theta_1 \cdot f^{VII}(\operatorname{tng} 10^0) + \theta_2 \cdot \left[f^{VII}(\operatorname{tng} 30^0) - f^{VII}(\operatorname{tng} 10^0) \right] \\ - \theta_3 f^{VII}(\operatorname{tng} 30^0) \end{Bmatrix}$$

$$= + \frac{1}{4} B_4 \cdot 0{,}2^8 \cdot \left\{ \theta_1 \cdot 0{,}871 - \theta_2 \cdot 1{,}145 + \theta_3 \cdot 0{,}274 \right\}$$

$$= + 0{,}000\,000\,0213 \cdot \left\{ \theta_1 \cdot 0{,}871 - \theta_2 \cdot 1{,}145 + \theta_3 \cdot 0{,}274 \right\}.$$

Da wir von den Zahlen θ_1, θ_2, θ_3 wissen, dass sie zwischen 0 und 1 liegen, so liegt der Werth der Klammer jedenfalls zwischen $+ 1{,}145$ und $- 1{,}145$, mithin der Werth von $\mathfrak{R}_4$ zwischen $+ 0{,}000\,000\,024$ und $- 0{,}000\,000\,024$.

Mithin ist der berechnete Werth von $\frac{\pi}{4}$ um eine Zahl zu vermindern, welche zwischen

$$0{,}000\,000\,032 + 0{,}000\,000\,024 = 0{,}000\,000\,056$$

und

$$0{,}000\,000\,032 - 0{,}000\,000\,024 = 0{,}000\,000\,012$$

liegt. (Dies stimmt mit dem früher auf andere Weise berechneten Werth von $\frac{\pi}{4} = 0{,}785\,398\,163$ überein, welcher um $0{,}000\,000\,032$ kleiner ist, als der obige.

Unsere Rechnung gab mithin den Werth von $\frac{\pi}{4}$ so genau, wie er durch 7 Decimalstellen ausgedrückt werden kann.

§ 112.

Anwendung der Maclaurin-Malmsténschen Reihe auf die Summe gleich hoher Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung.

Wir bezeichnen:

(1) $S = a^k + (a+h)^k + (a+2h)^k + (a+3h)^k + \cdots + (a+rh)^k$.

Es lassen sich unbeschränkt viele Functionen von x bestimmen, welche die Werthe der einzelnen Glieder dieser Reihe annehmen, sobald man für x der Reihe nach a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, … einsetzt. Denn hat man erst eine solche Function gefunden —

z. B. $f(x) = x^k$ — so braucht man zu ihr nur eine beliebige Function zu addiren, welche an allen diesen Stellen verschwindet. Unserm Zweck würde demnach u. a. auch die Function $x^k + p \sin \frac{\pi(x-a)}{h}$ genügen, wo p eine beliebige Zahl bedeutet.

Wir wollen $f(x) = x^k$ setzen und, indem wir die Bezeichnung $a + rh = b$ vorläufig beibehalten, in § 110, (3) die Werthe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}\,, \quad f^{(m)}(x) = m!\binom{k}{m} x^{k-m}$$

substituiren. Dann folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned}
(2)\quad S = {} & \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)\cdot h} + \frac{b^k + a^k}{2} \\
& + \frac{1}{2} B_1 \binom{k}{1} h \left\{b^{k-1} - a^{k-1}\right\} \\
& - \frac{1}{4} B_2 \binom{k}{3} h^3 \left\{b^{k-3} - a^{k-3}\right\} \\
& + \frac{1}{6} B_3 \binom{k}{5} h^5 \left\{b^{k-5} - a^{k-5}\right\} - \cdots \\
+ (-1)^n \cdot \frac{1}{2n-2} \cdot B_{n-1} & \binom{k}{2n-3} h^{2n-3} \left\{b^{k+3-2n} - a^{k+3-2n}\right\} \\
+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{\theta}{n} \cdot B_n & \binom{k}{2n-1} h^{2n-1} \left\{b^{k+1-2n} - a^{k+1-2n}\right\}.
\end{aligned}$$

Im Weiteren unterscheiden wir mehrere Fälle.

I.

Es sei k eine ganze positive Zahl.

Dann verschwindet der Rest, welcher die unbestimmte Zahl θ enthält, wenn man n so gross macht, dass $2n - 1 > k$ ist, weil hierbei sein Factor $\binom{k}{2n-1} = 0$ wird. Mithin folgt in diesem Falle:

$$(3)\quad a^k + (a+h)^k + (a+2h)^k + (a+3h)^k + \cdots + (a+rh)^k$$

$$= \frac{(a+rh)^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)\cdot h} + \frac{1}{2}\left\{(a+rh)^k + a^k\right\}$$

$$+ \frac{B_1}{2}\binom{k}{1} h \left\{(a+rh)^{k-1} - a^{k-1}\right\}$$

$$- \frac{B_2}{4}\binom{k}{3} h^3 \left\{(a+rh)^{k-3} - a^{k-3}\right\}$$

$$+ \frac{B_3}{6}\binom{k}{5} h^5 \left\{(a+rh)^{k-5} - a^{k-5}\right\}$$

$$- \frac{B_4}{8}\binom{k}{7} h^7 \left\{(a+rh)^{k-7} - a^{k-7}\right\} + \cdots,$$

wo die Reihe so weit fortzusetzen ist, bis sie von selbst abbricht.

Für $a=0$, $h=1$ giebt dies die Summe der k^{ten} Potenzen der ganzen Zahlen, ausgedrückt durch die höchste unter ihnen:

$$(4)\qquad 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \cdots + r^k$$

$$= \frac{r^{k-1}}{k+1} + \frac{1}{2} r^k + \frac{B_1}{2}\binom{k}{1} r^{k-1} - \frac{B_2}{4}\binom{k}{3} r^{k-3} + \frac{B_3}{6}\binom{k}{5} r^{k-5} - \cdots,$$

wo aber rechts bei einem ungraden k vor demjenigen Gliede abgebrochen werden muss, welches den Factor r^0 erhalten würde, weil dieses durch die Specialisirung $a=0$ aus demjenigen Gliede folgt, welches in (3) den Factor $\left\{(a+rh)^0 - a^0\right\} = \left\{1-1\right\} = 0$ besitzt.

Es ist demnach:

$$1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots + r^1 = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} r$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + r^2 = \frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{6} r,$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + r^3 = \frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^3 + \frac{1}{4} r^2,$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + r^4 = \frac{1}{5} r^5 + \frac{1}{2} r^4 + \frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{30} r.$$

u. s. w.

II.

Es sei $k = -m$ eine negative Zahl, und zwar $m > 1$.

Dann convergirt die Reihe S für unendlich wachsende r, es wird $\lim_{r=\infty} \cdot b^{k+1-\mu} = \lim_{r=\infty} \cdot (a+rh)^{-(1-m+\mu)} = 0$, und die Gleichung (2) verwandelt sich, wenn man noch $h = 1$ macht, in:

$$(5) \qquad \frac{1}{a^m} + \frac{1}{(a+1)^m} + \frac{1}{(a+2)^m} + \frac{1}{(a+3)^m} + \cdots$$

$$= \frac{1}{(m-1)a^{m-1}} + \frac{1}{2a^m} - \frac{B_1\binom{-m}{1}}{2a^{m+1}} + \frac{B_2\binom{-m}{3}}{4a^{m+3}} - \frac{B_3\binom{-m}{5}}{6a^{m+5}} + \cdots$$

$$-(-1)^n \cdot \frac{B_{n-1}\binom{-m}{2n-3}}{(2n-2)a^{m+2n-3}} + (-1)^n \cdot \frac{\theta B_n \binom{-m}{2n-1}}{n a^{m+2n-1}}.$$

Ist demnach k eine ganze negative, mithin m eine ganze positive Zahl, so kann man dies auch so schreiben:

$$(6) \qquad \frac{1}{a^m} + \frac{1}{(a+1)^m} + \frac{1}{(a+2)^m} + \frac{1}{(a+3)^m} + \cdots$$

$$= \frac{2a+m-1}{2(m-1)a^m} + \frac{1}{(m-1)!\,a^{m+1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{B_1 \cdot m!}{2!\,a^0} - \dfrac{B_2 \cdot (m+2)!}{4!\,a^2} + \cdots \\ \cdots + (-1)^n \cdot \dfrac{B_{n-1} \cdot (m+2n-4)!}{(2n-2)!\,a^{2n-4}} \end{array} \right\}$$

$$-(-1)^n \cdot \frac{2\theta B_n \cdot (m+2n-2)!}{(m-1)!\,(2n)!\,a^{m+2n-1}}.$$

Will man hieraus z. B. die Summe

$$s_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \cdots$$

numerisch berechnen — für die graden m sind schon in § 66 bequeme Formeln erhalten — so kann man dieselbe in zwei Theile zerlegen, von denen der erste

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots+\frac{1}{(a-1)^m}$$

gliedweise, der zweite aber, welcher mit $\frac{1}{a^m}$ beginnt, nach Formel (6) ausgerechnet wird, nachdem aus dem Restausdruck der letzteren die Zahlen a und n so bestimmt sind, dass der Werth des Restes unter die in Aussicht genommene Fehlergrenze herabsinkt. Dies ist bei (6) — und auch bei (5), falls m keine ganze Zahl ist — immer möglich.

Wir wollen s_3 so berechnen, dass der Fehler $< 0,000\,000\,0001$ werden muss. Für $m=3$ lautet die Formel (6):

$$(7)\qquad \frac{1}{a^3}+\frac{1}{(a+1)^3}+\frac{1}{(a+2)^3}+\frac{1}{(a+3)^3}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{a+1}{a^3}+\frac{3B_1}{a^4}-\frac{5B_2}{a^6}+\frac{7B_3}{a^8}-\cdots \\ \cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)B_{n-1}}{a^{2n}}-(-1)^n\cdot\frac{2\theta(2n+1)B_n}{a^{2n+2}}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{a+1}{2a^3}+\frac{1}{4a^4}-\frac{1}{12a^6}+\frac{1}{12a^8}-\frac{3}{20a^{10}}+\frac{5}{12a^{12}}-\frac{691}{420a^{14}}+\frac{35}{4a^{16}}$$

$$-\frac{3617}{60a^{18}}+\frac{43867}{84a^{20}}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)B_{n-1}}{2a^{2n}}$$

$$-(-1)^n\cdot\theta\cdot\frac{(2n+1)B_n}{a^{2n+1}}.$$

Da der Fehler, welchen man dadurch begeht, dass man die Berechnung bei einem Gliede abbricht, stets kleiner als das Doppelte des gleichgebildeten nächsten Gliedes ist, so sieht man aus

den numerischen Werthen der Coefficienten, dass für $a = 5$ der Fehler sich mit Sicherheit nur auf ungefähr $\frac{1}{5^{15}} = 0{,}000\,000\,000\,033$ herabdrücken lässt, wobei $\frac{35}{4\,a^{16}}$ das letzte zu benutzende Glied wäre. Macht man a grösser, so lässt sich die Genauigkeit verstärken, weil dann die reciproken Potenzen von a schneller abnehmen.

Führt man die Rechnung für $a = 5$ aus — welche wegen $\frac{1}{5} = 0{,}2$ ganz bequem ist — so erhält man in 11 Decimalstellen:

$$\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{8^3} + \cdots \qquad = 0{,}024\,394\,866\,12.$$

Ausserdem findet man direct ohne Mühe:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \qquad = 1{,}177\,662\,037\,04.$$

Mithin ist:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots \qquad = 1{,}202\,056\,903\,16;$$

und dies stimmt noch in der 11ten Stelle. (Vergl. § 103.)

III.

Es sei $k = -m = -1, \quad m = +1.$

In diesem Falle ändert sich die Formel (2) dadurch ab, dass $\int_a^b f(x)\,dx$ nicht den für alle übrigen k geltenden algebraischen Werth hat, welcher dort substituirt ist, sondern den Werth $l\frac{b}{a}$. Mithin tritt für (2) die Formel ein:

$$(8)\qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{a+h}+\frac{1}{a+2h}+\cdots+\frac{1}{a+rh}-\frac{1}{h}\cdot l\,\frac{a+rh}{a}$$

$$=+\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{a+rh}\right\}+\frac{B_1}{2}h\left\{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(a+rh)^2}\right\}$$

$$-\frac{B_2}{4}h^3\left\{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{(a+rh)^4}\right\}$$

$$+\frac{B_3}{6}h^5\left\{\frac{1}{a^6}-\frac{1}{(a+rh)^6}\right\}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{2n-2}h^{2n-3}\left\{\frac{1}{a^{2n-2}}-\frac{1}{(a+rh)^{2n-2}}\right\}$$

$$+(-1)^{n+1}\theta\cdot\frac{B_n}{n}h^{2n-1}\left\{\frac{1}{a^{2n}}-\frac{1}{(a+rh)^{2n}}\right\}.$$

Macht man also $h=1$, $r=\infty$, so folgt:

$$(9)\qquad \lim_{r=\infty}\cdot\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{a+r}-l\,\frac{a+r}{a}\right\}$$

$$=\frac{1}{2a}+\frac{B_1}{2a^2}-\frac{B_2}{4a^4}+\frac{B_3}{6a^6}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-2)a^{2n-2}}+(-1)^{n+1}\theta\cdot\frac{B_n}{na^{2n}}.$$

Für $a=1$ geht die linke Seite in die Eulersche Constante M des § 103 über.

Wollte man dieselbe durch die directe Substitution von $a=1$ berechnen, so wäre nur eine geringe Genauigkeit zu erreichen, weil das Anwachsen der Glieder der rechten Seite schon nach dem vierten, nämlich nach $\frac{1}{6}B_3=\frac{1}{252}$, beginnt.

Addirt man aber auf beiden Seiten von (9) die Summe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{a-1}-l\,a,$$

so geht ihre linke Seite ebenfalls in M über; und man erhält:

$$(10)\quad M=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{a-1}-l\,a+\frac{1}{2a}+\frac{B_1}{2a^2}-\frac{B_2}{4a^4}+\frac{B_3}{6a^6}$$

$$-\frac{B_4}{8a^8}+\cdots+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-2)a^{2n-2}}+(-1)^{n+1}\theta\cdot\frac{B_n}{na^{2n}};$$

wo man nun für a eine solche Zahl wählen kann, dass der Fehler hinreichend klein, und die Rechnung noch nicht unbequem wird.

Z. B. ist der numerische Werth von $l\,10$ aus § 43 auf 21 Decimalstellen bekannt; die Summe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9}$ auf eben so viele Stellen zu berechnen, macht wenig Mühe, und noch weniger die Berechnung der 5 Brüche von $\frac{B_1}{2\cdot 10^2}$ bis $\frac{B_5}{10\cdot 10^{10}}$, welche man nur zu berücksichtigen braucht, wenn M auf 21 Decimalstellen genau ausfallen soll.

IV.

Es sei $k>1$ aber nicht eine ganze Zahl.

Ohne uns eingehend mit diesem Fall zu beschäftigen, wollen wir wenigstens darauf aufmerksam machen, dass der Exponent von b auf der rechten Seite von (2) nach einer zählbaren Anzahl von Gliedern negativ wird, weshalb das b von da ab nicht mehr vorkommt, wenn man r unendlich gross macht.

Hat man diejenigen Glieder, welche das b mit positivem Exponenten besitzen, vorher auf die linke Seite gebracht, so entstehn Gleichungen, analog der Gleichung (9).

Z. B. ergiebt sich für $k = -m$, $0 < m < 1$:

$$(11)\qquad \lim_{r=\infty} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^m} + \frac{1}{(a+1)^m} + \frac{1}{(a+2)^m} + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{(a+r)^m} - \frac{(a+r)^{1-m} - a^{1-m}}{1-m} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2a^m} + \frac{B_1}{2a^{m+1}} \cdot \frac{m}{1} - \frac{B_2}{4a^{m+3}} \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3}$$

$$+ \frac{B_3}{6a^{m+5}} \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdots \frac{m+4}{5} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{B_{n-1}}{(2n-2)a^{m+2n-3}} \cdot \binom{-m}{2n-3}$$

$$+ (-1)^n \cdot \theta \cdot \frac{B_n}{n a^{m+2n-1}} \cdot \binom{-m}{2n-1}.$$

§ 113.

Schlussbemerkung über die numerische Berechnung der Integrale.

Es geht aus dem Begriff des Integrals als selbstverständlich hervor, dass dort, wo die Integration nicht zu anderweitig bekannten Functionen führt, nothwendig Reihen irgend welcher Art als Hülfsmittel für die Berechnung eintreten müssen — und geschieht das Erstere, so ist der Unterschied eigentlich nur der, dass Ausdrücke, deren Werthe bereits häufiger berechnet sind, an die Stelle von solchen treten, bei welchen dies nicht der Fall ist.

So mannichfach, wie die Formen von Reihen sein können, sind mithin auch die Berechnungsmethoden der Integrale.

Der Zweck dieses Buchs dürfte ausreichend erfüllt sein, wenn wir auf andere Reihen ausser der Maclaurin-Malmsténschen neben denjenigen, welche sich aus dem Früheren von selbst darbieten, nicht näher eingehn und nur referiren, dass eine umfangreiche Literatur über diesen Gegenstand vorliegt. Es ist aber vor allen denjenigen Berechnungsmethoden **ausdrücklich zu warnen**, welche nur Zahlen ergeben, ohne den Rest mit Sicherheit zu controliren — wie ingeniös sie auch sonst erfunden sein mögen.

Capitel XVII.

Über Maxima und Minima stetiger Functionen.

§ 114.

Recapitulation des Begriffs.

Was man unter den Maximis und Minimis einer Function zu verstehen habe, ist bereits in § 3 angegeben; auch ist daselbst in dem Vorzeichenwechsel der Derivirten erster Ordnung ein insgemein bequemes Erkennungsmittel derjenigen Stellen gefunden worden, an welchen Maxima und Minima vorkommen. Wir haben in den vorangehenden Capiteln mehrfach von demselben Gebrauch gemacht.

Es verlohnt sich eine eingehendere Betrachtung derselben, theils um die Aufsuchungsmethode so abzuändern, dass sie in manchen Fällen noch handlicher wird, theils um gewisse Beziehungen der Functionen und ihrer Derivirten zu einander aufzudecken, theils in Absicht auf die Geometrie, wo die Maxima und Minima der Maasse an Curven und Flächen von Belang sind, um ein klares Bild von dem Verlauf und der Ausbreitung dieser Raumgebilde zu erhalten.

Wir recapituliren zunächst aus § 3 den Begriff nebst dem dort gewonnenen Aufsuchungsmittel.

Lässt man das Argument x der Function $f(x)$ wachsen, so heisst $f(a)$ ein **Maximum** von $f(x)$, falls $f(x)$ bis zur Stelle $x = a$ wächst und dann abnimmt, dagegen ein **Minimum**, falls die Veränderung der Function $f(x)$ in umgekehrter Weise vor sich geht.

Die Derivirte $f'(x)$ tritt an der Stelle $x = a$ bei den Maximis von positiven Werthen zu negativen über, bei den Minimis dagegen von negativen zu positiven; — sie wechselt also in beiden Fällen nothwendig ihr Vorzeichen.

§ 115.

Maxima und Minima solcher Functionen, deren Derivirten bis zu einer entscheidenden Ordnung stetig bleiben.

Maximal- und Minimalwerthe von $f(x)$ können unter sehr verschiedenen Umständen eintreten, welche — wenn man bloss die differentiirbaren Functionen im Auge behält — sich unter folgende zwei Classen subsummiren lassen:

1) Die Derivirte $f'(x)$ geht discontinuirlich von einem Werthe zu einem Werthe von entgegengesetztem Vorzeichen über, indem sie dabei entweder endlich bleibt, oder dies nicht thut. — Mit diesem Fall wollen wir uns nur befassen, um eine zu weit gehende Verallgemeinerung derjenigen Kriterien abzuschneiden, welche bei continuirlichen Derivirten Platz greifen.

2) Die Derivirte $f'(x)$ ändert ihr Vorzeichen bei stetiger Veränderung durch Null hindurch.

In Bezug auf den letztgedachten Fall trifft folgende Erwägung zu:

Erleidet die Derivirte $f'(x)$ beim Durchgange des Argumentes durch $x = a$ einen Vorzeichenwechsel — was nach dem vorigen § für Maximal- und Minimalwerthe $f(a)$ nothwendig ist — so darf $f'(x)$ hierbei nur wachsen oder nur abnehmen; und dies hat nach § 3 zur Folge, dass $f''(x)$ sein Vorzeichen bewahren muss.

Das letztere — nämlich das Vorzeichen von $f''(x)$ — muss bei einem Maximum von $f(x)$ negativ sein, weil $f'(x)$ beim Durchgange durch Null hindurch vom Positiven zum Negativen abnimmt, dagegen bei einem Minimum positiv, weil $f'(x)$ vom negativen Bereiche heraus in den positiven hinein wächst.

Ergiebt die Substitution von $x = a$ ein erkennbares Vorzeichen von $f''(x)$, so braucht man mithin nur den Substitutionswerth $f''(a)$ in Betracht zu ziehn, um das Vorzeichen der Derivirten $f''(x)$ in der Nähe von $x = a$ zu ermitteln. Ist dies aber nicht der Fall, weil $f''(a) = \pm 0$ wird, so muss nach der obigen Bemerkung über das Vorzeichen von $f''(x)$ diese Function gleichzeitig mit $f(x)$ einen Maximalwerth oder einen Minimalwerth

besitzen. Und um zu erkennen, ob $f''(x)$ ein Maximum oder Minimum ist, kann man nun auf $f''(x)$ genau dieselben Schlüsse anwenden, welche wir hinsichtlich $f(x)$ besprochen haben; so dass dann auch $f'''(a) = 0$ sein muss, und $f^{IV}(x)$ in der Nachbarschaft von $x = a$ nur positive oder nur negative Werthe besitzen darf. Sollte auch $f^{IV}(a) = \pm 0$ sein, so unterwirft sich $f^{IV}(x)$ derselben Betrachtung; u. s. w.

Hieraus folgt der

Lehrsatz.

Verschwindet $f'(x)$ für $x = a$, und besitzt in der Reihe der höheren Derivirten

$$f''(x),\ f'''(x),\ f^{IV}(x),\ f^{V}(x),\ \ldots,$$

diejenige von niedrigster Ordnung, welche dies nicht thut, eine **grade** Ordnungszahl (2r) und ausserdem einen endlichen Werth mit bestimmt ausgesprochenem Vorzeichen, so ist $f(a)$

ein **Maximum**

von $f(x)$ bei einem **negativen** Vorzeichen von $f^{(2r)}(a)$,

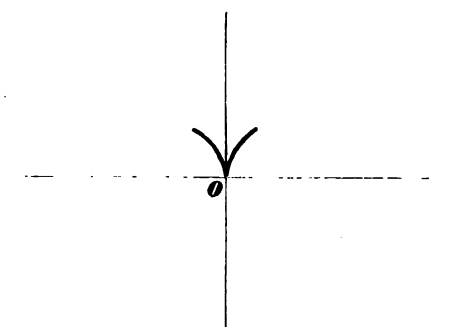
ein **Minimum**

von $f(x)$ bei einem **positiven** Vorzeichen von $f^{(2r)}(a)$.

Ist unter sonst gleichen Umständen die erste nicht verschwindende Derivirte von **ungrader** Ordnung, so ist $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Dass diese Vorzeichenregel hinsichtlich $f^{(2r)}(x)$ hinfällig wird, wenn der Zeichenwechsel von $f'(x)$ in Folge einer Discontinuität eintritt, wollen wir — obgleich man sich theoretisch eben so leicht davon überzeugt — an einem Beispiel zeigen.

Die Function $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ besitzt augenscheinlich einen Minimalwerth für $x = 0$, da sie für $x = 0$ verschwindet und sonst nur positive Werthe hat. Dasselbe ergiebt sich auch daraus, dass ihre Derivirte $f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$ ist, also an der Stelle $x = 0$ von



negativen Werthen zu positiven überspringt, sobald x wächst. Die zweite Derivirte

$$f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$$

ist trotzdem negativ; so dass wir hier ein **Minimum** bei einem **negativen** Vorzeichen von $f''(x)$ haben. — Die nebenstehende Figur veranschaulicht die Veränderung der Function geometrisch.

Beispiele für die Anwendung des obigen Lehrsatzes.

I.

Soll eine gegebene Zahl c so in zwei Theile getheilt werden, dass das Product aus der m^{ten} Potenz des einen und der n^{ten} Potenz des andern einen möglichst grossen Werth erhalte, so muss der Theil x so bestimmt werden, dass die Function

$$f(x) = x^m (c - x)^n$$

ein Maximum ist.

Es folgt durch Differentiation:

$$f'(x) = m x^{m-1} (c - x)^n - n x^m (c - x)^{n-1},$$

$$f''(x) = m(m-1) x^{m-2} (c - x)^n - 2 m n x^{m-1} (c - x)^{n-1} + n(n-1) x^m (c - x)^{n-2}.$$

Man kann $f'(x)$ auch in der Form

$$f'(x) = x^{m-1} (c - x)^{n-1} \cdot \left\{ m(c - x) - n x \right\}$$

schreiben, weshalb bei allen Werthen von m und n die Derivirte $f'(x) = 0$ wird, wenn man $m(c - x) - nx = 0$, d. i., wenn man

$$\frac{x}{c-x} = \frac{m}{n}, \quad x = \frac{m}{m+n} \cdot c, \quad c - x = \frac{n}{m+n} \cdot c$$

macht.

Bei dieser Annahme von x, bei welcher sich die Theile von c wie ihre Exponenten verhalten, findet — positive Werthe von m und n vorausgesetzt — ein Maximum

$$f(x) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} \cdot c^{m+n}$$

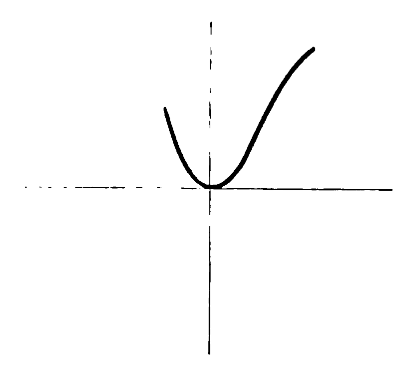
statt, weil die zweite Derivirte den negativen Werth

$$f''(x) = -\frac{m^{m-1} n^{n-1}}{(m+n)^{m+n-3}} \cdot c^{m+n-2}$$

erlangt.

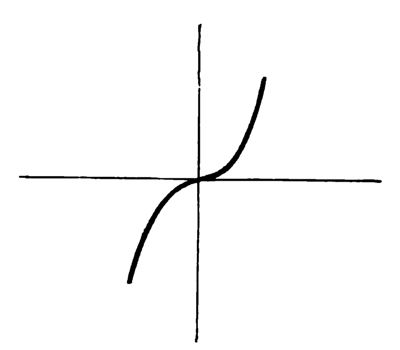
Ausserdem können Minima für $x = 0$ und für $x = c$ eintreten. Es hängt dies aber von der besonderen Beschaffenheit der Exponenten m und n ab.

Ist z. B. $m = 2$, also $f(x) = x^2 (c - x)^n$, so zeigen die Ausdrücke $f'(0) = 0$, $f''(0) = +2c^n$, dass an der Stelle $x = 0$ ein Minimum von $f(x)$ liegt. — Die Curve, deren Coordinaten x und $f(x)$ sind, besitzt dann in der Nähe von $x = 0$ die Gestalt:



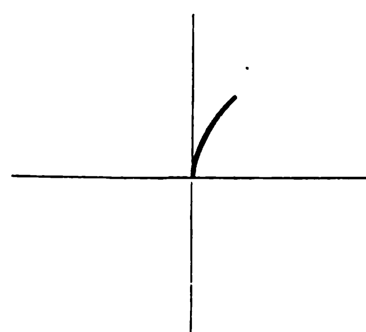
Für $m = 3$ findet bei $x = 0$ kein Minimum statt, weil $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$, aber $f'''(0) = 6c^n$ wird, während nach unserm Lehrsatz bei einem Maximum oder Minimum die erste nicht ver-

schwindende Derivirte von **grader** Ordnung sein muss. — Die Curve $f(x) = x^3(c - x)^n$ verläuft in der Nähe von $x = 0$ so:



Für $m = \frac{2}{3}$ ist an der Stelle $x = 0$ ein **Minimum vorhanden**, welches sich geometrisch in ähnlicher Weise veranschaulicht, wie es die erste Figur in diesem § zeigt.

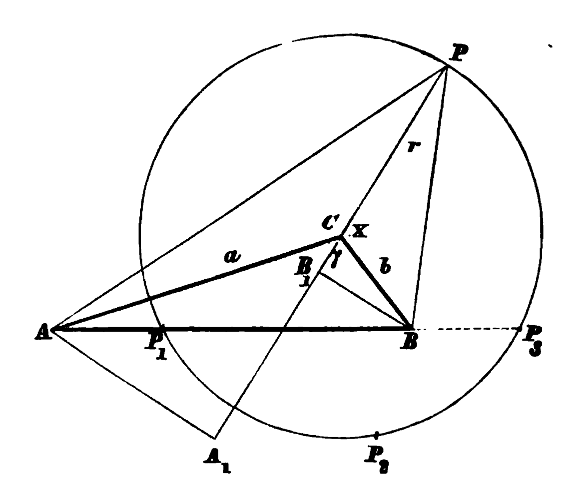
Für $m = \frac{1}{2}$ beginnt die Curve erst im Punkte $x = 0$, indem sie sich dort an die positive Seite der Ordinatenaxe als Tangente anschmiegt:



II.

Auf einem Kreise mit dem Radius r um C soll ein Punkt P von solcher Lage bestimmt werden, dass die

Summe seiner Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B ein Maximum oder ein Minimum sei.



Wir benennen CA = a, CB = b, ∠ ACB = γ, endlich ∠ BCP = x, indem wir diesen Winkel je nach der Lage des Radius CP als positiven oder negativen Zuwachs des Winkels ACB bei der Bewegung vom Schenkel CA aus betrachten. Dann ist:

$$PA = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos(2\pi - \gamma - x)}$$
$$= \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos(\gamma + x)},$$
$$PB = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos x};$$

und es handelt sich um die Bestimmung der Maxima und Minima der Function

$$f(x) = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos(\gamma + x)} + \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos x}.$$

Durch Differentiation ergiebt sich:

$$f'(x) = r \cdot \left\{ \frac{a\sin(\gamma + x)}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos(\gamma + x)}} + \frac{b\sin x}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos x}} \right\},$$

$$f''(x) = r \cdot \left\{ \frac{a \cos(\gamma + x)}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2 r a \cos(\gamma + x)}} + \frac{b \cos x}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2 b r \cos x}} \right\},$$

$$- r^2 \cdot \left\{ \frac{a^2 \sin(\gamma + x)^2}{\left(\sqrt{r^2 + a^2 - 2 r a \cos(\gamma + x)}\right)^3} + \frac{b^2 \sin x^2}{\left(\sqrt{r^2 + b^2 - 2 b r \cos x}\right)^3} \right\}.$$

Sind a und b von r verschieden, so kann keine von unsern Quadratwurzeln — weil sie die Strecken PA und PB messen — verschwinden. Dann ist $f'(x)$ stetig und muss zum Zweck des Vorzeichenwechsels durch Null hindurchgehn. Mithin finden Maxima und Minima nur statt, wo $f'(x) = 0$ wird.

Uns kommt es mehr auf die geometrische Bedeutung der Wurzeln dieser Gleichung als auf deren analytischen Ausdruck an. Fällen wir, um dieselbe zur Anschauung zu bringen, auf CP die Senkrechten AA_1 und BB_1, so folgt aus den Dreiecken CAA_1 und CBB_1:

$$(1) \quad \begin{cases} a \sin(\gamma + x) = + AA_1 & \text{für } 0 < \gamma + x < \pi, \\ b \sin x \quad = - BB_1 & \text{„} \quad 0 < \pi + x < \pi; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a \sin(\gamma + x) = - AA_1 & \text{„} \quad \pi < \gamma + x < 2\pi, \\ b \sin x \quad = + BB_1 & \text{„} \quad \pi < \pi + x < 2\pi. \end{cases}$$

Man kann demnach

$$f'(x) = r \cdot \left\{ \pm \frac{AA_1}{AP} \mp \frac{BB_1}{BP} \right\} = r \cdot \{ \pm \sin CPA \mp \sin CPB \}$$

darstellen, wo die oberen Vorzeichen für die Combination (1), die unteren aber für die Combination (2) gelten, während die Vorzeichen der Summanden im letzten Ausdruck bei jeder andern Combination der Winkel übereinstimmen. Es geben also nur die obigen Combinationen (1) und (2) Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, und zwar generell jede von ihnen deren zwei, da die Winkel CPA und CPB in jedem der herausgehobenen Gebiete zweimal gleich oder Supplemente werden, wenn AB theilweise im Kreisfelde liegt — wie man sogleich sieht, wenn man den Punkt P den Kreis durchlaufen lässt und dabei auf die Veränderung der Winkel CPA und CPB achtet.

Bei der in der Figur verzeichneten Lage von P, in welcher der Winkel APB von PC halbirt wird, findet ein Maximum statt, weil $f'(x)$ — wie ebenfalls der Augenschein bei gehöriger Rücksicht auf den letzten Ausdruck von $f'(x)$ zeigt — von positiven Werthen zu negativen übergeht, sobald x wächst. Dann folgt bei weiterer Vergrösserung von x ein Minimum — bei P_1 in der Graden AB, hierauf ein Maximum — etwa bei P_2, endlich ein Minimum — bei P_3 in der Graden AB.

Das Kriterium aus $f''(x)$ darüber, ob $f(x)$ Maximum oder Minimum oder keins von beiden sei, ist hier offenbar weniger bequem.

Es sind also, wenn a und b sich von r unterscheiden, generell zwei Maxima und zwei Minima vorhanden, und zwar dann jederzeit, wenn AB theilweise im Kreisfelde liegt.

Liegt der Punkt B auf dem Kreise, ist also $b = r$, so ändert sich die Betrachtung in so fern, als

$$PB = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos x} = \pm 2r\sin\frac{x}{2}$$

wird, wo man das Vorzeichen so anzunehmen hat, dass der Ausdruck einen positiven Werth erlangt. Die weitere Behandlung vermittelst Rechnung bietet keine neuen Schwierigkeiten; noch bequemer gestaltet sich die Entscheidung über die singulären Fälle vermittelst geometrischer Betrachtung.

Wir wollen auf sie nicht näher eingehn.

III.

Will man den grössten und den kleinsten Durchmesser einer Ellipse finden, deren Mittelpunktsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b)$$

ist, so handelt es sich, wenn man $x = v\cos\varphi$, $y = v\sin\varphi$ substituirt, um die Maxima und Minima von $2v$. Diese findet man selbstverständlich an den Maximal- und Minimalstellen von

$$v^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos\varphi^2 + a^2 \sin\varphi^2} = f(\varphi).$$

Nun ist

$$f'(\varphi) = -\frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2) \sin 2\varphi}{(b^2 \cos\varphi^2 + a^2 \sin\varphi^2)^2} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \cdot \sin 2\varphi \cdot [f(\varphi)]^2,$$

$$f''(\varphi) = -2\frac{a^2 - b^2}{a^2 \cdot b^2} \cdot f(\varphi) \cdot \left[\cos 2\varphi \cdot f(\varphi) + \sin 2\varphi \cdot f'(\varphi)\right].$$

$f'(\varphi)$ ist stetig und verschwindet nur dort, wo $\sin 2\varphi = 0$, d. i. wo $\varphi = 0$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist. Für $\varphi = 0$ hat $f''(\varphi)$ einen negativen, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ aber einen positiven Werth.

Daher liegt der grösste Durchmesser in der Abscissen-, der kleinste in der Ordinatenaxe.

§ 116.

Beziehung zwischen den reellen Wurzeln einer Function und denjenigen ihrer Derivirten.

Ändert die Derivirte $f'(x)$ der Function $f(x)$ sich stetig, während x von einer reellen Wurzel a der Gleichung $f(x) = 0$ bis zu einer zweiten b stetig wächst, so ist es — weil $f(x)$ in dem Intervall (a, b) nothwendiger Weise mindestens **ein** Maximum oder Minimum besitzt — nach § 3 unausbleiblich, dass $f'(x)$ in diesem Intervall (a, b) wenigstens einmal das Vorzeichen wechselt und dabei — wegen seiner vorausgesetzten Stetigkeit — durch Null hindurchgeht.

Dass dies auch öfter als einmal geschehen kann, ist selbstverständlich; ob es öfter geschieht, muss aus der Natur der speciell betrachteten Function entschieden werden.

Ist $f'(x)$ im Intervall (a, b) unstetig, so kann der Zeichenwechsel auch auf andere Weise zu Stande kommen — z. B. vermittelst des Durchganges durch das Unendliche. — Auch ist der Zeichenwechsel nicht einmal nöthig, wenn $f(x)$ ebenfalls im

vall (a, b) unstetig wird, weil sich dann die Differenz $f(b) - f(a)$ nicht mehr als ein Integral $\int_a^b f'(x)\,dx$ darstellen lässt. Z. B. bewahrt die Derivirte $\frac{d \operatorname{tng} x}{dx} = \frac{1}{\cos x^2}$ ihr Vorzeichen zwischen $x = 0$ und $x = \pi$, obgleich $\operatorname{tng} 0 = 0$ und $\operatorname{tng} \pi = 0$ ist.

Es gilt daher der

Lehrsatz.

Zwischen je zwei reellen Wurzeln $x = a$ und $x = b$ der Gleichung

$$f(x) = 0$$

liegt mindestens eine reelle Wurzel der Gleichung

$$f'(x) = 0,$$

falls die Derivirte $f'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig ist. Ist die Derivirte in diesem Intervalle unstetig, so braucht sie in ihm nicht zu verschwinden.

Dieser Satz lässt sich zuweilen mit Vortheil anwenden, um die Existenz reeller Wurzeln innerhalb eines bestimmten Intervalls nachzuweisen.

Ein interessantes Beispiel hierfür bietet die „**Kugelfunction**"

$$P^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n \cdot (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Macht man nämlich

$$f(x) = (x^2 - 1)^n,$$

so besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ zwei reelle Wurzeln $x = -1$ und $x = +1$.

Zwischen diesen liegt also mindestens eine reelle Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$; und da

$$f'(x) = 2nx(x^2 - 1)^{n-1}$$

auch für $x = -1$ und $x = +1$ verschwindet, so hat die Gleichung $f'(x) = 0$ mindestens[1]) drei reelle Wurzeln im Intervall $(-1, +1)$.

Zwischen je zweien von ihnen liegt mindestens eine reelle Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0$; und da (-1) und $(+1)$ ebenfalls Wurzeln von

$$f''(x) = 4n(n-1) \cdot x^2 (x^2-1)^{n-2} + 2n(x^2-1)^{n-1} = 0$$

sind, so besitzt diese Gleichung im Intervall $(-1, +1)$ mindestens vier reelle Wurzeln.

In der begonnenen Weise kann man weiter schliessen, so lange die einzelnen Summanden von $f^{(r)}(x)$ noch einen Factor (x^2-1) enthalten. Es ist:

$$f'''(x) = 8n(n-1)(n-2) \cdot x^3 (x^2-1)^{n-3} + 12n(n-1) \cdot x(x^2-1)^{n-}$$

$$f^{IV}(x) = 16n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot x^4 (x^2-1)^{n-4}$$
$$+ 48n(n-1)(n-2) \cdot x^2 (x^2-1)^{n-3}$$
$$+ 12n(n-1) \cdot (x^2-1)^{n-2},$$

u. s. w.,

$$f^{(r)}(x) = 2^r \cdot n(n-1)(n-2) \cdots (n+1-r) \cdot x^r (x^2-1)^{n-r}$$
$$+ a \cdot x^{r-2} (x^2-1)^{n-r+1} + b \cdot x^{r-4} (x^2-1)^{n-r+2} + \cdots$$

wo die Ausdrücke für die Coefficienten $a, b, \ldots$ uns in Absicht auf unsern Zweck gleichgültig sind.

Man erkennt aus dieser Form in Verfolg der oben begonnenen Schlussweise sofort, dass die Gleichung

$$f^{(n-1)}(x) = 0$$

im Intervall $(-1, +1)$ mindestens $(n+1)$ reelle Wurzeln — mit Einschluss von $x = -1$ und $x = +1$ — besitzt, weshalb die Gleichung

[1]) Dass es genau drei reelle Wurzeln $(-1, 0, +1)$ sind, interessirt vorläufig nicht.

$$f^{(n)}(x) = 0,$$

welche nicht mehr durch $x = -1$ und $x = +1$ erfüllt wird, im Intervall $(-1, +1)$ mindestens n reelle Wurzeln haben muss.

Nun ist aber $f^{(n)}(x)$ eine algebraische Function n^{ten} Grades.

Folglich hat die Kugelfunction $P^{(n)}(x)$ nur reelle Wurzeln; dieselben liegen sämmtlich zwischen (-1) und $(+1)$.

§ 117.

Maxima und Minima bei mehreren unabhängigen Variabeln.

Von einer Function $f(x, y, \ldots)$ mehrerer Variabeln $x, y, \ldots$ sagt man, dass sie an der Stelle $(x, y, \ldots)$ ein Maximum oder Minimum sei, wenn die Function

$$f(x + \xi \cdot t,\ y + \eta \cdot t, \ldots)$$

bei **jeder beliebigen** Annahme von $\xi, \eta, \ldots$ ein Maximum oder Minimum für $t = 0$ ist.

Diese Form der Definition ist identisch mit derjenigen, dass $f(x, y, \ldots)$ nur dann ein Maximum genannt werden soll, wenn der Functionswerth abnimmt, wie man auch die Variabeln $x, y, \ldots$ einzeln oder zugleich ändern mag; — analog beim Minimum. Wir haben sie vorgezogen, weil in ihr schon eine Andeutung für die Aufsuchungsmethode der Maxima und Minima liegt. Denn sie zeigt, dass nur ein unerheblicher Unterschied mit den Functionen von einer einzigen Variabeln besteht; weshalb es in Absicht auf die allgemeinen Theoreme genügt, auf die vorigen §§ zu verweisen.

Wir wollen nur noch einen besonders wichtigen Fall herausheben, welcher zugleich als Paradigma für die Behandlung ähnlicher Probleme gelten kann.

Es sei die Function $z = f(x, y)$ gegeben. Wir setzen

$$F(t) = f(x + \xi \cdot t, y + \eta \cdot t),$$

wo ξ und η Constanten bedeuten, welche nach Belieben ausgewählt werden dürfen. Dann ergiebt sich durch Differentiation nach t:

$$F'(t) = \frac{\partial f(x+\xi\cdot t, y+\eta\cdot t)}{\partial(x+\xi\cdot t)}\cdot\xi + \frac{\partial f(x+\xi\cdot t, y+\eta\cdot t)}{\partial(y+\eta\cdot t)}\cdot\eta,$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f(x+\xi\cdot t, y+\eta\cdot t)}{\partial(x+\xi\cdot t)^2}\cdot\xi^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f(x+\xi\cdot t, y+\eta\cdot t)}{\partial(x+\xi\cdot t)\cdot\partial(y+\eta\cdot t)}\cdot\xi\eta$$

$$+\frac{\partial^2 f(x+\xi\cdot t, y+\eta\cdot t)}{\partial(y+\eta\cdot t)^2}\cdot\eta^2.$$

Die Stetigkeit der partiellen Derivirten vorausgesetzt, können deshalb Maxima und Minima von z nur dort vorkommen, wo

$$F'(0) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\xi + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\eta$$

für jedes beliebige ξ und η verschwindet. Und dies Letztere ist nur dann möglich, wenn gleichzeitig

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

wird.

Ferner muss das Vorzeichen von

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\cdot\xi^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}\cdot\xi\eta + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\cdot\eta^2$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\xi^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}\cdot\xi\eta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\eta^2$$

festgestellt werden. Dies kann u. a. dadurch geschehn, dass man das Vorzeichen von

$$F''(0)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$= \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\xi + \frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}\cdot\eta\right\}^2 + \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}\right)^2\right\}\cdot\eta^2$$

oder von

$$F''(0)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$=\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}\cdot\xi+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\eta\right\}^2+\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}\right)^2\right\}\cdot\xi^2$$

ermittelt.

Ist

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}\right)^2>0,$$

so geht demnach hervor:

$$F''(0)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0,\quad F''(0)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}>0,$$

welche Werthe die willkürlichen Incremente ξ und η auch annehmen mögen, und es erhalten die drei Grössen

$$F''(0),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

gleiche Vorzeichen. Dies bleibt auch für

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}\right)^2=0$$

noch richtig, nur dass, wenn ξ und η geändert werden, $F''(0)$ bei einem gewissen Verhältniss von ξ zu η ohne Änderung des Vorzeichens durch Null hindurchgeht; was die Maximal- oder Minimaleigenschaft von z nicht beeinträchtigt (§ 115).

Fällt aber

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}\right)^2<0$$

aus, so zeigen die obigen Ausdrücke für

$$F''(0)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ \text{und}\ F''(0)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

auf eine eben so einfache Weise, dass $F''(0)$ bei der Änderung des Verhältnisses $(\xi:\eta)$ verschiedene Vorzeichen annehmen kann. weil es dann auf die absoluten Werthe der beiden Summanden ankommt, aus welchen jene Ausdrücke, zusammengesetzt sind. — Mithin hat man in diesem Falle kein Maximum oder Minimum von z.

Sollte sich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

ergeben, so steht die Entscheidung noch aus.

Das Resultat der Untersuchung lässt sich so zusammenfassen:

Lehrsatz.

Ist $z = f(x, y)$ eine Function zweier unabhängigen Variabeln, und findet sich ein Werthepaar (x, y), bei welchem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2 \geqq 0$$

hervorgeht, so besitzt z für dasselbe einen Maximal- oder einen Minimalwerth, je nachdem die partiellen Derivirten

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

negativ oder positiv sind. — Hierbei darf auch eine von ihnen nebst $\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}$ verschwinden.

Differiren die Vorzeichen der beiden Derivirten

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

so findet weder ein Maximum, noch ein Minimum von z statt.

Ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

oder treten an den entscheidenden Stellen Unstetigkeiten auf, so muss man andere Kriterien aufsuchen.

Beispiele für die Anwendung dieses Lehrsatzes.

I.

Soll eine Zahl c so in drei Theile getheilt werden, dass das Product aus der m^{ten}, n^{ten} und r^{ten} Potenz des ersten, zweiten und dritten Theils möglichst gross ausfalle, so handelt es sich um die Auffindung der Maxima von

$$z = f(x, y) = x^m \cdot y^n \cdot (c - x - y)^r$$

mit Ausschluss derjenigen Fälle, in welchen ein Theil $= 0$ wird.

Es ergiebt sich zunächst:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^{m-1} \cdot y^n \cdot (c - x - y)^{r-1} \cdot \{mc - (m+r)x - my\},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^m \cdot y^{n-1} \cdot (c - x - y)^{r-1} \cdot \{nc - nx - (n+r)y\}.$$

Diese Derivirten müssen verschwinden, ohne dass x oder y oder $c - x - y$ verschwindet. Es muss demnach

$$(m+r)x + my = mc,$$

$$nx + (n+r)y = nc,$$

mithin

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{c - x - y}{r} = \frac{c}{m+n+r}$$

sein; d. h.: die Theile von c müssen sich verhalten, wie ihre Exponenten.

Zum Zweck des analytischen Entscheides darüber, ob ein Maximum oder Minimum bei dieser Relation stattfindet, entwickeln wir die zweiten Derivirten und erhalten bei den fraglichen Specialwerthen:

$$\frac{\partial^2 z}{d x^2} = -\frac{m^{m-1} n^n r^{r-1} (m+r) c^{m+n+r-2}}{(m+n+r)^{m+n+r-2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{m^m n^{n-1} r^{r-1} (n+r) c^{m+n+r-2}}{(m+n+r)^{m+n+r-2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = -\frac{m^m n^n r^{r-1} c^{m+n+r-2}}{(m+n+r)^{m+n+r-2}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2 = + \frac{m^{2m-1} n^{2n-1} r^{2r-1} c^{2(m+n+r-2)}}{(m+n+r)^{2m+2n+2r-5}}.$$

Sind also die Exponenten m, n, r positiv, so findet in der That ein Maximum statt, weil die letztberechnete Grösse positiv, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ aber negativ ist.

Sind die Exponenten m, n, r negativ, so ergiebt sich unter den gleichen Bedingungen natürlich ein Minimum.

II.

Soll die Summe

$$z = (a_1 x + b_1 y - c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y - c_2)^2 + \cdots + (a_n x + b_n y - c_n)^2,$$

in welcher die a, b und c gegebene Constanten sind, möglichst klein werden, so muss — indem zur Abkürzung der Formeln die Bezeichnung

$$S_{uv} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \cdots + u_n v_n$$

eingeführt wird —

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot \left\{ S_{aa} \cdot x + S_{ab} \cdot y - S_{ac} \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 \cdot \left\{ S_{ab} \cdot x + S_{bb} \cdot y - S_{bc} \right\} = 0,$$

d. i.:

$$x = \frac{S_{ac} \cdot S_{bb} - S_{ab} \cdot S_{bc}}{S_{aa} \cdot S_{bb} - (S_{ab})^2}$$

$$y = \frac{S_{aa} \cdot S_{bc} - S_{ab} \cdot S_{ac}}{S_{aa} \cdot S_{bb} - (S_{ab})^2}$$

gemacht werden.

Und diese Werthe von x und y ergeben in der That ein Minimum von z, weil

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \cdot S_{aa} > 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot S_{bb} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2 = 4 \left\{S_{aa} \cdot S_{bb} - (S_{ab})^2\right\}$$
$$= 4 \cdot \Sigma (a_r b_s - a_s b_r)^2 > 0$$

ist.

§ 118.

Maxima und Minima bei mehreren Argumenten, zwischen denen Bedingungsgleichungen existiren.

Existiren zwischen den n Argumenten x, y, z, ... einer Function $f(x, y, z, \ldots)$ Bedingungsgleichungen $\varphi(x, y, z, \ldots) = 0$, $\psi(x, y, z, \ldots) = 0$, ... in der Anzahl r, so ist $f(x, y, z, \ldots)$ eine Function von nur $(n - r)$ unabhängigen Variabeln, da man aus den r Bedingungsgleichungen r Argumente als Functionen der übrigen $(n - r)$ ausdrücken und hierauf in $f(x, y, z, \ldots)$ einsetzen kann.

Der praktischen Ausführung dieser Operationen stellen sich aber zuweilen unüberwindliche Hindernisse entgegen, häufig sind die dazu nöthigen Rechnungen wenigstens unbequem, während man vermittelst ausgedehnter Anwendung der Differentiation durch Mittelfunctionen schneller zum Ziele gelangt.

Wir wollen nur die einfachsten Fälle behandeln, zumal da sie auch die wichtigsten sind und eine an sich klare Induction auf den allgemeinen Fall ergeben.

I.

Sollen die Maxima und Minima von $f(x, y)$ gefunden werden, während x und y durch die Gleichung $\varphi(x,y)=0$ verbunden sind, so ergiebt die letztere für alle Werthe von x und y:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot y' = 0, \tag{1}$$

wo x' und y' die Derivirten von x und y nach irgend einer neuen Variabeln t bedeuten, von welcher sie in einer mit der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ verträglichen Weise abhängen.

Wir beschränken uns bei unserer weiteren Untersuchung auf die am häufigsten vorkommenden Functionen $f(x, y)$, deren erste Derivirten stetig variiren. Bei diesen muss an den Maximal- und Minimalstellen

$$\frac{d f(x,y)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y' = 0, \tag{2}$$

mithin, weil die Gleichungen (1) und (2) gleichzeitig gelten,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

sein.

Aus (3) und $\varphi(x, y) = 0$ lassen sich aber die simultanen Werthe von x und y bestimmen.[1])

Ob dieselben wirklich ein Maximum oder Minimum von $f(x, y)$ ergeben, kann man meistens bequemer auf andere Weise als durch die Ermittelung des Vorzeichens von

---

[1]) Wären die Variabeln x und y von einander unabhängig, wie es im vorigen § angenommen wurde, so hätte man sie zunächst durch eine willkürlich gewählte Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ mit einander verbinden können — was dem Wesen nach auch dort geschehen ist — und müsste, weil dann $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ völlig willkürliche Zahlen sind, aus (3) schliessen, dass $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ zu machen sei, aus welchen beiden Gleichungen dann x und y berechnet werden können.

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot x'^2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot x'y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot y'^2+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x''+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y''$$

beurtheilen. Denn, um diesen Ausdruck verwenden zu können, muss man zunächst x'' vermittelst der aus (1) folgenden Gleichung

$$0=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot x'^2+2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot x'y'+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot y'^2+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot x''+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot y''$$

eliminiren, wobei wegen der Gleichung (3) auch y'' fortfällt; so dass die Relation erhalten wird:

$$\frac{d^2f}{dt^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right\}\cdot x'^2+2\cdot\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right\}\cdot x'y'$$
$$+\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right\}\cdot y'^2$$

— eine Relation, in welcher man x mit y vertauschen darf; und endlich ist noch mit Hülfe von (1) und (2) die eine von den Grössen x', y' zu eliminiren. In der Regel verlohnt sich dies der Mühe nicht.

II.

Sollen die Maxima und Minima einer Function $f(x, y, z)$ ermittelt werden, deren Argumente x, y, z zwei Gleichungen $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ genügen, so erhält man zur Bestimmung der drei Unbekannten x, y, z die dritte Gleichung durch Elimination von x', y', z' aus den Relationen

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x'+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot z'=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot x'+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot z'=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot x'+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot z'=0,$$

Die dritte Gleichung ist daher:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

III.

Sollen die Maxima und Minima einer Function $f(x, y, z)$ ermittelt werden, deren Argumente x, y, z nur durch eine Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ mit einander verbunden sind, so kann man zunächst eine zweite willkürliche Gleichung $\psi(x, y, z) = 0$ zwischen ihnen stipuliren und die Aufgabe dadurch auf den Fall II zurückführen, muss dann aber bei der Endgleichung (4) im Auge behalten, dass die partiellen Derivirten $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ völlig willkürliche Zahlen sind.

Dies erfordert, dass die Coefficienten dieser Derivirten in der Entwickelung der Determinante verschwinden, dass also zur Bestimmung von x, y, z ausser der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ noch die beiden Gleichungen vorliegen:

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

oder:

$$(6)\qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}.$$

Mithin stimmt auch in diesem Falle die Anzahl der Gleichungen mit derjenigen der Unbekannten x, y, z überein.

§ 119.

Bestimmung der Maxima und Minima von impliciten Functionen.

Ist diejenige Function, deren Maxima und Minima gefunden werden sollen, nicht in entwickelter Form gegeben, sondern durch eine mehr oder weniger verwickelte Gleichung $\varphi(x, y, \ldots) = 0$ mit ihren Argumenten verbunden, so braucht man diese Gleichung nicht erst aufzulösen, um dann die obigen Sätze anzuwenden, sondern kann die Derivirten, deren man benöthigt ist, mit Hülfe des Satzes über die partielle Differentiation (§ 9) ableiten, wie es in § 32 gelehrt wurde.

Wesentlich neue Gesichtspunkte treten hierbei nicht hervor. Wohl aber kann man sich einige Erleichterungen in der Rechnung beschaffen, wenn der Vorzeichenwechsel der Derivirten stetig durch Null hindurch vor sich geht.

Wir wollen dies an den beiden Fällen zeigen, welche das grössere Interesse in der Praxis beanspruchen.

I.

Fragt man nach den Maximis und Minimis von y in der Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0,$$

so treten dieselben ein bei den Zeichenwechseln von $\frac{dy}{dx}$ in der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Ist an einer solchen Stelle $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ endlich, so findet man dieselbe demnach durch die Berechnung von x und y aus den beiden Gleichungen

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = 0;$$

und es lässt sich das Vorzeichen von $\frac{d^2 y}{dx^2}$ bestimmen aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

welche bei endlichen Werthen von $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ an der Stelle des Maximums oder Minimums wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ in

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} : \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

übergeht.

Sind also die Variabeln x und y durch die Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0$$

mit einander verbunden, so zeigen die simultanen Wurzeln der Gleichungen

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = 0$$

ein Maximum oder Minimum von y an, je nachdem

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} > 0 \text{ oder } < 0$$

ist, vorausgesetzt, dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

endliche Werthe haben, von denen der erstere auch nicht verschwindet.[1])

[1]) Es soll nicht empfohlen werden, dies als einen Lehrsatz zu merken, sondern nur, nach denjenigen Gesichtspunkten zu verfahren, aus welchen der obige Schluss gezogen ist.

Beispielsweise sei die Gleichung

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

gegeben. Aus ihr folgt durch Differentiation:

$$(x^2 - ay) + (y^2 - ax)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$2x - 2a\frac{dy}{dx} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y^2 - 2ax)\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

und es handelt sich darum, die Stellen der Zeichenwechsel von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$$

aufzusuchen.

Der Zähler von $\frac{dy}{dx}$ verschwindet für $ay = x^2$, d. i. nach der vorgelegten Gleichung für

$$x^3 - 3x^3 + \frac{x^6}{a^3} = 0, \quad x^3(x^3 - 2a^3) = 0,$$

d. i. für

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = a\sqrt[3]{2}.$$

Macht man zunächst $x = a\sqrt[3]{2}$, so ergiebt sich zur Berechnung von y die Gleichung

$$y^3 - 3a^2\sqrt[3]{2}\cdot y + 2a^3 = 0,$$

welche drei reelle Wurzeln besitzt, für welche der Nenner von $\frac{dy}{dx}$ nicht verschwindet.[1]) Da demnach für $x = a\sqrt[3]{2}$ hervorgeht:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x}{ax - y^2},$$

---

[1]) Dass die Gleichung drei reelle Wurzeln besitzt, folgt aus dem negativen Vorzeichen ihrer Discriminante $a^6 - 2a^6$; und sollte $ax - y^2$ verschwinden, so müsste die fragliche Gleichung durch $y^2 = ax = a^2\sqrt[3]{2}$, $y = \pm a\sqrt[6]{2}$ erfüllt werden, was nicht der Fall ist.

so ist an dieser Stelle y ein Maximum oder Minimum, je nachdem die Grösse $\left(a - \frac{y^2}{x}\right)$ einen negativen oder einen positiven Werth erlangt.

Ausserdem liegen Maxima und Minima von y an der Stelle $y = a\sqrt[3]{2}$, weil an derselben der Nenner von $\frac{dy}{dx}$ sein Vorzeichen ändert, während der Zähler sein Vorzeichen bewahrt — ein Schluss, der sich unmittelbar aus der Symmetrie der Gleichung zwischen x und y rechtfertigt.

An der Stelle $x = 0$ wird auch $y = 0$, weil nur Potenzen von x mit positiven Exponenten in die cubische Gleichung für y eingehn und die algebraischen Gleichungen mit endlichen Coefficienten nur endliche Wurzeln haben. Daher wird der Substitutionswerth von $\frac{dy}{dx}$ unbestimmt. Fragt man aber nach den etwaigen Grenzwerthen an dieser Stelle, so kann man dieselben ermitteln, indem man die verschwindenden Zähler und Nenner des Ausdrucks von $\frac{dy}{dx}$ einzeln differentiirt (§ 83). Dadurch findet man

$$y' = \frac{2x - ay'}{a - 2yy'}, \quad yy'^2 - ay' + x = 0,$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - xy}}{y} = \frac{x}{\frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - xy}};$$

wo nun noch x und y der Null genähert werden müssen. Mithin folgt $y' = \infty$ und auch $= 0$, das Erstere beim oberen, das Zweite beim unteren Vorzeichen der Quadratwurzel. Auch findet in beiden Fällen offenbar der für Maxima und Minima erforderliche Zeichenwechsel statt. Jedoch ist es misslich, hier von Maximis und Minimis zu reden, weil aus dem Obigen hervorgeht, dass y eine an der Stelle $x = 0$ mehrdeutige Function darstellt, d. i. eine Function, welche sich von dieser Stelle aus auf mehrfache Weise stetig fortsetzt.

II.

Ist z als Function zweier unabhängigen Variabeln mit diesen durch eine Gleichung

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

verbunden, so folgt durch Differentiation:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Richten wir unser Augenmerk nur auf diejenigen Fälle, in denen die Grössen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}$$

endliche Werthe behalten, und in denen die erstere von ihnen auch nicht verschwindet, so finden wir nach § 117 ein Maximum oder Minimum, wo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2 \geqq 0$$

ist und die Grössen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

positive oder negative Werthe haben.

Beispielsweise folgt aus

$$\varphi(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - xz^2 + 6 = 0$$

durch Differentiation:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 4x + 4y - z^2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4x + 6y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -2xz,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 4.$$

Es ist

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

für $x = +3$, $y = -2$, $z = \pm 2$; und:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right) = +8 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} : \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mp \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} : \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mp \frac{1}{2}.$$

Mithin besitzt z für $x = +3$ und $y = -2$ einen **Maximalwerth** $z = -2$ und einen Minimalwerth $z = +2$.[1])

---

[1]) **Die Fläche, durch welche der Verlauf der Function z veranschaulicht werden kann, liegt symmetrisch gegen die (xy)-Ebene, schneidet dieselbe aber nicht, sondern nähert sich ihr nur bis zur Entfernung abs · $z = 2$ — Sie liegt ausserdem ganz auf der positiven Seite der (yz)-Ebene, hat dieselbe zur doppelten Asymptotenfläche und wird von der parallelen Ebene, deren $x = +3$ ist, in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten.**

Anhang

über die

wichtigsten geometrischen Anwendungen.

Capitel XVIII.

Anwendungen in der Planimetrie.

§ 120.

Die Berührung einer Curve mit einer Graden bei schief- und rechtwinkligen Coordinaten.

Der Begriff der Tangente einer Curve ist bereits in § 4 erörtert. Dort handelte es sich um die geometrische Veranschaulichung der Derivirten einer Function $y = f(x)$, und es wurde erkannt, dass die Existenz der Derivirten $\frac{dy}{dx}$ die Existenz der Tangente an eine Curve zur Folge habe, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, im Punkte (x, y). Wächst der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bei der unendlichen Verkleinerung von Δx unendlich — was man bekanntlich durch die symbolische Gleichung $\frac{dy}{dx} = \infty$ anzeigt — so bedingt dies ebenfalls eine Tangente, und zwar eine solche, welche parallel zur Axe der y liegt; denn dann erhält man durch die Vertauschung der Variabeln $\frac{dx}{dy} = 0$, was ein völlig bestimmter Werth ist.

Auch haben wir bereits in § 4 dargethan, dass man den Schluss von der Derivirten auf die Tangente umkehren darf.

Wir recapituliren die Resultate durch den

Lehrsatz I.

Die Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, besitzt im Punkte (x, y) genau so viele Tangenten, wie viele bestimmte

Werthe die Derivirte $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ besitzt, falls man hierbei auch $\frac{dy}{dx} = \infty$ als einen bestimmten Werth ansieht. Und es bedeutet $\frac{dy}{dx}$ das Verhältniss der Zuwachse von Ordinate und Abscisse eines auf der Tangente gleitenden Punktes.

Um sogleich einige Curven anzuführen, welche in einzelnen Punkten mehr als eine Tangente besitzen, so ist diejenige, welche durch die Gleichung $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ bestimmt wird, eine solche; denn bei ihr hat $\frac{dy}{dx}$ nach § 119 im Punkte (0, 0) zwei Werthe, nämlich: 0 und ∞; — die Curve verzweigt sich in diesem Punkte. Diejenige Curve, deren Gleichung $y = \int \frac{dx}{3 + 10^{\frac{1}{1-x}}}$ ist, hat in demjenigen Punkte, dessen Abscisse $x = 1$ ist, zwei Tangenten, weil dort die Derivirte $\frac{dy}{dx}$ sowohl $= 0$ als auch $= +\frac{1}{3}$ wird (§ 1); — die Curve ist an dieser Stelle geknickt. Dass sie einen stetigen Verlauf hat, folgt aus § 19.

Um endlich auch eine Curve vorzuführen, welche einen Punkt ohne Tangente besitzt, machen wir darauf aufmerksam, dass die überall stetig verlaufende Curve

$$y = \int \sin\frac{1}{x}\,dx$$

an der Stelle $x = 0$ diese Eigenthümlichkeit zeigt. Dass sie sich nämlich mit der Ordinatenaxe in einem völlig bestimmten Punkte schneidet und durch diesen continuirlich hindurch geht, folgt aus § 49, (6); denn es ist für jedes positive p:

$$\lim_{x=0} \cdot x^{1+p} \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Hinsichtlich andrer Punkte kann überhaupt kein Zweifel über den stetigen Verlauf aufsteigen; denn die Derivirte $\frac{dy}{dx} = \sin\frac{1}{x}$ ist

überall eindeutig bestimmt, ausser an der Stelle $x = 0$, wo sie gar keinen Werth — weder einen Substitutions- noch einen Grenzwerth — besitzt und auch nicht unendlich wird. Daher gilt das, was wir oben über die Tangente behauptet haben.

Im Folgenden werden wir, wo wir es nicht ausdrücklich verneinen, überall die Existenz der Tangente voraussetzen.

Die geometrische Veranschaulichung der Kreisfunctionen, welche wir in § 63 besprochen haben — jene Veranschaulichung, welche sich die formale Identität des Pythagoreischen Satzes mit dem Moivreschen Satze über den Zusammenhang des Moduls einer complexen Zahl mit deren reellen Bestandtheilen zu Nutzen macht und die Verwendung der Kreisfunctionen in der Trigonometrie zur Folge hat — bietet die Handhabe, um durch den Werth von $\frac{dy}{dx}$ die Winkel zu messen, welche die Tangente der Curve mit den Coordinatenaxen bildet. Dabei ist daran zu erinnern, dass man unter dem Maass eines Winkels oder schlechthin unter einem Winkel die Maasszahl desjenigen durch den Radius gemessenen Bogens versteht, auf welchem der Winkel als Centriwinkel steht.

Definitionen.

I. Eine solche Bewegung um einen Punkt herum, wie man um den Nullpunkt des Coordinatensystems auf dem kürzesten Wege von der Abscissenaxe zur Ordinatenaxe gelangt, heisst **rechtläufig**, die entgegengesetzte **rückläufig**.

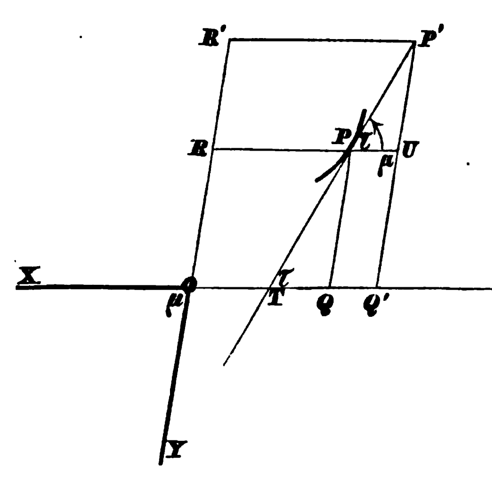
II. Ein **Winkel** wird als **positiv** oder **negativ** angesehn, je nachdem er in rechtläufiger oder in rückläufiger Richtung durch das Winkelfeld hindurch gemessen ist.

III. Unter dem **Richtungswinkel der Tangente** einer Curve versteht man irgend einen von denjenigen Winkeln, welche beim Berührungspunkt von der einen Tangentenrichtung mit dem zur Verlängerung der Abscissenaxe gleichgerichteten Strahl gebildet und von diesem aus gemessen wird.

Lehrsatz II.

Bedeutet τ den Richtungswinkel der Tangente der Curve $y = f(x)$ im Punkte (x, y) und μ den Coordinatenwinkel, so ist

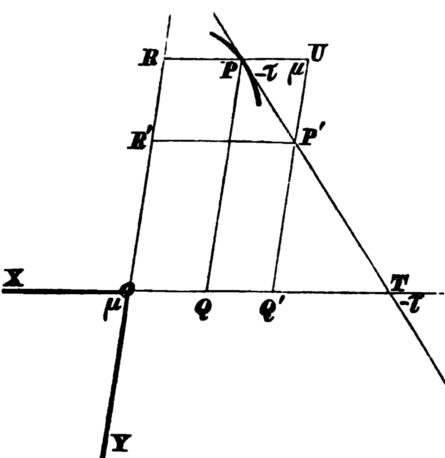
$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\sin\tau}{\sin(\mu - \tau)} = \dfrac{dy}{dx} = f'(x), \\ \cot\tau = \cot\mu + \dfrac{1}{\sin\mu} \cdot \dfrac{dx}{dy} = \cot\mu + \dfrac{1}{\sin\mu \cdot f'(x)}; \end{cases}$$



und **im Besondern**, wenn der Coordinatenwinkel μ einen **rechten** beträgt:

$$(2) \quad \operatorname{tng}\tau = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

— Der Beweis erfordert nichts als die Anwendung des sogenannten Sinussatzes auf das Dreieck PUP', wobei man zu beachten hat, dass in der zweiten Figur der positive Winkel $UPP' = -\tau$ und der positive Quotient $\dfrac{UP'}{PU} = -\dfrac{dy}{dx}$ ist.



Anmerkung.

In der Regel findet man τ definirt als denjenigen spitzen oder stumpfen Winkel, welcher auf der positiven Seite der Abscissenaxe

von der Tangente und der Verlängerungsrichtung der Abscissenaxe in T gebildet wird. Dies hat aber sein Missliches darin, dass dann der Winkel τ dort eine discontinuirliche Function von x mit einem Sprunge von der Grösse π wird, wo $f'(x)$ stetig durch Null hindurch das Vorzeichen ändert. Bei unserer Definition von τ dagegen ändert sich τ an einer solchen Stelle stetig.

Dies erscheint uns als eine hinreichend gewichtiges Moment, um von dem bisherigen Gebrauch abzuweichen, zumal da die Behandlung der Krümmung und der Berührung der Curven dadurch erleichtert wird.

Was die Benutzung von Coordinatensystemen mit verschieden grossen Coordinatenwinkeln bei derselben Curve betrifft, so rührt die grössere Eleganz der obigen Formeln für ein rechtwinkliges System daher, dass die Verwendung der Kreisfunctionen in der Geometrie eben auf einer Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks beruht.

§ 121.

Ermittelung derjenigen Curven, deren Tangenten ihre Richtungswinkel einem gegebenen Gesetze gemäss ändern.

Aus den Gleichungen (1). und (2) des vorigen § folgt durch Integration unmittelbar, was sich so aussprechen lässt:

Lehrsatz I.

Ist der Richtungswinkel τ der Tangente einer Curve als eine eindeutige Function der Abscisse[1]) x gegeben und μ der Coordinatenwinkel, so geht durch jeden beliebig gewählten Punkt (a, b) der Ebene eine einzige Curve

[1]) Selbstverständlich darf τ anstatt dessen auch als Function von y gegeben sein. Dies bewirkt in den Gleichungen nur die Vertauschung von x mit y, a mit b, τ mit $(\mu - \tau)$.

(1) $$y - b = \int_a^x \frac{\sin \tau}{\sin(\mu - \tau)} dx,$$

deren Tangenten dem gegebenen Gesetze folgen. Wo die Function τ von x mehrdeutig wird, verzweigt sich die Curve.

Bei einem **rechtwinkligen** Coordinatensystem stellt sich die Gleichung (1) in der einfacheren Gestalt

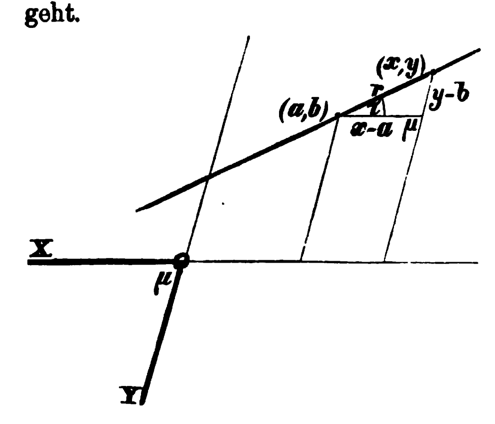
(2) $$y - b = \int_a^x \operatorname{tng} \tau \, dx$$

dar.

Beispiel I.

Die Gleichung der graden Linie

kann man daraus ableiten, dass ihre — mit ihr zusammenfallende — Tangente einen constanten Richtungswinkel τ besitzt, weshalb die rechte Seite der Gl. (1) in $\frac{\sin \tau}{\sin(\mu - \tau)} \cdot (x - a)$ übergeht.



Die nebenstehende Figur erläutert die Bedeutung der Symbole bei einer Lage des beweglichen Punktes (x, y) gegen den festen Punkt (a, b). Die absolute Entfernung beider Punkte ist mit r bezeichnet. Dann folgt nach dem Sinussatz, weil (y — b) und sin τ gleiche Vorzeichen haben:

$$\frac{x - a}{\sin(\mu - \tau)} = \frac{y - b}{\sin \tau} = \frac{r}{\sin \mu}.$$

Wegen der hervorragenden Wichtigkeit des Resultats formuliren wir es als

Lehrsatz II.

Die Gleichung derjenigen Graden, welche durch den Punkt (a, b) hindurchgeht und gegen die Abscissenaxe den Richtungswinkel τ besitzt, lässt sich in den Formen

$$(3) \qquad y - b = \frac{\sin \tau}{\sin (\mu - \tau)} \cdot (x - a),$$

$$(4) \qquad x - a = \frac{\sin (\mu - \tau)}{\sin \tau} \cdot (y - b),$$

$$(5) \qquad (x - a) \sin \tau = (y - b) \sin (\mu - \tau),$$

$$(6) \qquad \frac{x - a}{\sin (\mu - \tau)} = \frac{y - b}{\sin \tau} = \frac{r}{\sin \mu}$$

darstellen. r bedeutet die Länge der vom Punkte (a, b) zum Punkte (x, y) führenden Strecke. Im Besondern zeigt $y - b = 0$ eine Grade an, welche mit der Abscissenaxe parallel ist, $x - a = 0$ aber eine solche, welche parallel zur Ordinatenaxe liegt.[1])

Ist das Coordinatensystem rechtwinklig, ist also $\mu = \frac{\pi}{2}$, so kann man die Gl. (6) in der Form

$$(7) \qquad \frac{x - a}{\cos \tau} = \frac{y - b}{\sin \tau} = r$$

schreiben.

Zusatz.

Die Gleichung einer Graden ist für die „**laufenden** Coordinaten“[2]) x und y stets vom **ersten** Grade; und umgekehrt zeigt jede Gleichung ersten Grades zwischen den Coordinaten x und y eine grade Linie an.[3])

---

[1]) Alle Punkte einer Graden, welche einer Coordinatenaxe parallel ist, haben die eine Coordinate constant, während die andere sich mit der Lage des Punktes ändert. Deshalb fällt die veränderliche Coordinate — als unabhängig von der andern — aus der Gleichung aus.

[2]) d. i.: Coordinaten des verschiebbaren oder „laufenden“ Punktes.

[3]) Man nennt daher die Gleichungen ersten Grades auch „lineare“ Gleichungen, selbst wenn mehr als zwei Unbekannte vorhanden sind.

— Dass die zuletzt ausgesprochene Behauptung zutrifft, folgt aus der Möglichkeit, drei Grössen a, b, τ so zu bestimmen, dass die beliebig gegebene Gleichung

$$mx + ny = q$$

mit der Gleichung (5) identisch wird. Eine leichte Rechnung zeigt nämlich, dass zu diesem Zwecke τ reell aus den Ausdrücken

$$\sin\tau = \pm \frac{m \sin\mu}{\sqrt{m^2 - 2mn\cos\mu + n^2}},$$

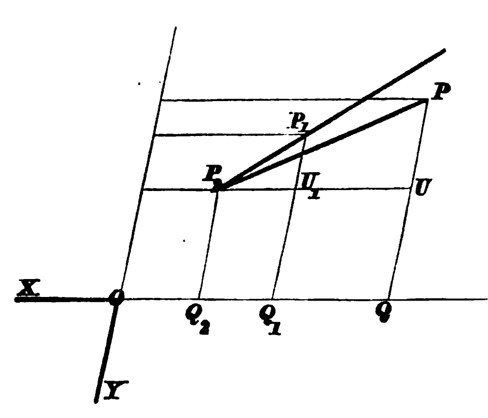
$$\sin(\mu - \tau) = \mp \frac{n \sin\mu}{\sqrt{m^2 - 2mn\cos\mu + n^2}}$$

bestimmt werden muss, was immer angeht, und dass die Zahlen a und b der Gleichung

$$ma + nb = q$$

zu genügen haben, was sogar die willkürliche Wahl der einen von ihnen gestattet, selbst wenn eine von den Zahlen m und n = 0 sein sollte.

Ein anderer Beweis hierfür ist der folgende.



Berechnet man für x und y drei Werthepaare, welche der vorgelegten Gleichung ersten Grades genügen:

$$mx + ny = q$$

$$mx_1 + ny_1 = q$$

$$mx_2 + ny_2 = q$$

und construirt diejenigen drei Punkte P, P_1, P_2, welche die zusammengehörigen Werthepaare von x und y zu Coordinaten haben, so folgt, dass der Punkt P stets in der Graden $P_1 P_2$ liegt; denn die drei Gleichungen ergeben zunächst

$$m(x-x_2)+n(y-y_2)=0,$$
$$m(x_1-x_2)+n(y_1-y_2)=0,$$

woraus

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}, \quad \frac{P_2U}{P_2U_1}=\frac{PU}{P_1U_1},$$

d. i.:

$$\triangle P_2UP \sim \triangle P_2U_1P_1, \quad \angle UP_2P=\angle U_1P_2P_1$$

erhalten wird. — Die Bedeutung der Punkte U und U_1 erhellt aus der Figur. Es müssten aber, genau genommen, noch alle denkbar verschiedenen Lagen der zu zeichnenden Punkte einzeln durchgegangen werden, um des Schlusses völlig sicher zu sein.

Bei dem häufigen Gebrauch, welchen man von der Gleichung der Graden zu machen hat, empfiehlt es sich — trotz der etwas weiten Abschweifung von unserm eigentlichen Thema — dieselbe noch etwas eingehender zu besprechen.

Aus dem Obigen ist es klar geworden, dass die Gestalt und Lage einer jeden Curve vollständig durch die Form und die Coefficienten ihrer Gleichung bestimmt wird, und dass die in ihr enthaltenen Variabeln (x und y) einzig und allein nur dazu dienen, einzelne Punkte der fraglichen Linie herauszuheben.

Daher muss sich aus der Beschaffenheit der Coefficienten der linearen Gleichung die Lage der von ihr angezeigten Graden herauslesen lassen, bei welchem Geschäft die Variabeln x und y gewissermassen nur als Trennungszeichen wichtig sind.

Zusatz.

Die Gleichung einer Graden, welche durch die beiden gegebenen Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) hindurchgeht, lautet:

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}$$

oder:

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

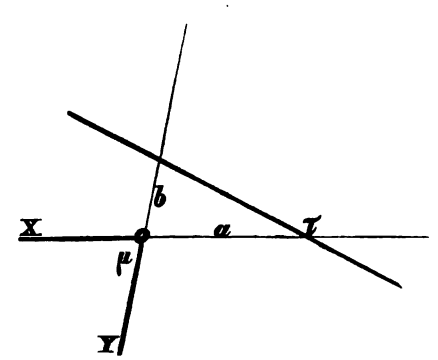
Häufige Anwendung finden die folgenden Sätze.

Lehrsatz III.

Stellt sich die Gleichung einer Graden in der Gestalt

(8) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

dar, so ist a die Abscisse ihres Schnittpunktes mit der Abscissenaxe, b die Ordinate ihres Schnittpunktes mit der Ordinatenaxe.



Denn für den erstgedachten Punkt ist $y = 0$, also $\frac{x}{a} = 1$, $x = a$; und für den zweitgedachten Punkt ist $x = 0$, also $\frac{y}{b} = 1$, $y = b$.

Lehrsatz IV.

Stellt sich die Gleichung der Graden in der Gestalt

(9) $$y = ax + b$$

dar, so bedeutet b die Ordinate ihres Schnittpunktes mit der Ordinatenaxe, während bei einem schiefen Coordinatenwinkel

(10) $$a = \frac{\sin \tau}{\sin(\mu - \tau)},$$

und bei einem rechten Coordinatenwinkel

(11) $$a = \operatorname{tng} \tau$$

ist.

— Das Erstere ergiebt sich sofort, wenn man $x = 0$ einsetzt, das Zweite am bequemsten durch die Vergleichung mit der Formel (3).

Lehrsatz V.

In Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem kann man die Gleichung einer jeden Graden in der Form

$$(12) \qquad x \cos\psi + y \sin\psi - p = 0$$

darstellen, wobei p die absolute Länge derjenigen Senkrechten bedeutet, welche man vom Nullpunkt auf die Grade gefällt hat, und ψ den Richtungswinkel dieser Senkrechten gegen die Abscissenaxe.

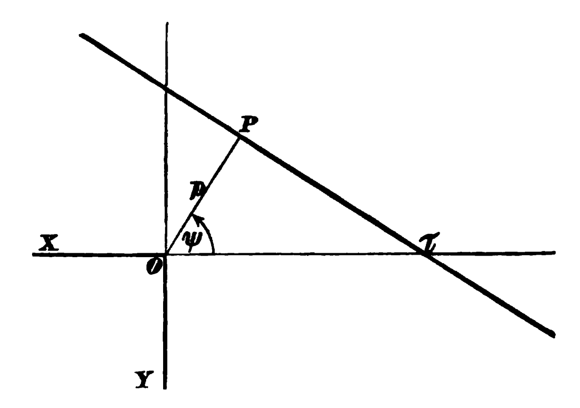
Beweis. Dass jede lineare Gleichung

$$mx + ny = q$$

auf die Form

$$x \cos\psi + y \sin\psi - p = 0$$

gebracht werden kann, ist selbstverständlich; denn man braucht



sie zu diesem Zweck nur mit demjenigen Werthe von $\sqrt{m^2 + n^2}$ zu dividiren, welcher dasselbe Vorzeichen mit q besitzt, und dann p und ψ den Relationen

$$p = \frac{q}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \cos\psi = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \sin\psi = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

gemäss zu bestimmen.

Dies gilt sowohl für schiefwinklige Coordinaten als für rechtwinklige.

Es handelt sich also nur noch darum, nachzuweisen, dass p und ψ bei einem rechtwinkligen Coordinatensystem die Bedeutung haben, welche wir in Anspruch nehmen.

Vergleicht man aber unsere Gleichung (12) mit der Gleichung (5), d. i. mit:

$$x \sin\tau - y \sin(\mu - \tau) - \left[a \sin\tau - b \sin(\mu - \tau)\right] = 0,$$

und erwägt, dass beide Gleichungen wegen der Veränderlichkeit von x und y nur dann identisch sein können, wenn

$$\cos\psi = \sin\tau, \quad \sin\psi = -\sin(\mu - \tau),$$
$$p = a \sin\tau - b \sin(\mu - \tau)$$

ist, so folgert man zunächst aus der Relation $\cos\psi^2 + \sin\psi^2 = 1$, dass

$$\sin\tau^2 + \sin(\mu - \tau)^2 = 1, \quad \sin(\mu - \tau)^2 - \cos\tau^2 = 0,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) \sin\left(2\tau + \mu - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

sein muss. Von den beiden Lösungen interessirt uns nur die für alle τ, d. i. die für alle Graden, geltende $\mu = \frac{\pi}{2}$. Sie macht $\cos\psi = \sin\tau$, $\sin\psi = -\cos\tau$, $\psi = \tau - \frac{\pi}{2}$, so dass ψ der Richtungswinkel einer Graden, z. B. der Graden OP, ist, welche auf der Graden $x \cos\psi + y \sin\psi - p = 0$ senkrecht steht. Verstehen wir jetzt unter dem auf ihr beliebig auszuwählenden Punkt (a, b) den Fusspunkt P der Senkrechten OP und bezeichnen deren Länge vorläufig durch r, so ist nach (7):

$$\frac{a}{\cos\psi} = \frac{b}{\sin\psi} = r, \quad a = r\cos\psi = r \sin\tau, \quad b = r \sin\psi = -r\cos\tau,$$

mithin:

$$p = a \sin\tau - b \sin(\mu - \tau) = a \sin\tau - b \cos\tau = a \cos\psi + b \sin\psi$$
$$= r(\cos\psi^2 + \sin\psi^2) = r.$$

Das heisst: unsere Behauptung trifft in jeder Beziehung zu.

Wird beispielsweise nach der Lage derjenigen Graden gefragt, deren Gleichung

$$5x - 12y + 39 = 0$$

ist, so kann man p und ψ dadurch bestimmen, dass man zunächst mit $\sqrt{5^2+12^2} = -13$ dividirt, wodurch

$$-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 3 = 0$$

und demnach

$$p = 3, \quad \cos\psi = -\frac{5}{13}, \quad \sin\psi = +\frac{12}{13}$$

erhalten wird.

Die Senkrechte vom Nullpunkt auf die Grade $5x - 12y + 39 = 0$ ist demnach 3 Längeneinheiten lang und liegt im zweiten Quadranten des Coordinatensystems so, dass die Abscisse und Ordinate ihres Fusspunktes sich dem absoluten Maasse nach verhalten, wie 5 : 12.

Beispiel II.

Die Gleichung der Parabel

lässt sich u. a. aus derjenigen Eigenschaft dieser Curve ableiten, dass ihre Tangente gleiche Winkel bildet mit einer Graden, welche nach einem festen Punkte hin gerichtet ist, und mit einer Graden, welche einer festen Richtung parallel ist. Den festen Punkt nennt man den **Brennpunkt** und die durch ihn hindurchgehende Grade, welche der festen Richtung parallel ist, die **Axe** der Parabel.

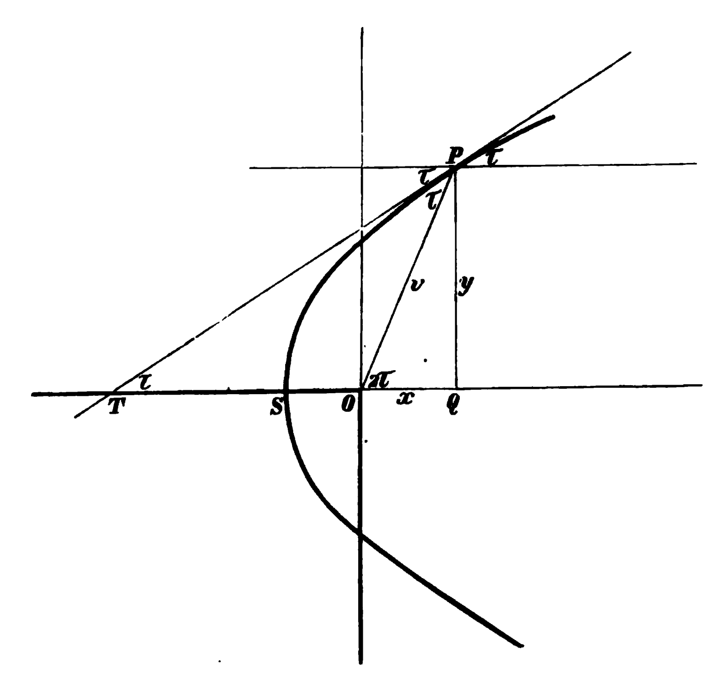
Wir wählen den Brennpunkt zum Nullpunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems und die Axe zur Abscissenaxe. Ist dann P ein Punkt der Parabel, $OQ = x$ seine Abscisse, $QP = y$ seine Ordinate, T der Schnittpunkt der Tangente mit der Abscissenaxe, so ist das $\triangle$ POT gleichschenklig mit den Basiswinkeln τ an der Basis PT; man hat demnach $\angle$ QOP $= 2\tau$, woraus

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tng} 2\tau = \frac{2 \operatorname{tng}\tau}{1 - \operatorname{tng}\tau^2} = \frac{2\frac{dy}{dx}}{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

folgt. Diese Gleichung lässt sich nicht direct integriren. Führt man jedoch anstatt der Ordinate y den „Vector“ $OP = v = \sqrt{x^2+y^2}$

als abhängige Variable ein, substituirt also $y\frac{dy}{dx}=v\frac{dv}{dx}-x$, so erhält man $\frac{dv}{dx}=+1$, $v=p+x$, wo p eine willkürliche Constante bedeutet.

Entscheidet man sich für ein bestimmtes von den beiden zulässigen Vorzeichen von x, so hat dies offenbar nur die Bedeutung, dass man den Entscheid über die Richtung der Abscissenaxe trifft.



Wir wählen das Zeichen +, setzen also $v=p+x$ und erhalten schliesslich, indem wir wieder $v^2=x^2+y^2$ restituiren: $y^2=p(p+2x)$ und hieraus: $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tng}\tau=\frac{p}{y}$.

Die Parabel liegt symmetrisch gegen ihre Axe, weil zu jedem x zwei nur durch das Vorzeichen verschiedene Ordinaten $y=\pm\sqrt{p(p+2x)}$ gehören, ist, wie der Ausdruck für die letzteren zeigt, nach der Seite der positiven x hin unbegrenzt und entfernt sich dabei unendlich von der Axe. Dagegen

schneidet sie dieselbe auf der andern Seite des Brennpunktes rechtwinklig in einem Punkte S, dem „**Scheitel**" der Parabel, dessen absolute Entfernung vom Brennpunkte gleich der Hälfte ihres „**Parameters**" p ist. Der „**Vector**" $v = OP$ übertrifft die Abscisse $x = \pm OQ$ um eine constante Grösse, welche dem Parameter p gleich ist. Der Schnittpunkt T der Tangente mit der Axe liegt eben so weit vom Brennpunkte O, wie der Berührungspunkt P. Je weiter der letztere sich vom Scheitelpunkte S entfernt, desto genauer wird die Tangente parallel zur Axe, weil $\lim_{y=\infty} \cdot \operatorname{tng} \tau = \lim_{y=\infty} \cdot \frac{p}{y} = 0$ ist.

Die Gleichung $y^2 = p\,(p + 2\,x)$ heisst die Brennpunktsgleichung der Parabel.

Bezieht man die Parabel auf dasjenige Coordinatensystem, welches seinen Nullpunkt im Scheitel der Parabel hat, ohne die Lage der Abscissenaxe im Übrigen zu ändern, so bleibt die Ordinate y ungeändert, während die Abscisse um $SO = \frac{1}{2}p$ wächst. Man muss also in der Gleichung

$$y^2 = p\,(p + 2 \cdot OQ) = 2p\left(\frac{1}{2}p + OQ\right) = 2p \cdot SQ$$

bei dem neuen System $SQ = x$ setzen.

Die auf das neue System bezogene Gleichung $y^2 = 2px$ heisst die Scheitelgleichung der Parabel.

§ 122.

Subtangente und Subnormale auf der Abscissenaxe.

Definitionen.

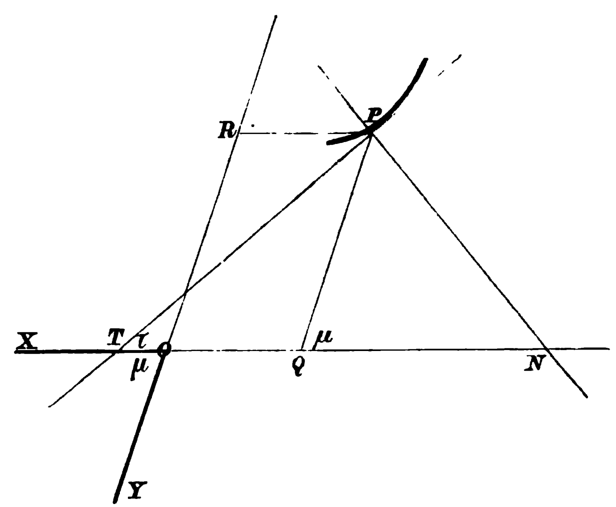
I. Unter der **Normalen** einer Curve $y = f(x)$ im Punkte (x, y) versteht man diejenige Grade, welche in diesem Punkt auf der ihm zugehörenden Tangente senkrecht steht.

II. Die **Subtangente** ist der Überschuss der Abscisse

des Berührungspunktes über die Abscisse des Schnittpunktes der Tangente mit der Abscissenaxe.

III. Die **Subnormale** ist der Überschuss der Abscisse des Schnittpunktes der Normale mit der Abscissenaxe über die Abscisse des Berührungspunktes.

Die zum Curvenpunkt P gehörende Tangente und Normale schneiden in der nächsten Figur die Abscissenaxe beziehungsweise in T und N, während Q der Endpunkt der Abscisse von P ist. Wir haben hier eine positive Subtangente + TQ und eine positive Subnormale + QN, weil die Punkte T, Q, N in der Richtung der



wachsenden Abscissen auf einander folgen; und es thut dabei nichts zur Sache, welche Lage der Nullpunkt O des Coordinatensystems gegen diese Punkte einnimmt.

Wäre PN die Tangente und demnach PT die Normale — d. i., schnitte die Curve ihre hier verzeichnete Lage rechtwinklig in P — so würde die Subtangente = — NQ und die Subnormale = — QT, beide also negativ sein.

Ist das Coordinatensystem rechtwinklig, so besitzen die Subtangente und die Subnormale stets gleiche Vorzeichen; bei schiefwinkligen Coordinatensystemen ist dies nicht nöthig. — Man erkennt dies unmittelbar, wenn man den rechten Winkel TPN um P dreht.

Lehrsatz.

Bezeichnet man durch μ den Coordinatenwinkel, durch t und n die Subtangente und Subnormale auf der x-Axe und durch τ den Richtungswinkel der Tangente, so ist:

$$(1) \qquad t = y \cdot \frac{\sin(\mu - \tau)}{\sin \tau} = y \cdot \frac{dx}{dy},$$

$$(2) \qquad n = y \cdot \frac{\cos(\mu - \tau)}{\cos \tau} = y \cdot \cos \mu + \frac{y \cdot \sin \mu^2}{\cos \mu + \frac{dx}{dy}}$$

$$= y \cdot \frac{1 + \frac{dx}{dy} \cdot \cos \mu}{\frac{dx}{dy} + \cos \mu};$$

und im Besondern bei einem **rechtwinkligen** Coordinatensystem:

$$(3) \qquad t = y \cdot \cot \tau = y \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{d \cdot l y},$$

$$(4) \qquad n = y \cdot \operatorname{tng} \tau = y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d \cdot y^2}{dx}.$$

— Der Beweis erfordert nur die Anwendung des Sinussatzes auf die Dreiecke PQT und PQN nebst den numerirten Formeln des § 120. Dabei muss man natürlich bei der Betrachtung derjenigen Fälle, in denen die Grössen t, n, y, τ theilweise negativ werden, den Vorzeichen gebührende Rechnung tragen. Im Übrigen sind die Schlüsse so einfach, dass wir uns hier nicht mit ihnen zu bemühen brauchen.

Beispiele.

I.

Die Gleichung einer Curve in Bezug auf ein Coordinatensystem mit dem beliebig gewählten Coordinatenwinkel μ sei

$$y^2 = 2px.$$

Dann ist:

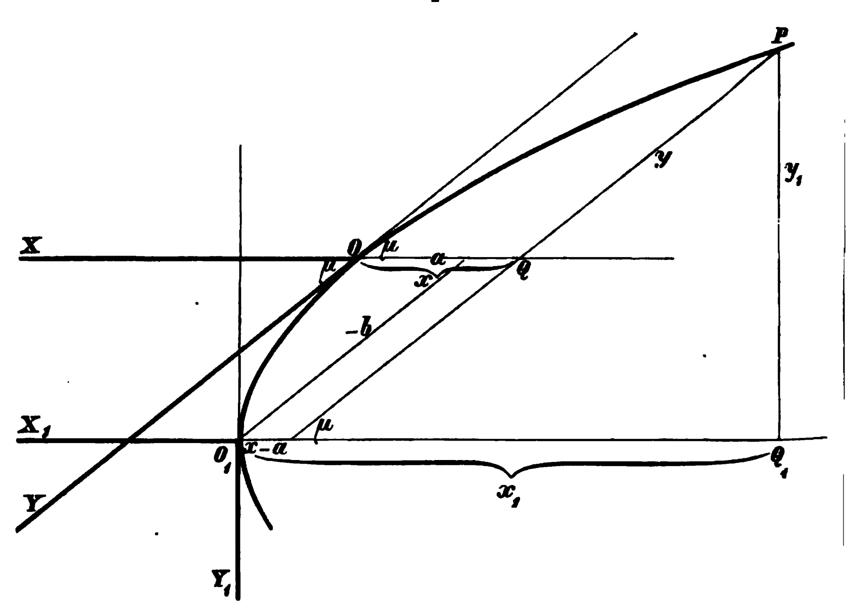
$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p};$$

mithin nach (1) die Subtangente:

$$t = y \cdot \frac{y}{p} = \frac{y^2}{p} = 2x$$

und nach (2) die Subnormale:

$$n = y \cos \mu + \frac{y \cdot \sin \mu^2}{\cos \mu + \frac{y}{p}} = \frac{y + 2x \cos \mu}{y + p \cos \mu} \cdot p.$$



Der Ausdruck für die Subtangente bleibt also derselbe, welchen Werth der Coordinatenwinkel auch haben mag; er giebt an, dass die Abscisse über den Nullpunkt des Coordinatensystems hinaus verdoppelt werden muss, um den Schnittpunkt mit der Tangente zu erhalten.

Die Subnormale ist bei einem **rechtwinkligen** Coordinatensystem **constant** gleich dem Parameter p der Parabel. In diesem Falle ist $y^2 = 2px$ deren Scheitelgleichung.

Übrigens stellt $y^2 = 2px$ auch bei schiefwinkligen Coordinaten eine Parabel dar, und zwar eine solche, deren Axe der Abscissenaxe parallel ist.

Aus § 120, (1) folgt nämlich, weil $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$ ist:

$$\frac{\sin \tau}{\sin(\mu - \tau)} = \frac{p}{y};$$

und hieraus ergiebt sich für die Coordinaten a und b desjenigen Curvenpunktes O_1, in welchem die Tangente einen rechten Richtungswinkel $\left(\tau = \frac{\pi}{2}\right)$ besitzt:

$$\frac{1}{-\cos \mu} = \frac{p}{b}, \quad b = -p \cos \mu, \quad a = \frac{b^2}{2p} = \frac{1}{2} p \cos \mu^2.$$

Macht man nun O_1 zum Nullpunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x_1 und y_1, dessen x_1-Axe mit der x-Axe gleichgerichtet ist, so erhält man aus der Figur für den beliebigen Curvenpunkt P sofort die Relationen:

$$y_1 = (y - b) \sin \mu, \qquad x_1 = x - a + (y - b) \cos \mu;$$

$$y = \frac{y_1}{\sin \mu} - p \cos \mu, \qquad x = x_1 - y_1 \cot \mu + \frac{1}{2} p \cos \mu^2.$$

Setzt man dies in die Gleichung $y^2 = 2px$ ein, so folgt:

$$y_1^2 = 2 \cdot (p \sin \mu^2) \cdot x_1,$$

was die Scheitelgleichung einer Parabel mit dem Parameter $p_1 = p \sin \mu^2$ ist. Also:

Die Gleichung $y^2 = 2px$ zeigt unter allen Umständen eine Parabel an, welche die Ordinatenaxe im Nullpunkte berührt und ihre Axe der Abscissenaxe parallel richtet. Bedeutet μ den Coordinatenwinkel, so ist ihr Parameter $p_1 = p \cdot \sin \mu^2$. Jede Sehne, welche einer festen Tangente parallel ist, wird von dem **„conjugirten Durchmesser“** halbirt, d. h. von derjenigen Graden, welche parallel zur Parabelaxe durch den Berührungspunkt der Tangente

geht. Geht die Sehne durch den Brennpunkt, so ist sie $=2p$ und schneidet auf dem Durchmesser eine Strecke $=\frac{1}{2}p$ ab.

— Das Letztere ergiebt sich daraus, dass dann $x-a=\frac{1}{2}p_1$ ist, woraus $x=a+\frac{1}{2}p_1=\frac{1}{2}p$, $y^2=2p\cdot\frac{1}{2}p=p^2$ folgt.

II.

Sollen die Gleichungen aller Curven gefunden werden, welche eine constante Subnormale n besitzen, so folgt zunächst aus Gleichung (4), dass bei einem rechtwinkligen Coordinatensystem, dessen Nullpunkt in einem Punkte der Curve liegt,

$$\frac{d\cdot y^2}{dx}=2n,\quad y^2=2nx$$

sein muss, die Curve also nur eine Parabel mit dem Parameter n sein kann, deren Axe mit der Abscissenaxe zusammenfällt.

Verlangt man, dass die Curve durch einen beliebig gewählten Punkt (a, b) hindurchgehe, so folgt

$$y^2-b^2=2n(x-a).$$

Dies ist ebenfalls eine Parabel mit dem Parameter n, deren Axe in der Abscissenaxe liegt; wovon man sich leicht überzeugt.

Setzt man aber ein schiefwinkliges Coordinatensystem voraus, so folgt aus (2):

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y-n\cos\mu}{n-y\cos\mu}=-\frac{1}{\cos\mu}-\frac{n\sin\mu^2}{y\cos\mu^2-n\cos\mu},$$

und wenn man diese Gleichung unter der Bedingung integrirt, dass die Curve durch einen gegebenen Punkt (a, b) hindurchgehe:

$$(x-a)\cos\mu=-(y-b)-\frac{1}{2}n\sin\mu\operatorname{tng}\mu\cdot l\left(\frac{y\cos\mu-n}{b\cos\mu-n}\right)^2.$$

Die Curve hat also eine transcendente Gleichung.

III.

Die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ergiebt durch Differentiation:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Folglich erhält man nach (1) für die Subtangente:

$$t = -\frac{a^2 y^2}{b^2 x} = -\frac{a^2}{x}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

oder:

$$t = x - \frac{a^2}{x} = -\frac{a^2 - x^2}{x}.$$

Und, wenn wir das Coordinatensystem als rechtwinklig voraussetzen, so wird die Subnormale nach Gleichung (4):

$$n = -\frac{b^2 x}{a^2}.$$

Dass der Curve, wenn $a > b$ angenommen wird, die hier umstehend verzeichnete Gestalt zukommt, ist aus ihrer Gleichung leicht herauszulesen. Man erkennt ohne Schwierigkeit, dass $OA = OA_1 = a$ und $OB = OB_1 = b$ ist, und dass für alle Curvenpunkte

$$\text{abs}\cdot x \overline{\overline{<}}\, a, \quad \text{abs}\cdot y \overline{\overline{<}}\, b$$

sein müsse. Auch ergiebt sich aus der Gleichung

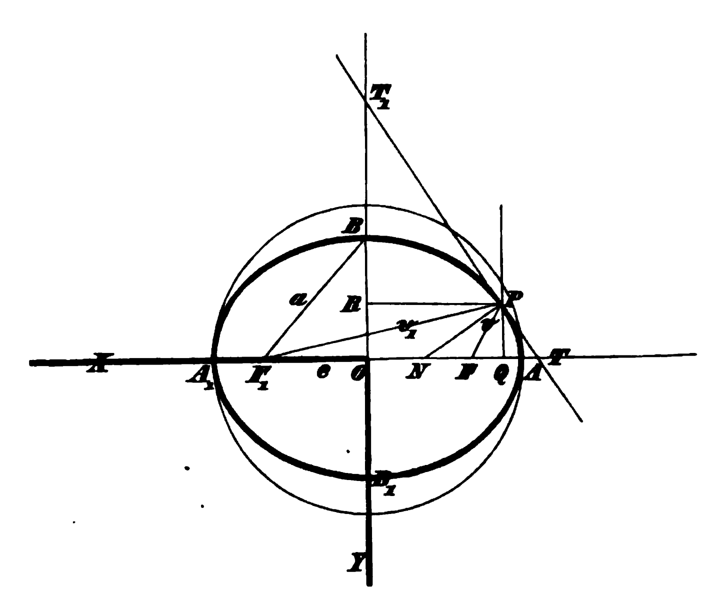
$$\text{tng}\, \tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

ohne Weiteres, dass die Tangenten in A und A_1 der Ordinatenaxe und die Tangenten in B und B_1 der Abscissenaxe parallel sind.

Für alle Punkte P, welche eine positive Abscisse haben, sind Subtangente und Subnormale, wie ihre Ausdrücke zeigen, negativ.

Die Subnormale QN hängt nach ihnen von der Länge der beiden „**Halbaxen**“ a und b ab, während die Subtangente

TQ bei allen Ellipsen über der Axe AA_1 für die gleiche Abscisse $x = OQ$ einerlei Werth hat, so dass sich die Tangente TP um den Punkt T dreht, wenn man die Halbaxe b ändert.



Für $b = a$ wird die Ellipse ein Kreis und die Grade PQ die Polare des Poles T für denselben. Also sind die Punkte T, A, Q, A_1 harmonisch gelegen. Dies kann man auch leicht durch Rechnung finden; denn es folgt:

$$A_1Q = a + x,\ A_1T = \frac{a(a+x)}{x},\ AQ = a - x,\ AT = \frac{a(a-x)}{x},$$

mithin:

$$\frac{A_1Q}{A_1T} = \frac{AQ}{AT}.$$

Auch ergiebt sich aus dem Ausdruck für t sofort:

$$(x - t) \cdot x = a^2,\quad OT \cdot OQ = a^2.$$

In ganz analoger Weise liegen auf der Ordinatenaxe die Punkte T_1, B, R, B_1 harmonisch, wie man sogleich aus der Vertauschung von a mit b und x mit y ersieht.

Die beiden Punkte F und F_1 auf der grossen Axe AA_1 seien dadurch erhalten, dass man um B mit dem Radius a einen Kreis zog, welcher dort schnitt. Sie heissen die Brennpunkte (foci) und $OF = OF_1 = e$ heisst die Excentricität der Ellipse. $FP = v$ und $F_1P = v_1$ nennt man die Vectoren der Ellipse.

Es ist:

$$e^2 = a^2 - b^2$$

und:

$$v = a - \frac{ex}{a},$$

$$v_1 = a + \frac{ex}{a}$$

wegen der aus $\triangle FPQ$ und $\triangle F_1PQ$ folgenden Gleichungen

$$v^2 = (x-e)^2 + y^2, \quad v_1^2 = (x+e)^2 + y^2,$$

in welche man nur für y zu substituiren braucht, um diese Resultate zu erhalten.

Mithin hat man u. a. die Relation $v + v_1 = 2a$.

Berechnet man die Abstände der Punkte T und N von F und F_1, so findet man zunächst:

$$TO = x - t = \frac{a^2}{x}, \quad ON = x + n = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x = \frac{e^2 x}{a^2}$$

und hieraus:

$$TF = TO - OF = \frac{a^2}{x} - e = \frac{a}{x} \cdot v,$$

$$TF_1 = TO + OF_1 = \frac{a^2}{x} + e = \frac{a}{x} \cdot v_1,$$

$$NF = OF - ON = e - \frac{e^2 x}{a^2} = \frac{e}{a} \cdot v,$$

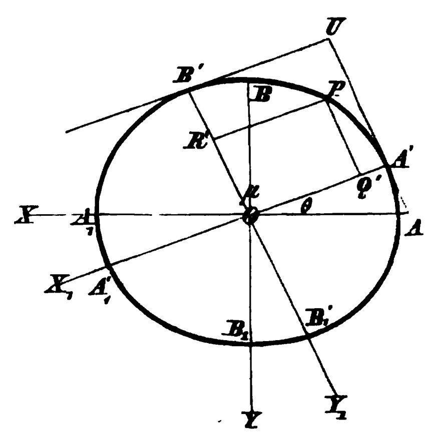
$$NF_1 = OF + ON = e + \frac{e^2 x}{a^2} = \frac{e}{a} \cdot v_1;$$

$$\frac{TF}{TF_1} = \frac{NF}{NF_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{PF}{PF_1}.$$

Mithin halbirt die Normale PN den Vectorenwinkel

FPF_1 und die Tangente PT dessen Nebenwinkel. Die Punkte T, F, N, F_1 liegen harmonisch.

Wir wollen sogleich noch einige andere Eigenschaften der Ellipse besprechen, welche mit den obigen in engem Zusammenhang stehn.



Zieht man durch den Mittelpunkt O der Ellipse einen beliebigen Durchmesser $B'B'_1$ und parallel mit der Tangente in B' einen zweiten Durchmesser $A'A'_1$, so heissen $A'A'_1$ und $B'B'_1$ conjugirte Durchmesser. Wir bezeichnen $OA' = a'$, $OB' = b'$, $\angle A'OB' = \mu$. $\angle AOA' = \theta$. Der letztere ist gleich dem Richtungswinkel der Tangente in B'. Mithin erhält man, wenn x und y für den Augenblick die Coordinaten von B' bedeuten, nach der für ihn geltenden Formel:

$$\cot\theta = \frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 x},$$

während

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tng}(\mu + \theta) = \frac{\operatorname{tng}\mu + \operatorname{tng}\theta}{1 - \operatorname{tng}\mu \operatorname{tng}\theta}$$

ist. Aus der Combination dieser beiden Gleichungen entsteht:

$$\operatorname{tng}(\mu + \theta) = -\frac{b^2}{a^2}\cot\theta,$$

$$\operatorname{tng}\mu = -\frac{a^2 \sin\theta^2 + b^2 \cos\theta^2}{(a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta},$$

$$\cos\mu^2 = \frac{c^4 \sin\theta^2 \cos\theta^2}{a^4 \sin\theta^2 + b^4 \cos\theta^2},$$

$$\sin\mu^2 = \frac{(a^2 \sin\theta^2 + b^2 \cos\theta^2)^2}{a^4 \sin\theta^2 + b^4 \cos\theta^2}$$

Liegt demnach OA' im ersten und OB' im zweiten Quadranten — wie in der Figur — so ist μ ein stumpfer Winkel. Er erlangt seinen grössten Werth, wenn OA' sich in der Diagonale des aus OA und OB vervollständigten Rechtecks befindet.

Die Coordinaten des Punktes A' sind $a'\cos\theta$ und $a'\sin\theta$. Setzt man diese Werthe in die Gleichung der Ellipse ein, so erhält man:

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin\theta^2 + b^2 \cos\theta^2}.$$

Die Coordinaten des Punktes B' sind $b'\cos(\mu+\theta)$ und $b'\sin(\mu+\theta)$. Daher ist analog:

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin(\mu+\theta)^2 + b^2 \cos(\mu+\theta)^2}$$

oder, wenn man μ vermittelst der oben bewiesenen Formel $\operatorname{tng}(\mu+\theta) = -\frac{b^2}{a^2}\cot\theta$ eliminirt:

$$b'^2 = \frac{a^4 \sin\theta^2 + b^4 \cos\theta^2}{a^2 \sin\theta^2 + b^2 \cos\theta^2}.$$

Summirt man ferner die beiden Ausdrücke für a'^2 und b'^2, indem man im Zähler des ersteren

$$a^2 b^2 (\sin\theta^2 + \cos\theta^2)$$

für $a^2 b^2$ schreibt, so ergiebt sich, dass

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

dass also die Summe der Quadrate der conjugirten Halbmesser der Ellipse eine constante Grösse ist, oder — was dasselbe heisst — dass die conjugirten Halbmesser zu Katheten von rechtwinkligen Dreiecken gemacht werden können, deren Hypotenusen sämmtlich der Ellipsensehne AB gleich sind.

Die Tangente im Punkte A' hat einen Richtungswinkel τ, welcher, wenn wir die Coordinaten von A' für den Augenblick durch x und y bezeichnen und dann $x = a'\cos\theta$, $y = a'\sin\theta$ einsetzen, durch den Ausdruck

$$\cot\tau = -\frac{a^2 y}{b^2 x} = -\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tng}\theta$$

bestimmt wird. Vergleicht man denselben mit der früher erhaltenen Gleichung

$$\operatorname{tng}(\mu+\theta) = -\frac{b^2}{a^2}\cot\theta,$$

so erkennt man, dass die Tangente in A' dem Durchmesser $B'B_1'$ parallel, dass also überhaupt die Tangente in dem Endpunkte eines Durchmessers dem conjugirten Durchmesser parallel ist.

Das Feld des Parallelogramms $A'OB'U$ hat die Grösse $a'b'\sin\mu$. Berechnet man deren Werth aus den obigen Formeln für a'^2, b'^2 und $\sin\mu^2$, so erhält man den constanten Ausdruck:

$$a'b'\sin\mu = ab.$$

Dies kann man, nachdem mit 4 multiplicirt ist, so aussprechen:

Alle Parallelogramme, welche sich einer Ellipse umschreiben lassen, besitzen gleiche Felder.

Endlich sei P ein beliebiger Punkt der Ellipse, $x' = \pm OQ'$ seine Abscisse und $y' = \pm OR'$ seine Ordinate für das schiefwinklige Coordinatensystem, dessen Axen $A_1'O$ und $B_1'O$ sind, und dessen Coordinatenwinkel $= \mu$ ist. Denken wir uns dann noch die Grade $OP = r$ gezogen und bezeichnen $\angle A'OP = \varphi$, so ist im $\triangle Q'OP$ nach dem Sinussatz:

$$\frac{y'}{\sin\varphi} = \frac{r}{\sin\mu}, \quad r\sin\varphi = y'\sin\mu,$$

$$\frac{x'}{\sin(\mu-\varphi)} = \frac{r}{\sin\mu}, \quad r\sin\mu\cos\varphi - r\cos\mu\sin\varphi = x'\sin\mu.$$

Dies giebt, nachdem man aus der ersten Gleichung in der zweiten für $r\sin\varphi$ substituirt hat, auch

$$r\sin\varphi = y'\sin\mu, \quad r\cos\varphi = x' + y'\cos\mu.$$

Im ursprünglichen Coordinatensystem sind aber die Coordinaten von P:

$$x = r\cos(\varphi+\theta) = r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta,$$
$$y = r\sin(\varphi+\theta) = r\sin\varphi\cos\theta + r\cos\varphi\sin\theta.$$

Folglich erhält man durch Substitution aus den voranstehenden Formeln:

$$x = x' \cos\theta + y' \cos(\mu + \theta),$$
$$y = x' \sin\theta + y' \sin(\mu + \theta).$$

Diese Werthe setze man in der Ellipsengleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

für x und y. Dadurch entsteht nach gehöriger Ordnung:

$$x'^2\left\{a^2 \sin\theta^2 + b^2\cos\theta^2\right\} + y'^2\left\{a^2\sin(\mu+\theta)^2 + b^2\cos(\mu+\theta)^2\right\}$$
$$+ 2x'y'\left\{a^2\sin\theta\sin(\mu+\theta) + b^2\cos\theta\cos(\mu+\theta)\right\} = a^2b^2.$$

Der Coefficient von $2x'y'$ verschwindet in Folge der Gleichung $\operatorname{tng}(\mu+\theta) = -\frac{b^2}{a^2}\cot\theta$, und die Coefficienten von x'^2 und y'^2 sind die Nenner der oben entwickelten Werthe von a'^2 und b'^2. Durch die Substitution gelangt man zu dem Resultat:

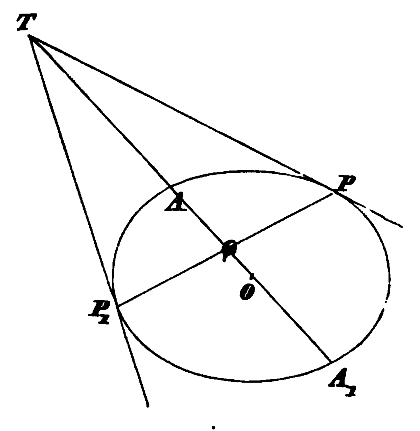
Sind a′ und b′ zwei conjugirte Halbmesser der Ellipse, so ist

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

die Mittelpunktsgleichung der Ellipse, bezogen auf jene Halbmesser als Coordinatenaxen.

Hieraus folgt weiter, dass jede Sehne, welche einem festen Durchmesser parallel liegt, von dem conjugirten Durchmesser halbirt wird.

Sodann: Zieht man von einem Punkte T einen Durchmesser T A O A_1 durch eine Ellipse und an dieselbe eine Tangente TP, schliesslich vom Berührungspunkte P eine zum conjugirten Durchmesser parallele Sehne, welche sich mit dem ersteren in Q schneide, so sind T, A, Q, A_1 harmonische



Punkte. — Denn der Ausdruck für die Subtangente TQ in dem schiefwinkligen System ist demjenigen für das rechtwinklige System durchaus analog, nur dass a′ für a und x′ für x eintritt; wir haben also auch hier:

$$\frac{A_1 Q}{A_1 T} = \frac{A Q}{A T}, \quad OQ \cdot OT = a'^2 = OA^2.$$

Da es ferner, in Absicht auf den Werth der Subtangente,

$$TQ = \frac{OA^2}{OQ} - OQ$$

gleichgültig ist, welche von den beiden möglichen Tangenten von T aus gezogen sein mag, so ergiebt sich:

Zieht man von einem Punkte T aus die beiden Tangenten TP und TP_1, so wird die zwischen den beiden Berührungspunkten liegende Sehne von der Centrale TO halbirt.

IV.

Die Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ergiebt durch Differentiation

$$\frac{dx}{dy} = + \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Daher ist die Subtangente

$$t = + \frac{a^2 y^2}{b^2 x} = + \frac{a^2}{x}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

oder:

$$t = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x};$$

und bei einem rechtwinkligen Coordinatensystem die Subnormale:

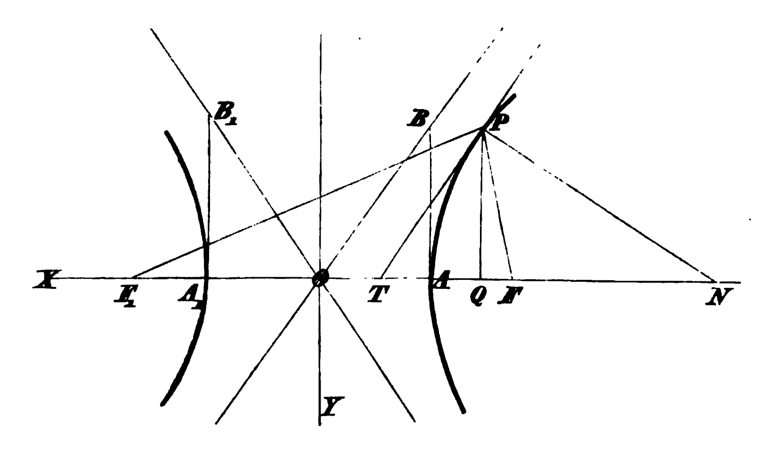
$$n = + \frac{b^2 x}{a^2}.$$

Die Hyperbel besteht aus zwei unzusammenhängenden Ästen, welche die x-Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems in den Scheiteln A und A_1 schneiden, symmetrisch gegen die Axen liegen und ins Unendliche verlaufen. Es bleibt dabei ein mit der y-Axe paralleler Streifen von der Breite $AA_1 = 2a$ frei. Dies erkennt man leicht aus der Form

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$$

der Hyperbelgleichung.

Errichtet man auf der Strecke $OA = a$ im Scheitel A der Hyperbel eine Senkrechte $AB = b$ und schlägt mit dem Radius



OB um O einen Kreis, welcher die Grade OA in den beiden Punkten F und F_1 schneide, so erhält man die Brennpunkte F und F_1 der Hyperbel. Man bezeichnet $OF = OF_1 = e$ und nennt e die Excentricität der Hyperbel. Es ist:

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

PF und PF_1 heissen die Vectoren des Punktes P; wir wollen sie mit v und v_1 bezeichnen.

Nachdem die Rechnungen für die Ellipse ausgeführt sind, können wir sie uns für die Hyperbel ersparen, da man offenbar in den Ellipsenformeln nur $(-b^2)$ für b^2, d. i. ib für b, zu setzen braucht, um die Hyperbelformeln zu erhalten. Es bleiben also auch alle Resultate bestehn, welche durch die Verschiedenheit des Vorzeichens von b^2 nicht alterirt werden, z. B., dass die Punkte A_1, T, A, Q, so wie, dass die Punkte F_1, T, F, N harmonisch sind. Aus dem Letzteren folgt, dass die Tangente PT den Vectorenwinkel FPF_1 und die Normale PN den Nebenwinkel desselben halbirt.

Für die Länge der Vectoren ergiebt sich

$$v = \frac{ex}{a} - a,$$

$$v_1 = \frac{ex}{a} + a,$$

$$v_1 - v = 2a.$$

Wir wollen hier nicht die ganze Kette der aus der angedeuteten Analogie entspringenden Schlüsse aufrollen, sondern diejenige Eigenthümlichkeit der Hyperbel hervorheben, durch welche sie sich am augenfälligsten von der Ellipse unterscheidet.

Berechnet man die Strecke $OT = OQ - QT = x - t$, so findet man

$$OT = \frac{a^2}{x}.$$

Daher nähert sich die Tangente PT desto mehr der Grenzlage OB, je weiter der Berührungspunkt P auf der Hyperbel vom Scheitel A wegrückt; m. a. W.: die Grade OB ist eine **Asymptote** der Hyperbel, und gleicherweise die symmetrisch zu ihr liegende Grade OB_1. Für den halben Asymptotenwinkel AOB gilt die Formel

$$\operatorname{tng} AOB = \frac{b}{a}.$$

Macht man die Asymptoten zu Axen der Coordinaten x' und y', so erhält man als Hyperbelgleichung:

$$x' y' = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

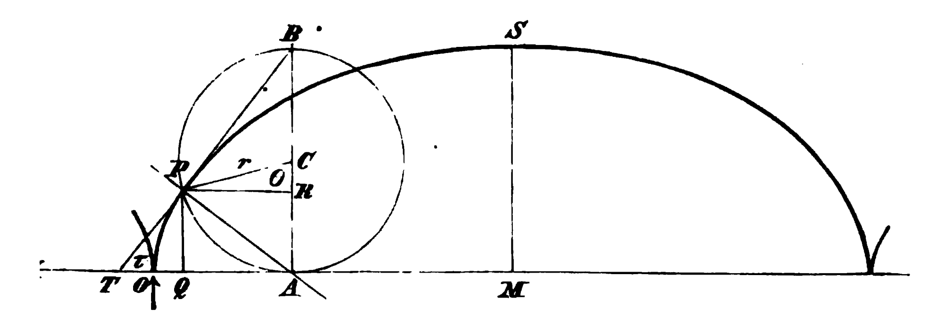
Schneiden die Asymptoten sich rechtwinklig — ist also $a = b$ — so heisst die Hyperbel rechtwinklig.

V.

Die gemeine Cycloide

ist diejenige Curve, welche von einem Punkte eines Kreises beschrieben wird, während dieser auf einer Graden, der **Basis**, rollt (sich auf ihr, ohne zu gleiten, abwickelt).

In der Basis liege die Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems so, dass die Abscisse des Berührungspunktes des rollenden Kreises wächst, und der Nullpunkt liege an einer



solchen Stelle O, an welcher der fixirte Punkt P des Kreises in die Basis fiel; so dass die Strecke von O bis zu dem augenblicklichen Berührungspunkte A dem Bogen PA gleich ist. $ACB = 2r$ sei der „verticale" Durchmesser des Kreises, $\angle ACP = \theta$ der „Wälzungswinkel". Man ziehe $PQ \perp OA$, $PR \perp AB$. Dann ist $OQ = x$, $QP = AR = y$.

Dann ergiebt sich ohne irgend welche Schwierigkeit aus der Figur:

Die Coordinaten x und y der Cycloide werden durch den Radius r des rollenden Kreises und durch den Wälzungswinkel θ in der Form

$$x = r(\theta - \sin\theta),$$
$$y = r(1 - \cos\theta)$$

ausgedrückt.

Die Elimination von θ, um eine Gleichung zwischen r, x und y allein zu erhalten, ist unpraktisch, weil die unhandlichere transcendente Gleichung

$$x = r \operatorname{arc\,cos} \frac{r - y}{r} - \sqrt{y(2r - y)}$$

resultirt.

Durch Differentiation ergiebt sich:

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) = 2r \sin\frac{\theta}{2}^2,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = r \sin\theta = 2r \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2};$$

mithin ist:

$$\operatorname{tng}\tau = \frac{dy}{dx} = \cot\frac{\theta}{2}, \quad \tau = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2};$$

$$t = y\frac{dx}{dy} = 2r \sin\frac{\theta}{2}^2 \operatorname{tng}\frac{\theta}{2},$$

$$n = y\frac{dy}{dx} = 2r \sin\frac{\theta}{2}^2 \cot\frac{\theta}{2} = r \sin\theta.$$

Das bequemste von diesen Resultaten ist der Ausdruck für die Subnormale $n = r\sin\theta = PR = QA$; denn er zeigt direct an, dass die Normale durch den Punkt A geht. Es folgt daher:

Die Normale der Cycloide geht stets durch den Berührungspunkt A des Wälzungskreises mit der Basis, die Tangente durch dessen Gegenpunkt B. Wo die Cycloide mit ihrer Basis zusammentrifft (nach jeder ganzen Umwälzung des Kreises) hat sie eine Spitze, in welcher die Tangente senkrecht zur Basis steht; und in der Mitte dazwischen (nach einer halben Umwälzung des

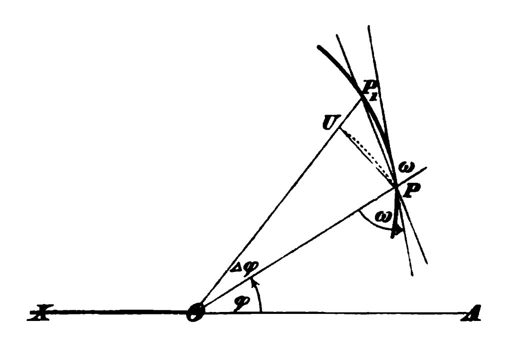
Kreises) liegt die Tangente parallel zur Basis. Gegen die Senkrechte SM von diesem Punkte, dem **Scheitel** S, aus zur Basis liegt die Cycloide symmetrisch.

Anmerkung.

Ausser der oben behandelten Cycloide betrachtet man auch solche, bei welchen der beschreibende Punkt P innerhalb oder ausserhalb des Kreisfeldes, fest mit diesem verbunden, liegt — gestreckte und geschleifte Cycloiden — und solche, welche beim Rollen eines Kreises auf einem andern innerhalb oder ausserhalb seines Feldes entstehn — Epicycloiden und Hypocycloiden. Sie haben sämmtlich eine Reihe von Eigenschaften, durch welche sie sich zu eleganten Exemplificationen in der Curventheorie eignen.

§ 123.

Tangente, Subtangente und Subnormale bei Polarcoordinaten.



Ist die Gleichung einer Curve in der Form einer Relation zwischen dem Vector $OP = v$ des Punktes P und dem Richtungswinkel $AOP = \varphi$ dieses Vectors gegen die Axe XO gegeben, so bedeute ω den **Richtungswinkel der Tangente gegen den Vector,** indem dieser Winkel die positive Verlängerungsrichtung des Vectors als einen Schenkel, die dem wachsenden φ entsprechende Richtung der Tangente als zweiten Schenkel hat und in demselben Sinne um P herum wächst, wie φ um O.

Denken wir uns durch P eine Secante gezogen, welche die Curve zum zweiten Male in P_1 schneidet, und den zugehörigen Vector $OP_1 = v + \Delta v$, so ist $\angle POP_1 = \Delta\varphi$. Machen wir ferner auf OP_1 die Strecke $OU = OP = v$, so bleibt $UP_1 = \Delta v$ übrig. Schieben wir nun den Punkt P_1 auf der Curve näher an P heran, so nähert sich $\angle PP_1U$ dem Grenzwerthe ω, $\angle P_1UP$ dem Grenzwerthe $\frac{\pi}{2}$; und es ist daher

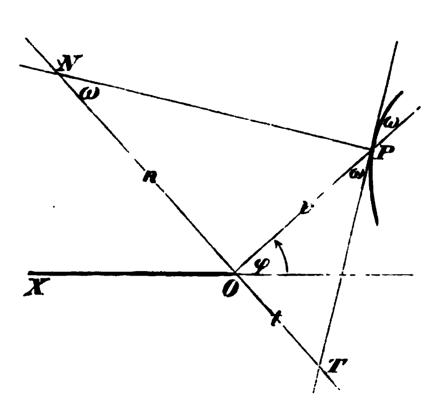
$$\cot\omega = \lim\cdot\frac{UP_1}{UP} = \lim\cdot\frac{\Delta v}{v\Delta\varphi}\cdot\frac{v\Delta\varphi}{UP}$$

oder, weil das Grenzverhältnis zwischen dem Kreisbogen UP $= v\Delta\varphi$ und der Kreissehne UP den Werth 1 hat:

$$\cot\omega = \lim\cdot\frac{\Delta v}{v\cdot\Delta\varphi},$$

d. i.

$$\cot\omega = \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{d\varphi} = \frac{d\cdot l v}{d\varphi}.$$



Subtangente und **Subnormale** nennt man bei **Polarcoordinaten** die Abschnitte OT und ON, welche von der Tangente, beziehungsweise von der Normale, auf der durch den Nullpunkt gelegten Senkrechten zum Vector begrenzt werden.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken POT und PON ergiebt sich:

$$OT = v\,\mathrm{tng}\,\omega = v^2\cdot\frac{d\varphi}{dv}, \quad ON = v\cot\omega = \frac{dv}{d\varphi},$$

wodurch auch die Vorzeichen geregelt sein sollen.

Wir fassen die Resultate zusammen durch den

Lehrsatz.

Ist eine Curve durch eine Gleichung $f(v,\varphi)=0$ zwischen ihren Polarcoordinaten gegeben, so werden der Richtungswinkel ω der Tangente, die Subtangente t und die Subnormale n durch die Formeln

$$(1)\qquad \cot\omega = \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{d\varphi} = \frac{d\cdot l v}{d\varphi},$$

$$(2)\qquad t = v^2\cdot\frac{d\varphi}{dv},$$

$$(3)\qquad n = \frac{dv}{d\varphi}$$

bestimmt.

Beispiele.

I.

Die Archimedische Spirale

$$v = a\varphi$$

ergiebt:

$$\cot\omega = \frac{a}{v} = \frac{1}{\varphi}, \qquad \operatorname{tng}\omega = \varphi;$$

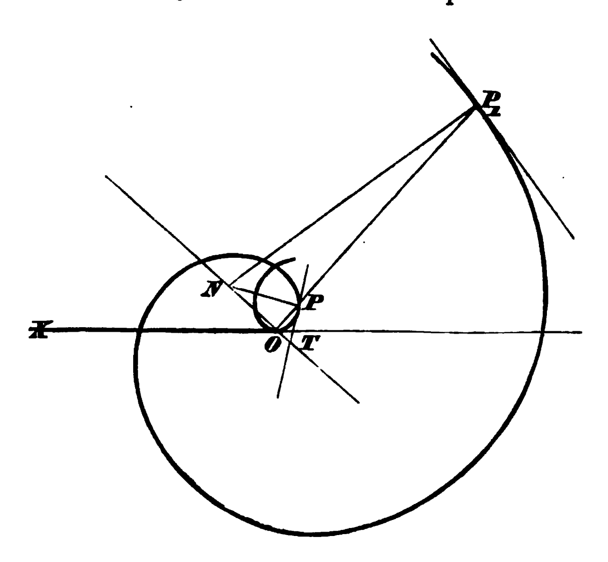
$$t = \frac{v^2}{a} = a\varphi^2, \qquad n = a.$$

Sie geht vom Nullpunkte O der Coordinaten in der Weise aus, dass sie dort von der Axe XO berührt wird ($\omega = 0$ für $\varphi = 0$), umwindet dann bei unendlich wachsendem φ den Nullpunkt in einer unendlich wachsenden Anzahl von Windungen, zwischen denen auf jeder durch den Pol O gehenden Graden gleiche und von deren Richtung unabhängige Strecken

$$PP_1 = a(\varphi + 2\pi) - a\varphi = 2\pi a$$

liegen.

Die Länge dieser Strecken $PP_1 = 2\pi a$ beträgt so viel, wie der Umfang eines Kreises, dessen Radius der Subnormale ON gleich ist. Wegen der constanten Länge der letzteren ($ON = a$), gehen die Normalen aller Curvenpunkte $P, P_1, \ldots$, welche von demselben Strahl OP getroffen werden, durch denselben Punkt N.



Je weiter man die Spirale fortsetzt, desto genauer stellt sich ihre Tangente rechtwinklig zum Vector.

II.

Die hyperbolische Spirale[1])

$$v\varphi = a,$$

$$v = \frac{a}{\varphi}$$

umwindet den Pol der Coordinaten, indem sie sich demselben asymptotisch bei unendlich wachsender Windungsanzahl nähert.

Aus

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{a}{\varphi^2} = -\frac{v^2}{a}$$

folgt:

---

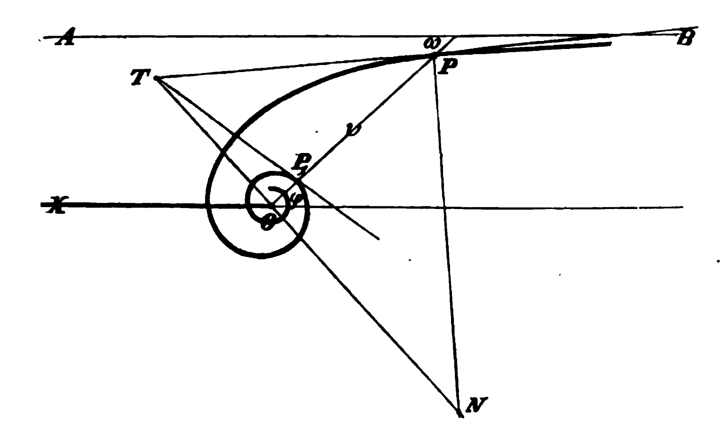
[1]) So genannt wegen der Aehnlichkeit ihrer Gleichung mit der Asymptotengleichung der Hyperbel.

$$\cot \omega = -\frac{v}{a} = -\frac{1}{\varphi}, \quad \operatorname{tng} \omega = -\varphi,$$

$$t = -a,$$

$$n = -\frac{a}{\varphi^2} = -\frac{v^2}{a}.$$

Es fällt sofort die grosse Aehnlichkeit dieser Beziehungen zu den analogen bei der Archimedischen Spirale in die Augen, nur dass die Subtangente die Rolle der Subnormale übernimmt. Der Winkel ω



ist ein stumpfer, da $\frac{dv}{d\varphi}$ einen negativen Werth besitzt; und deshalb erscheinen auch die Subtangente und Subnormale mit negativen Vorzeichen. Rechnen wir mit den absoluten Werthen, so ist der constante Werth der Subtangente $OT = a$. Durch denselben Punkt T gehen die Tangenten aller derjenigen Curvenpunkte $P, P_1, \ldots$, in welchen die Curve von dem Strahle OP geschnitten wird. Die Tangente stellt sich desto mehr rechtwinklig gegen den Vector, je enger die Windungen werden. Lässt man dagegen den Winkel φ unendlich abnehmen, so nähert sich ω dem Grenzwerthe π, die spitzen Winkel XOT und OTP dem Grenzwerthe $\frac{\pi}{2}$, mithin nähert sich die Tangente TP hierbei der Grenzlage AB, welche mit der Axe XO im Abstande a parallel

ist: Diese Grade AB ist Asymptote der hyperbolischen Spirale; was man auch daraus entnehmen kann, dass von den rechtwinkligen Coordinaten

$$x = v \cos\varphi = \frac{a \cos\varphi}{\varphi}, \quad y = v \sin\varphi = \frac{a \sin\varphi}{\varphi}$$

des Punktes P die erstere bei unendlich abnehmendem φ unendlich wächst, die zweite aber sich dem Grenzwerthe a nähert.

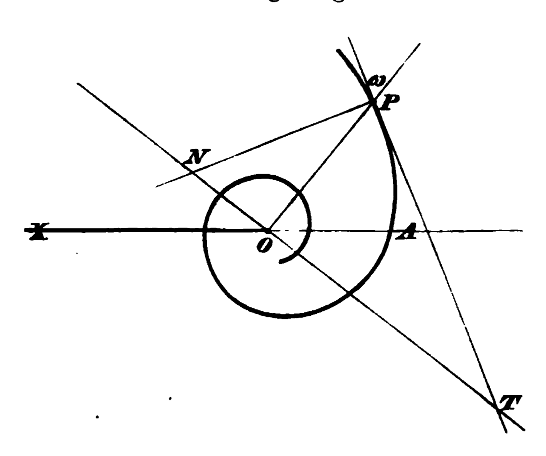
Construirt man in einer Figur die Archimedische und die hyperbolische Spirale, nämlich die beiden Curven $v_1 = a\varphi$ und $v_2 = \frac{a}{\varphi}$, so sind die zu demselben φ gehörigen Punkte v_1 und v_2 reciprok ($v_1 \cdot v_2 = a^2$) für den Kreis vom Radius a; und es gehen die Normalen aller Punkte, in welchen die erstgedachte Spirale von einem aus O gezogenen Strahl geschnitten wird, durch denselben Punkt, durch welchen die Tangenten der Schnittpunkte der zweiten Curve gehen.

III.

Die logarithmische Spirale

$$v = a \cdot e^{\alpha\varphi}, \quad (\alpha \gtrless 0)$$

schneidet die Verlängerung der Axe XO des Coordinatensystems u. a. in einem Punkte A so, dass OA = a ist, und umwindet den Punkt O so, dass sie sich ihm von hier aus unendlich nähert, nach der andern Seite hin aber unendlich entfernt. Was von Beidem bei wachsenden und was bei abnehmendem φ geschieht,



hängt vom Vorzeichen der Constanten α ab. Unsere Zeichnung setzt ein positives α voraus.

Man findet:

$$\frac{dv}{d\varphi} = a\alpha \cdot e^{\alpha\varphi},$$

$$\cot\omega = \frac{d \cdot l v}{d\varphi} = \alpha,$$

$$t = \frac{a}{\alpha} \cdot e^{\alpha\varphi} = \frac{v}{\alpha},$$

$$n = a\alpha \cdot e^{\alpha\varphi} = \alpha v.$$

Dies heisst in Worten:

Die Tangente der logarithmischen Spirale besitzt einen constanten Neigungswinkel gegen den Vector. Die Endpunkte der Subtangente und der Subnormale beschreiben ebenfalls logarithmische Spiralen.

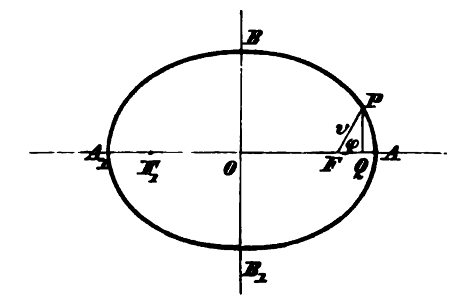
Für $\alpha = 0$ ist die Spirale ein Kreis.

IV.

Die focalen Polargleichungen der Kegelschnitte.

Schneidet man eine Rotationskegelfläche durch eine Ebene, welche nicht durch den Scheitel derselben hindurchgeht, so entsteht je nach der Neigung der Ebene gegen die Rotationsaxe eine Ellipse oder Parabel oder Hyperbel als Schnittfigur.

Dies ist der Grund, weshalb man die genannten drei Gattungen von Linien unter dem Collectivnamen „Kegelschnitte“ zusammenfasst.



Für die Ellipse haben wir in § 122 gefunden, dass der Vector $FP = v$ durch die Relation

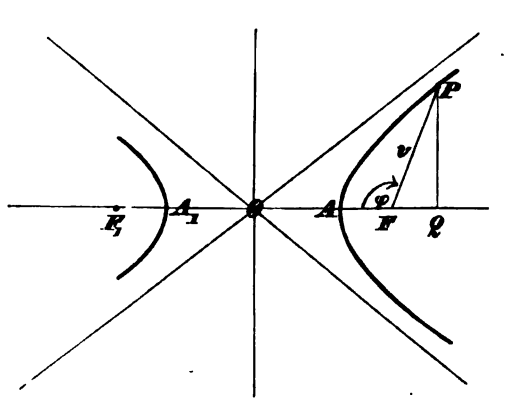
$$v = a - \frac{ex}{a}$$

ausgedrückt wird, wenn $OF = e$, $OQ = x$, $OA = a$ ist. Bezeichnet man $\angle AFP = \varphi$, so ist daher:

$$x = e + v\cos\varphi, \quad v = \frac{a^2 - e(e + v\cos\varphi)}{a},$$

woraus unter Berücksichtigung der Relation $a^2 - e^2 = b^2$ folgt:

$$v = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi}.$$



Für die Hyperbel ist nach § 122:

$$v = \frac{ex}{a} - a,$$

wobei $OF = e$, $OA = a$, $OQ = x$, $FP = v$ bedeutet.

Bezeichnet man nun wieder — wie bei der Ellipse — den $\angle AFP = \varphi$, so ist

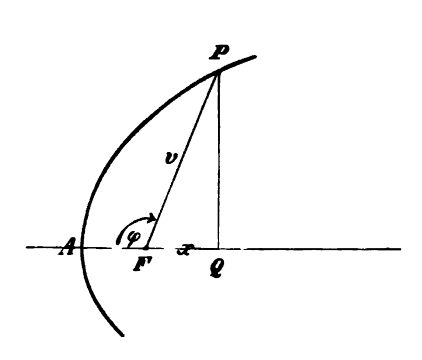
$$x = e + v\cos(\pi - \varphi) = e - v\cos\varphi,$$

mithin:

$$v = \frac{e(e - v\cos\varphi)}{a} - a,$$

woraus unter Berücksichtigung der Relation $e^2 - a^2 = b^2$ folgt:

$$v = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi}.$$



Für die Parabel ist nach § 121:

$$v = p + x,$$

wobei $FQ = x$ bedeutet.

Macht man also wieder $\angle AFP = \varphi$, so geht

$$x = v\cos(\pi - \varphi) = -v\cos\varphi$$

hervor, mithin:

$$v = p - v \cos \varphi,$$

$$v = \frac{p}{1 + \cos \varphi}.$$

Bei der Ellipse ist $e < a$, bei der Hyperbel aber ist $e > a$. Nach dieser Vorbereitung erhellt der

Lehrsatz.

Die focalen Polargleichungen aller Kegelschnitte lassen sich in der gemeinsamen Form

$$v = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

darstellen, indem v den Vector und φ denjenigen Winkel bedeutet, welchen derselbe mit der Richtung vom Brennpunkt zum nächsten Scheitel bildet.

Bei der **Parabel** ist die **„numerische Excentricität“** $\varepsilon = 1$ und p der Parameter. Bei der **Ellipse** ist $\varepsilon < 1$, bei der **Hyperbel** aber $\varepsilon > 1$; und bei diesen beiden Gattungen von Kegelschnitten haben der **„Parameter“** p und die **„numerische** Excentricität“ ε die Werthe

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a}.$$

Macht man $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so geht aus der Gleichung für v hervor:

$$v = p.$$

Mithin ist bei allen Kegelschnitten der Parameter p der Vector des senkrecht zur grossen Axe über dem Brennpunkt liegenden Curvenpunktes.

Die Differentiation der Polargleichung ergiebt für die Subnormale bei Polarcoordinaten:

$$n = \frac{dv}{d\varphi} = \frac{p \varepsilon \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = \frac{\varepsilon}{p} \cdot v^2 \sin \varphi$$

und für die Subtangente:

$$t = \frac{p}{\varepsilon \sin \varphi},$$

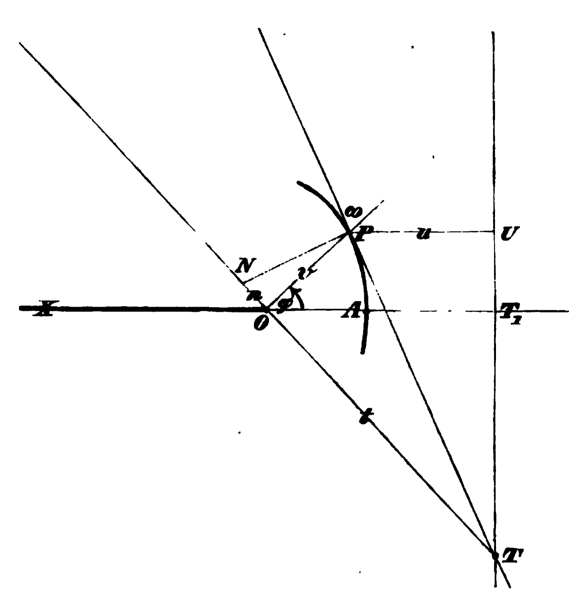
für den Richtungswinkel ω aber:

$$\cot \omega = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{\varepsilon}{p} \cdot v \sin \varphi = \frac{\varepsilon}{p} \cdot y.$$

Diese Formeln zeigen einige bemerkenswerthe Eigenschaften der Kegelschnitte an.

Fällt man nämlich vom Endpunkte T der Polarsubtangente OT eine Senkrechte TT_1 auf die Axe, so findet man:

$$OT_1 = t \cdot \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = t \cdot \sin \varphi = \frac{p}{\varepsilon}.$$



Daher liegen die Endpunkte T der focalen Polarsubtangenten sämmtlich auf einer Graden TT_1, der **„Directrix"**, welche auf der Axe OA des Kegelschnitts senkrecht steht und vom Brennpunkte O um $OT_1 = \frac{p}{\varepsilon}$ entfernt ist. — Man kann die Tangente in P so construiren, dass man im Brennpunkte O auf dem Vector OP eine Senkrechte errichtet und vom Schnittpunkt T derselben mit der Directrix die Grade TP zieht.

Fällt man vom Punkte P die Senkrechte $PU = u$ auf die Directrix, so ist

$$u = \frac{p}{\varepsilon} - v \cos \varphi, \quad \varepsilon u = p - \varepsilon v \cos \varphi = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = v.$$

ithin ist ε das constante Verhältnis der Abstände v d u der einzelnen Punkte P eines Kegelschnitts vom rennpunkte O und von der Directrix TT_1. — Sind zwei ennpunkte vorhanden (Ellipse und Hyperbel), so giebt es noch ne zweite Directrix.

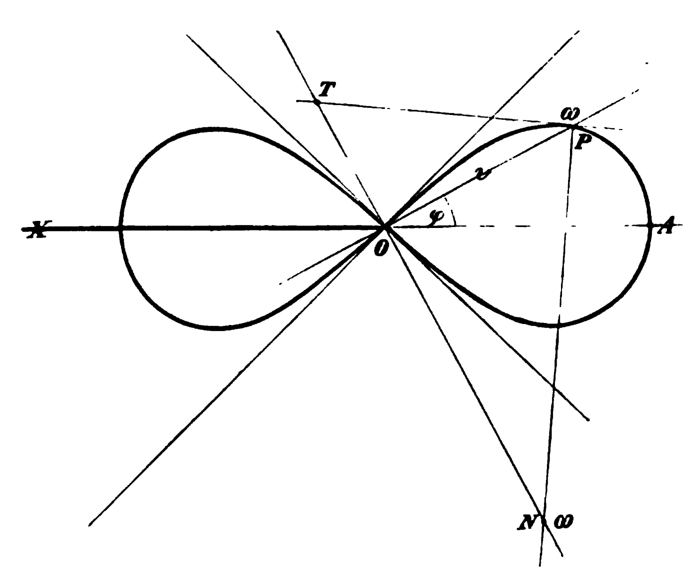
Die Formel für cot ω zeigt, dass $\angle OUT_1 = \omega$ ist.

V.

Die (Jacob Bernoullische) Lemniscate

$$v = a\sqrt{\cos 2\varphi},$$

eren Gestalt in der folgenden Figur angedeutet ist, ergiebt



zunächst:

$$\cot\omega = -\frac{d\cdot lv}{d\varphi} = -\operatorname{tng} 2\varphi,$$

woraus für den von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{4}$ reichenden Theil der Curve AO folgt:

$$\omega = 2\varphi + \frac{\pi}{2}\cdot$$

Wir brauchen nur diesen näher in Betracht zu ziehen, weil die ganze Figur gegen die Grade X O A und gegen die auf ihr in O senkrechte Grade symmetrisch ist.

Für die Subtangente und Subnormale ergiebt sich:

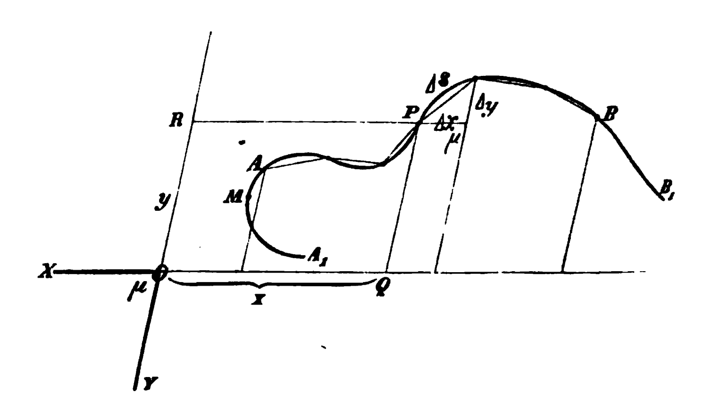
$$t = -v \cot 2\varphi, \quad n = -\frac{a^2 \sin 2\varphi}{v}.$$

Die Tangente bildet also mit der Subtangente einen Winkel PTO $= 2\varphi$, welcher doppelt so gross ist als der Richtungswinkel des Vectors, im Scheitelpunkte A steht die Tangente auf dem Vector senkrecht, und im Doppelpunkte O giebt es zwei rechtwinklig auf einander stehende Tangenten. Halbirt man den Winkel, welchen eine von ihnen mit der Axe bildet, so erhält man einen Curvenpunkt, für welchen Vector, Subtangente und Subnormale gleich lang sind. Auf dem dritten Theil der Winkelannäherung an die Axe berührt die Tangente beide Schleifen zugleich.

§ 124.

Rectification der Curven.

Schreibt man in eine Curve zwischen zwei Punkten A und B derselben eine Folge von Sehnen ein und dreht, indem jede Sehne



mit dem daraufsitzenden Curventheil starr verbunden bleibt, die einzelnen Sehnen um ihre gemeinsamen Punkte so weit herum, bis sie Verlängerungen von einander werden, so bedecken sie ins-



gesammt eine bestimmte Strecke A'B' auf einer Graden, deren Länge $=\Sigma\Delta s$ ist, wenn man die einzelnen Sehnen durch Δs bezeichnet.

Ist nun die Curve so beschaffen, dass die Länge von A'B' sich einem bestimmten Grenzwerthe nähert, wenn man die einzelnen Sehnen Δs irgendwie unendlich verkleinert (und dadurch ihre Anzahl unendlich vermehrt), so ist die Strecke $\lim\cdot A'B'$ die völlig bestimmte Grenzgestalt der aus Curventheilen zusammengesetzten Linie A'B', und $\lim\cdot\Sigma\Delta s$ die Länge, in welche sich der Curvenbogen AB „ausstrecken" oder „rectificiren" lässt.

Nach dem Begriff des Integrals ist $\lim\cdot\Sigma\Delta s=\int ds$. Mithin erhält man, indem die Abscissen der Punkte A und B durch a und b bezeichnet werden, für den Curvenbogen AB den Ausdruck:

$$AB=\int_a^b \frac{ds}{dx}\,dx,$$

welcher ausserdem noch voraussetzt, dass das Symbol $\frac{ds}{dx}$ einen Sinn habe.

Um AB vermittelst der Gleichung $f(x,y)=0$ der Curve zu berechnen, bleibt nur noch die Berechnung von $\frac{ds}{dx}$ aus derselben übrig.

Zu dem Zwecke greifen wir aus der Folge der Sehnen Δs irgend eine heraus und bezeichnen die Coordinaten ihres einen Endpunktes P durch x und y, diejenigen des andern daher durch $(x+\Delta x)$ und $(y+\Delta y)$. Analytisch wird Δs als Sehne der Curve dadurch charakterisirt, dass die beiden Gleichungen

$$f(x,y)=0,\quad f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=0$$

erfüllt sein müssen. Dieselben reichen aus, um y und Δy zu berechnen, wenn man den beiden Argumenten x und Δx beliebige

Werthe ertheilt hat. Dann kann man aber auch Δs berechnen, und zwar vermittelst des erweiterten Pythagoreischen Satzes aus demjenigen Dreieck, in welchem die beiden andern Seiten Δx und Δy das Supplement des Coordinatenwinkels μ oder den Winkel μ selbst einschliessen, je nachdem Δx und Δy gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Man findet in beiden Fällen:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + 2\,\Delta x\,\Delta y \cos\mu + (\Delta y)^2,$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + 2\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\cos\mu + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Nähert man Δx dem Grenzwerthe Null, so folgt hieraus:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + 2\,\frac{dy}{dx}\cos\mu + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2;$$

und es geht aus dem, was oben über die Berechnung von Δy gesagt ist, hervor, dass $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung der Curve $f(x, y) = 0$ bestimmt werden muss.

Im Verlauf der obigen Deduction hat s die Bedeutung der absoluten Länge des Bogens AB angenommen; denn wir fanden

$$AB = \lim \cdot \Sigma \Delta s = \int ds = s.$$

Anstatt diese Bedeutung stricte beizubehalten, ist es praktischer, einen Theil der Curve selbst als eine (gekrümmte) Abscissenaxe anzusehn, welche — von einer besonders zu verabredenden Seite herkommend und in einem ebenfalls besonders zu verabredenden Punkte endigend — um eine positive oder negative Länge s vergrössert werden muss, damit ein auf der Curve gesuchter Punkt gefunden werde. Unter dieser Voraussetzung soll s die **Bogenabscisse** des gesuchten Punktes heissen.

Die Formel, welche wir für $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$ erhalten haben, bleibt dabei offenbar in Kraft. Sie lässt sich nun auch so auffassen, dass sie das Grenzverhältnis der durch einander bedingten positiven oder negativen Vergrösserungen der Bogenabscisse s und der gradlinigen Abscisse x eines Punktes P angiebt; wobei $\frac{ds}{dx}$ selbst-

verständlich einen positiven oder negativen Werth erlangt, je nachdem s und x gleichzeitig wachsen und abnehmen oder sich in entgegengesetztem Sinne ändern.

Wählen wir in unserer Figur den Curventheil $A_1 A$ zur Bogenabscissenaxe mit dem Nullpunkt A, so erhält nicht nur s, sondern auch $\frac{ds}{dx}$, für alle Punkte P des Bogens AB einen positiven Werth — das Letztere, weil s und x hier überall gleichzeitig wachsen oder abnehmen. An solchen Stellen dagegen, wo x bei der stetigen Änderung von s ein Maximum oder Minimum wird — wie in M, ändert $\frac{ds}{dx}$ sein Vorzeichen, desgleichen häufig an andern Stellen, wo $\frac{ds}{dx}$ unendlich wird, abgesehen von solchen, an denen $\frac{ds}{dx}$ springt. (Vergl. Beispiel II.)

Achtet man nicht darauf, so erhält man beim Durchgang durch solche Stellen leicht falsche Resultate, weil die Formel

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + 2\frac{dy}{dx}\cos\mu + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

diesen Vorzeichenwechsel nicht selbst anzeigt.

Macht man anstatt x irgend eine Grösse t, von welcher x und y abhängen, zur unabhängigen Variabeln, so folgt nach bekannten Regeln der Differentialrechnung:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\cos\mu + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

oder:

$$s' = \sqrt{x'^2 + 2x'y'\cos\mu + y'^2}.$$

Wenden wir uns noch einmal an das Dreieck, dessen Seiten Δs, Δx und Δy sind, indem wir den Umstand ins Auge fassen, dass der Δy gegenüberliegende Winkel sich bei unendlicher Abnahme von Δx dem Grenzwerthe τ nähert, so überzeugen wir uns sofort von der Gültigkeit der Relation:

$$\frac{s'}{\sin\mu} = \frac{x'}{\sin(\mu - \tau)} = \frac{y'}{\sin\tau},$$

welche häufig Anwendung findet.

Den obigen Deductionen liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die Curve sich strecken, d. i.: sich durch eine Strecke messen lasse, Länge habe.

Man ist aber meistens in der Lage, dies erst erfahren zu wollen, anstatt es voraussetzen zu können. Wir suchen deshalb nach einem aus der Beschaffenheit der Curvengleichung $f(x, y) = 0$ leichter sichtbaren Kriterium, als dass das Urtheil über die Existenz des Grenzwerthes $\lim \cdot \Sigma \Delta s = s$ von dem Erfolge der meist umständlichen Berechnung abhängig bleibe.

In § 120 haben wir gesehn, dass die Existenz einer Tangente im Curvenpunkt (x, y) gleichbedeutend ist mit der Existenz eines bestimmten endlichen Werthes für mindestens eine von den Derivirten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dx}{dy}$; daher ist sie auch gleichbedeutend mit der Existenz eines bestimmten endlichen Werthes für mindestens eine von den Derivirten

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sin\mu}{\sin(\mu - \tau)}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{\sin\mu}{\sin\tau}.$$

Soll aber

$$\lim \cdot \Sigma \Delta s = \int \frac{ds}{dx}\, dx$$

gesetzt werden können, so muss $\frac{ds}{dx}$ in dem Integrationsintervall wenigstens generell einen endlich bestimmten Werth haben, und es existirt jedenfalls dann ein völlig bestimmter Grenzwerth $\lim \cdot \Sigma \Delta s = s$, wenn das fragliche Integral einen solchen Werth besitzt. Substituirt man in ihm für $\frac{ds}{dx}$ den zuletzt citirten Ausdruck, so gelangt man zu dem Urtheil, dass s gleichzeitig mit dem Integral $\int \frac{\sin\mu}{\sin(\mu - \tau)}\, dx$ einen bestimmten Werth habe — mithin auch gleichzeitig mit dem Integral $\int \frac{\sin\mu}{\sin\tau}\, dy$.

Wo das Differential des ersten Integrals unendlich wächst, nähert sich im Differential des gleichwerthigen zweiten Integrals $\frac{\sin\mu}{\sin\tau}$ dem Grenzwerthe ± 1, weil $\tau = \mu + k\pi$ wird; ebenso umgekehrt, wo $\sin\tau = 0$ wird. Die Stellen also, an denen die Tangente einer Coordinatenaxe parallel wird, sind an sich kein Hindernis für die Existenz des Grenzwerthes $\lim \cdot \Sigma\Delta s$, da stets das eine von den gleichwerthigen Integralen ein bestimmtes endliches Differential hat, wo dasjenige des andern unendlich wird.

Es ist aber sehr wohl möglich, dass der Richtungswinkel τ der Tangente innerhalb eines Theils des Integrationsintervalls eine unzählbare Anzahl mal von einem Werthe zu einem andern springt und dadurch solche Veränderungen des Differentials hervorbringt, dass das Integral bedeutungslos wird (§ 19). — Bei Curven, deren Gleichung in endlicher Form aus Elementarfunctionen zusammengesetzt ist, kommt dies nicht vor.

Wir resumiren:

Lehrsatz I.

Rectificirbar, d. h. messbar durch eine Strecke, sind alle Curvenbogen, welche in ihren einzelnen Punkten Tangenten haben, deren Richtungswinkel τ sich generell stetig ändern, wenn man die Abscisse x oder die Ordinate y des Berührungspunktes stetig ändert.

Zwischen τ, x, y und der Bogenabscisse s existiren die folgenden Relationen, in denen der Abkürzung wegen für eine beliebige unabhängige Variable t

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{ds}{dt} = s'$$

geschrieben ist und μ den Coordinatenwinkel bedeutet:

(1) $$s'^2 = x'^2 + 2x'y'\cos\mu + y'^2,$$

(2) $$\frac{s'}{\sin\mu} = \frac{x'}{\sin(\mu - \tau)} = \frac{y'}{\sin\tau};$$

(3) $$s = \int_{t_0}^{t} dt \sqrt{x'^2 + 2x'y' \cos\mu + y'^2},$$

(4) $$s = \sin\mu \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sin(\mu - \tau)}$$

$$= \sin\mu \cdot \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sin\tau}.$$

In den Formeln (2) und (4) bedeutet τ den Richtungswinkel desjenigen Theils der Tangente, welcher sich an die Verlängerung von s anschmiegt.

Ist das Coordinatensystem ein rechtwinkliges, so hat man $\sin\mu = 1$, $\cos\mu = 0$, $\sin(\mu - \tau) = \cos\tau$, und es ergeben sich zur Übertragung auf die Polarcoordinaten v und φ die Relationen

$$x = v\cos\varphi, \quad y = v\sin\varphi;$$

$$x' = v'\cos\varphi - v\sin\varphi \cdot \varphi', \quad y' = v'\sin\varphi + v\cos\varphi \cdot \varphi',$$

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 = v'^2 + v^2 \cdot \varphi'^2,$$

$$s' = \sqrt{v'^2 + v^2 \cdot \varphi'^2}.$$

Dieselbe Formel erhält man auch direct aus der zu Anfang von § 123 verzeichneten Figur, in welcher die Sehne $PP_1 = \Delta s$ ist. Denn aus derselben folgt:

$$(\Delta s)^2 = v^2 + (v + \Delta v)^2 - 2v(v + \Delta v)\cos\Delta\varphi$$

$$= (\Delta v)^2 + v(v + \Delta v)\left(2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2 + v(v + \Delta v) \cdot \left(\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}\right)^2,$$

in welchem Ausdruck nur noch die Grenzwerthe zu nehmen sind.

Aus derselben Figur ergiebt sich ferner:

$$\frac{\varDelta s}{\sin \varDelta \varphi} = \frac{v}{\sin O P_1 P}, \quad \frac{\varDelta s}{\varDelta \varphi} = \frac{v}{\sin O P_1 P} \cdot \frac{\sin \varDelta \varphi}{\varDelta \varphi}.$$

Nähert sich aber $\varDelta \varphi$ dem Grenzwerthe Null, so ist $\lim \cdot \frac{\sin \varDelta \varphi}{\varDelta \varphi} = 1$, $\lim \cdot O P_1 P = \omega$; mithin:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{v}{\sin \omega}, \quad s' = \frac{v}{\sin \omega} \cdot \varphi'.$$

Diese Resultate fassen wir zusammen in dem

Lehrsatz II.

Ist die Curve durch eine Gleichung zwischen den Polarcoordinaten v und φ gegeben, so existiren zwischen ihnen, dem Richtungswinkel ω der Tangente und der Bogenabscisse s die Gleichungen:

(5) $$s'^2 = v'^2 + v^2 \cdot \varphi'^2,$$

(6) $$s' = \frac{v}{\sin \omega} \cdot \varphi';$$

(7) $$s = \int_{t_0}^{t} dt \cdot \sqrt{v'^2 + v^2 \cdot \varphi'^2},$$

(8) $$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v}{\sin \omega} d\varphi.$$

s', v' und φ' bedeuten hierbei die Derivirten von s, v und φ nach einer beliebigen unabhängigen Variabeln t, welche für $s = 0$ und $\varphi = \varphi_0$ den Werth t_0 annimmt.

Beispiele.

I.

Für die Parabel

$y^2 = 2px$ folgt, wenn wir sie auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem beziehn,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}.$$

Mithin erhält man für den vom Scheitel aus gemessenen Parabelbogen zunächst die Formel:

$$s = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}.$$

Integrirt man partiell so, dass die Wurzel anfänglich als constant angesehn wird, und wendet schliesslich das Integrationsresultat § 95, (12) an, so resultirt:

$$\int dx \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} = x\sqrt{1 + \frac{p}{2x}} + \frac{1}{4} p \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x\left(x + \frac{1}{2}p\right)}},$$

$$s = \sqrt{x\left(x + \frac{1}{2}p\right)} + \frac{1}{4} p \cdot l \frac{\sqrt{x + \frac{1}{2}p} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \frac{1}{2}p} - \sqrt{x}}$$

$$= \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{1}{4} p \cdot l \frac{\sqrt{y^2 + p^2} + y}{\sqrt{y^2 + p^2} - y}.$$

Der vom Brennpunkt aus zum Endpunkte des rectificirten Bogens führende Vector v ist nach § 121, II $= x + \frac{1}{2}p$, weshalb s auch in der Form

$$s = \sqrt{vx} + \frac{1}{4} p \cdot l \frac{\sqrt{v} + \sqrt{x}}{\sqrt{v} - \sqrt{x}}$$

dargestellt werden kann. Und führt man den zwischen der Abscissenaxe und dem Endpunkte von s liegenden Theil $\mathfrak{N}$ der Normale ein, so erhält man:

$$s = \frac{\mathfrak{N}\,y}{2\,p} + \frac{1}{4}\,p \cdot l\,\frac{\mathfrak{N} + y}{\mathfrak{N} - y},$$

weil $\mathfrak{N} = \sqrt{y^2 + p^2}$ ist.

Die eleganteste Form nimmt s für die focalen Polarcoordinaten an. Anstatt in den obigen Gleichungen $x = \frac{1}{2}\,p - v\cos\varphi$, $y = v\sin\varphi$ zu setzen, kann man direct von der Polargleichung

$$v = \frac{p}{1 + \cos\varphi} = \frac{p}{2\cos\frac{\varphi}{2}^2}$$

ausgehn, den Richtungswinkel ω der Tangente aus der Relation

$$\cot\omega = \frac{d\,l\,v}{d\,\varphi} = -\operatorname{tng}\frac{\varphi}{2}, \quad \frac{\varphi}{2} = \omega - \frac{\pi}{2}$$

bestimmen und dann

$$v = \frac{p}{2\cos\frac{\varphi}{2}^2} = \frac{p}{2\sin\omega^2}, \quad d\,\varphi = 2\,d\,\omega$$

in (8) substituiren. Dies giebt:

$$s = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \frac{p}{\sin\omega^2}\,d\,\omega$$

oder vermittelst der Reductionsformeln des § 101:

$$s = -\frac{1}{2}\,p \cdot \frac{\cos\omega}{\sin\omega^2} + \frac{1}{2}\,p \cdot l\,\operatorname{tng}\frac{\omega}{2}$$

$$= +\frac{1}{2}\,p \cdot \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}^2} + \frac{1}{2}\,p \cdot l\,\operatorname{tng}\frac{\pi + \varphi}{4}.$$

II.

Für die gemeine Cycloide

$$x = r(\theta - \sin\theta), \qquad y = r(1 - \cos\theta)$$

ist in § 122, V bereits für den Wälzungswinkel θ als unabhängige Variable

$$x' = 2\,r \sin\frac{\theta}{2}^{2}, \qquad y' = 2\,r \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

angegeben. Aus (1) folgt daher, weil $\mu = \frac{\pi}{2}$ ist:

$$s'^{2} = x'^{2} + y'^{2} = 4r^{2}\sin\frac{\theta}{2}^{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}^{2} + \cos\frac{\theta}{2}^{2}\right) = 4r^{2}\sin\frac{\theta}{2}^{2}.$$

Soll die Bogenabscisse s für $\theta = 0$ verschwinden und zugleich mit θ wachsen, so muss daher

$$s' = \frac{ds}{d\theta} = 2r\sin\frac{\theta}{2}$$

genommen werden, so lange $\sin\frac{\theta}{2}$ positiv ist, d. h. so lange θ den Werth 2π nicht überschreitet, s also nicht weiter, als bis zur nächsten Spitze der Cycloide reicht. Dann ergiebt die Integration:

$$s = 2r \cdot \int_0^{\theta} \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4r\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 8r\sin\frac{\theta}{4}^{2}.$$

Für den Cycloidenbogen von einer Spitze bis zur nächsten erhält man daher den Werth: 8r.

Für einen längeren Cycloidenbogen wird die letzte Formel falsch, weil $\sin\frac{\theta}{2}$ einen negativen Werth erlangt, was die Abnahme von s bei wachsendem θ anzeigt: man müsste für $\theta > 2\pi$ setzen $s' = -2r\sin\frac{\theta}{2}$. — Unsere nur für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ geltende Formel würde z. B. für $\theta = 4\pi$ den unsinnigen Werth $s = 0$ ergeben.

III.

Für die Archimedische Spirale

$$v = a\varphi$$

erhält man aus (7) oder (8) für den Bogen OP in § 123, I:

$$s = a \cdot \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1+\varphi^2} = \frac{1}{4} a \cdot \left\{ 2\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + l\frac{\sqrt{1+\varphi^2}+\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}-\varphi} \right\}.$$

Bezeichnet man das Stück PN der Normale durch $\mathfrak{N}$, so ist demnach:

$$4as = \mathfrak{N} \cdot v + a \cdot l\frac{\mathfrak{N}+v}{\mathfrak{N}-v}.$$

IV.

Für die hyperbolische Spirale

$$v = \frac{a}{\varphi}$$

ergiebt sich:

$$s = a\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varphi^2} \cdot \sqrt{1+\varphi^2} = a\left\{ -\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi} + \frac{\sqrt{1+\varphi_0^2}}{\varphi_0} + l\frac{\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi_0+\sqrt{1+\varphi_0^2}} \right\}.$$

Die Länge der Curve von irgend einem Punkte P aus wächst also nicht bloss nach der Seite hin unendlich, auf welcher sie sich von O entfernt (Figur zu § 123, II), sondern auch nach der entgegengesetzten Seite hin, auf welcher sie sich dem Punkte O asymptotisch nähert.

V.

Für die logarithmische Spirale

$$v = a e^{\alpha\varphi}$$

folgt, wenn man den Nullpunkt der Bogenabscisse s in dem Punkte A (§ 123, III) annimmt:

$$s = a\sqrt{1+\alpha^2} \cdot \int_0^{\varphi} e^{\alpha\varphi} d\varphi = a \cdot \sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}} \cdot \left\{ e^{\alpha\varphi} - 1 \right\}.$$

Mithin nähert sich die Länge des den Punkt O asymptotisch umwindenden Curventheils, von A aus gemessen, einer Strecke von der Länge $a \cdot \sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}}$ als Grenzwerth.

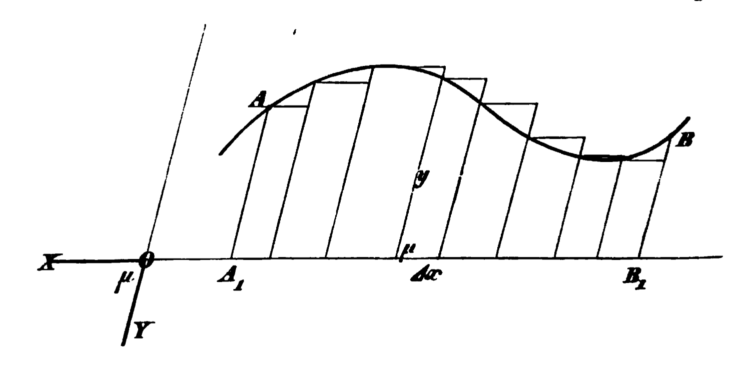
Anmerkung.

Die Längen von Ellipsen- und Hyperbelbogen lassen sich nicht in geschlossener Form durch Elementarfunctionen ausdrücken, jedoch auf mannichfache Weise durch schnell convergirende Reihen. Sie sind „elliptische Integrale“.

§ 125.

Quadratur der krummlinig begrenzten Felder.

Es ist bereits in § 18 gezeigt worden, dass bei einem rechtwinkligen Coordinatensystem das ebene Feld $ABB_1A_1 = \int_a^b y\,dx$



ist, falls man unter a und b die Abscissen der Punkte A und B versteht.

Setzen wir jetzt ein schiefwinkliges System mit dem Coordinatenwinkel μ voraus, zerschneiden das Feld $ABB_1A_1 = \mathfrak{F}$ in Streifen, welche der Ordinatenaxe parallel sind, und berechnen austatt derselben die Parallelogramme mit den Seiten y und Δx, so ist deren Summe

$$= \Sigma(y \cdot \Delta x \cdot \sin\mu) = \sin\mu \cdot \Sigma y \Delta x.$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{F} = \sin\mu \cdot \int_a^b y\,dx,$$

vorausgesetzt, dass dieses Integral einen bestimmten Werth hat.

Die Besonderheiten, welche hierbei auftreten können, sind bereits in § 18 besprochen worden. Man erhält den

Lehrsatz I.

Bedeutet μ den Winkel desjenigen Coordinatensystems, auf welches die Curve $y = f(x)$ bezogen ist, so wird der zur Ordinatenaxe parallele Streifen der Ebene zwischen der Curve und der Abscissenaxe durch den Ausdruck

$$(1) \qquad \mathfrak{F} = \sin\mu \cdot \int_a^x y\,dx = \sin\mu \cdot \int_a^x f(x)\,dx$$

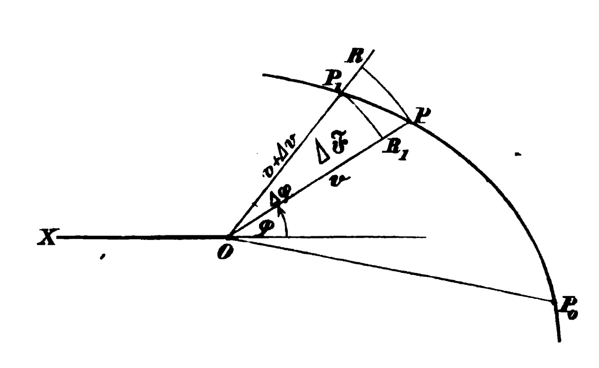
von $x = a$ aus gemessen. Die Elemente dieses Integrals bewahren das positive oder das negative Vorzeichen, so lange es das Product $y\,dx$ thut.[1]) Seine Derivirte ist:

$$(2) \qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dx} = y \sin\mu.$$

Eines völlig bestimmten Werthes von $\mathfrak{F}$ darf man sich versichert halten, so weit die Curve im Endlichen verläuft und in keinem Streifen von messbarer Breite in lauter einzelne Punkte aufgelöst ist oder unzählbar viele Maxima und Minima besitzt.

[1]) Es heben sich also in $\mathfrak{F}$ diejenigen Theile auf, welche auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe liegen.

Hat man Polarcoordinaten zu Grunde gelegt, so ist es durch deren Natur angezeigt, dasjenige Feld $\mathfrak{F}$ zu messen, welches vom Vector v bei der stetigen Veränderung des Richtungswinkels φ bestrichen wird:[1] und zwar wollen wir $\mathfrak{F}$ als positive oder negative Grösse behandeln, je nachdem φ dabei wächst oder abnimmt.



Lässt man nun φ um $\Delta\varphi = \angle\, POP_1$ wachsen, so ist der Zuwachs $\Delta\mathfrak{F} =$ Fläche POP_1 ersichtlicher Weise ein Mittelwerth zwischen den Kreisausschnitten $POR = \frac{1}{2} v^2 \Delta\varphi$ und $P_1OR_1 = \frac{1}{2}(v + \Delta v)^2 \Delta\varphi$, falls der Vector zwischen den Lagen OP und OP_1 kein von ihnen verschiedenes Maximum oder Minimum hat. Die Werthe $\frac{1}{2} v^2$ und $\frac{1}{2}(v + \Delta v)^2$, zwischen denen $\frac{\Delta\mathfrak{F}}{\Delta\varphi}$ liegt, ergeben aber bei stetig variirenden v einerlei Grenzwerth $\frac{1}{2} v^2$ für unendlich abnehmende $\Delta\varphi$.

Hieraus folgt der

Lehrsatz II.

Bezeichnet man bei der Anwendung von Polarcoordinaten das vom Vector v rechtläufig bestrichene Flächenstück durch $\mathfrak{F}$, so ist

$$\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} = \frac{1}{2} v^2 \tag{3}$$

---

[1]) Oben wurde das von der laufenden Ordinate bestrichene Feld berechnet.

überall, wo v sich zugleich mit dem Richtungswinkel φ stetig ändert und bei einer hinreichend kleinen Veränderung von φ nur eine zählbare Anzahl mal im Wachsen und Abnehmen wechselt.

Sind diese Bedingungen von φ_0 bis φ erfüllt, und wird $\mathfrak{F}$ von dem zu φ_0 gehörenden Vector aus gemessen, so ist

$$(4) \qquad \mathfrak{F} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi} v^2 d\varphi.$$

Anmerkung.

Die obigen Formeln setzen nicht nothwendig die Existenz einer Tangente an die Curve voraus, sie gelten aber sicher für alle Curvenbogen, welche überall eine Tangente haben, da es nach § 120 keine Tangente giebt, wo unsere Formeln (2) und (3) ihre Gültigkeit verlieren.

Beispiele.

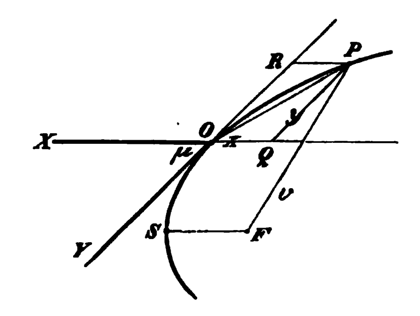
I.

Bei der Parabel $y^2 = 2px$

erhält man für das von der laufenden Ordinate bestrichene Flächenstück OPQ nach (1):

$$\mathfrak{F} = \sin\mu \cdot \int_0^x \sqrt{2px}\, dx = \sin\mu \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2px^3} = \frac{2}{3} xy \sin\mu.$$

Mithin zerschneidet der Parabelbogen OP das Feld des Parallelogramms OQPR im Verhältnis 2:1. — Zwischen der Sehne OP und dem Bogen OP liegt der dritte Theil des Dreiecksfeldes OQP.



Für das von dem Brennpunktsvector aus der Scheitel-

lage F S bestrichene Feld ergiebt die Relation (4) den Werth:

$$\frac{1}{2}\int_0^\varphi v^2 d\varphi = \frac{1}{8} p^2 \cdot \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}^4} = \frac{1}{4} p^2 \cdot \left(\operatorname{tng}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tng}\frac{\varphi}{2}^3\right).$$

II.

Aus der Brennpunktsgleichung der Ellipse und der Hyperbel $v = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$

folgt für das vom Vector aus der Scheitellage bestrichene Feld

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2} p^2 \cdot \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon\cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{p^2}{2(1-\varepsilon^2)} \cdot \left[-\frac{\varepsilon\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} + \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \operatorname{arc\,tng}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tng}\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{p^2}{2(\varepsilon^2-1)} \cdot \left[+\frac{\varepsilon\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \cdot l\,\frac{\varepsilon + \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{\varepsilon^2-1}}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right]$$

— Vergl. für die Integration § 100, (4).

Der erste Ausdruck giebt $\mathfrak{F}$ für die Ellipse in reeller Form weil bei ihr $\varepsilon < 1$ ist, der zweite dagegen für die Hyperbel, da deren $\varepsilon > 1$ ist.

Macht man bei der Ellipse $\varphi = \pi$, so erhält man für das halbe Ellipsenfeld

$$\mathfrak{F} = \frac{p^2}{2(1-\varepsilon^2)} \cdot \left[-0 + \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right] = \frac{\pi p^2}{2\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^3} = \frac{1}{2}\pi a b,$$

das Letztere, weil $\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{b}{a}$, $p = \frac{b^2}{a}$ ist.

Daher ist das ganze Ellipsenfeld $= \pi a b$.

---

[1]) Der Factor vor der Klammer ist $= \frac{1}{2} b^2$ sowohl bei der Ellipse wie bei der Hyperbel.

III.

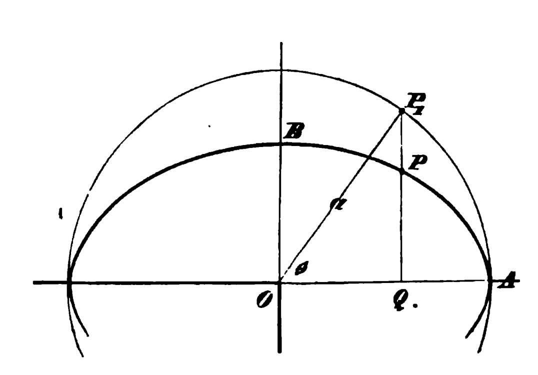
Aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

wollen wir das Flächenstück APQ berechnen. Nach (1) hat es den Werth

$$\mathfrak{F}=\int_x^a y\,dx=\frac{b}{a}\cdot\int_x^a dx\sqrt{a^2-x^2}.$$

Schlagen wir mit dem Radius $OA=a$ um O einen Kreis und bezeichnen den Punkt, in welchem dieser von QP geschnitten wird, mit P_1, so ist — ebenfalls nach (1) — das Flächenstück



$$AP_1Q=\int_x^a dx\sqrt{a^2-x^2}.$$

Daher gilt für die entsprechenden Stücke des Ellipsen- und des Kreisfeldes die Proportion:

$$AQP : AQP_1 = b : a.$$

Zum Zweck der numerischen Auswerthung bezeichnen wir $\angle AOP_1 = \theta$. Dadurch wird

$$x=a\cos\theta,\quad \sqrt{a^2-x^2}=a\sin\theta,\quad dx=-a\sin\theta\,d\theta;$$

$$\int_x^a dx\sqrt{a^2-x^2}=a^2\int_0^\theta \sin\theta^2 d\theta=\frac{1}{2}a^2\cdot(\theta-\sin\theta\cdot\cos\theta);$$

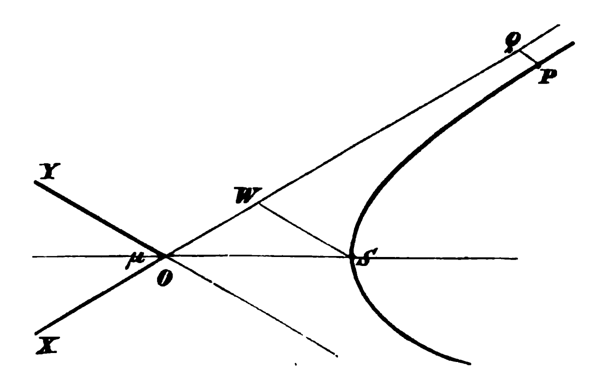
mithin:

$$\mathfrak{F}=\frac{1}{2}ab\cdot(\theta-\sin\theta\cdot\cos\theta).$$

IV.

Aus der Asymptotengleichung der Hyperbel

$$xy = \left(\frac{e}{2}\right)^2$$



(vergl. § 122, IV), in welcher e die Excentricität bedeutet, folgt, wenn in der Figur $OW = \frac{e}{2}$ die Abscisse des Scheitels S ist, und $\angle XOY = \mu$ gesetzt wird, nach (1) für das Flächenstück SWQP der Ausdruck:

$$SWQP = \sin\mu \cdot \int_{\frac{e}{2}}^{x} y\,dx = \frac{1}{4} e^2 \sin\mu \int_{\frac{e}{2}}^{x} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{4} e^2 \sin\mu \cdot l\,\frac{2x}{e}.$$

Nimmt man daher bei einer rechtwinkligen Hyperbel die halbe Excentricität OW zur Längeneinheit, so ist bei ihr

$$SWQP = l\,x.$$

— Hieraus hat man Veranlassung genommen, die natürlichen Logarithmen auch „hyperbolische“ zu nennen.

V.

Bei der gemeinen Cycloide

$$x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta)$$

ergiebt sich für das von der laufenden Ordinate bestrichene Flächenstück OQP (vgl. die Figur zu § 122, V) nach (1):

$$\mathfrak{F} = r^2 \cdot \int_0^\theta (1 - \cos\theta)^2 d\theta = r^2 \cdot \int_0^\theta \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= r^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right).$$

Das Feld zwischen der Basis und dem Cycloidenbogen von einer Spitze bis zur nächsten beträgt also $3\pi r^2$, d. i. das Dreifache des vom Wälzungskreise begrenzten Feldes.

§ 126.

Concavität und Convexität der Curven. Wendepunkte.

Unter einer krummen Linie versteht man bekanntlich eine solche, welche keine graden Theile enthält.

Die Tangente der graden Linie — d. i. die grade Linie selbst — bewahrt längs ihres ganzen Verlaufs ihren Richtungswinkel τ; mithin muss eine krumme Linie bei ihrer Verlängerung denselben fortwährend ändern. Und da durch jeden Punkt nach § 12 nur eine einzige Linie gelegt werden kann, deren τ von dem grade vorhandenen Werthe aus einem eindeutig bestimmten Änderungsgesetze folgt, so können krummen Linien, welche verschiedenen Änderungsgesetzen von τ folgen und in einem Punkte einerlei Tangente haben, sich in dessen Nachbarschaft nicht decken.

Wir werden trotzdem in einem der nächsten §§ den Begriff „gleich krumm“ für verschiedene krumme Linien aufstellen.

Jetzt kommt es uns zunächst darauf an, handliche Kriterien dafür aufzufinden, nach welcher Seite hin die Curve gekrümmt ist.

Wir schliessen von vorne herein diejenigen Curven von unserer Betrachtung aus, bei welchen der Richtungswinkel der Tangente sich nicht nach den Coordinaten differentiiren lässt. Wegen der Formeln

$$\cot \tau = \cot \mu + \frac{1}{\sin \mu} \cdot \frac{d\,x}{d\,y}, \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; § \; 120, \; (1).$$

$$\cot \omega = \frac{d\,l\,v}{d\,\varphi} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; § \; 123, \; (1).$$

heisst dies m. a. W.: Wir schliessen diejenigen Curven aus, bei welchen generell keine Derivirte zweiter Ordnung der einen Coordinate nach der andern vorhanden ist.

Indem wir dies in Zukunft als selbstverständlich voraussetzen, stellen wir natürlich nicht die leicht zu widerlegende Behauptung auf, alle möglichen Curven zu umfassen. Für die elementaren Zwecke genügt diese Einschränkung.

Zunächst entwickeln wir einige Formeln, welche bei der Behandlung der Curven vermittelst recht- oder schiefwinkliger Coordinaten mit dem beliebigen Coordinatenwinkel μ wichtig sind. Wo $\mu = \frac{\pi}{2}$ ist, wird die Substitution nirgends eine Schwierigkeit bereiten.

Differentiirt man nach einer beliebigen unabhängigen Variabeln t und bezeichnet der besseren Übersicht wegen die so gewonnenen Derivirten durch Accente, so folgt aus der ersten Form der Gleichung (1) des § 120, nämlich aus

$$\frac{\sin \tau}{\sin(\mu - \tau)} = \frac{y'}{x'},$$

nach und nach:

$$l \sin \tau - l \sin(\mu - \tau) = l y' - l x',$$

$$\left\{\cot \tau + \cot(\mu - \tau)\right\} \cdot \tau' = \frac{y''}{y'} - \frac{x''}{x'},$$

$$\frac{\sin \mu}{\sin(\mu - \tau) \sin \tau} \cdot \tau' = \frac{x' y'' - y' x''}{x' y'}.$$

Substituirt man hierin aus § 124, (2) die Werthe

$$\sin(\mu - \tau) = \frac{x'}{s'} \sin \mu, \quad \sin \tau = \frac{y'}{s'} \sin \mu,$$

so folgt:

(1)
$$\tau' = \frac{x'y'' - y'x''}{s'^2} \cdot \sin \mu.$$

Aus dieser Gleichung erkennt man sofort, dass τ' stets dasselbe Vorzeichen besitzt, wie die Grösse $(x'y'' - y'x'')$.

Macht man x oder y zur unabhängigen Variabeln, so ist im ersten Falle $x' = 1$, $x'' = 0$ und im zweiten Falle $y' = 1$, $y'' = 0$; mithin:

(2)
$$\frac{d\tau}{dx} = + \frac{d^2y}{dx^2} \sin \mu : \left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

(3)
$$\frac{d\tau}{dy} = - \frac{d^2x}{dy^2} \sin \mu : \left(\frac{ds}{dy}\right)^2.$$

Macht man s zur unabhängigen Variabeln, so wird $s' = 1$; mithin:

(4)
$$\frac{d\tau}{ds} = \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2}\right) \cdot \sin \mu.$$

Vermittelst der Gleichung § 124, (1)

$$s'^2 = x'^2 + 2x'y' \cos \mu + y'^2$$

und der aus ihr folgenden

$$s's'' = x'x'' + (x'y'' + y'x'') \cos \mu + y'y''$$

kann man in den Ausdruck für τ' anstatt der einen Coordinate überall s einführen. Man erhält, wenn man zunächst bloss die letzte Gleichung benutzt:

(5)
$$\tau' = \frac{x's'' - s'x''}{s'(x' \cos \mu + y')} \cdot \sin \mu = \frac{s'y'' - y's''}{s'(x' + y' \cos \mu)} \cdot \sin \mu.$$

In dem ersten von diesen beiden Ausdrücken muss man, um y ganz fortzuschaffen, noch

$$y' = -x' \cos\mu \pm \sqrt{s'^2 - x'^2 \sin\mu^2}$$

setzen und im zweiten den analogen Ausdruck für x', so dass die völlig entwickelte Formel lautet:

$$\tau' = \pm \frac{x's'' - s'x''}{s'\sqrt{s'^2 - x'^2 \sin\mu^2}} \sin\mu = \pm \frac{y's'' - s'y''}{s'\sqrt{s'^2 - y'^2 \sin\mu^2}} \sin\mu.$$

Daher compliciren sich die Formeln nur, zumal da man noch über die Vorzeichen zu entscheiden hat.

Nimmt man aber im Fall eines rechtwinkligen Coordinatensystems s zur unabhängigen Variabeln, so geht (5) in die zuweilen nützliche Form

(6) $$\frac{d\tau}{ds} = -\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{dy}{ds} = +\frac{d^2y}{ds^2} : \frac{dx}{ds}$$

über.

In dem speciellen Fall, in welchem der Coordinatenwinkel $\mu = \frac{\pi}{2}$ ist, gewinnt man die Differentiationsresultate

(7) $$\tau' = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2},$$

(8) $$\frac{d\tau}{dx} = +\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

(9) $$\frac{d\tau}{dy} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

bequemer aus der einfacheren Ausgangsgleichung

$$\operatorname{tng} \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'},$$

da man dann in der Derivirten der linken Seite, nämlich in

$$(1 + \operatorname{tng} \tau^2) \cdot \tau',$$

für tng τ nur seinen so eben geschriebenen Ausdruck zu substituiren braucht, um die Relationen (7), (8), (9) sofort aufzustellen.

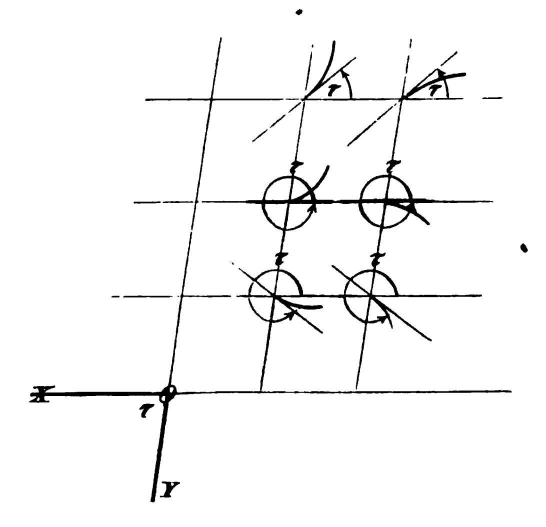
Nach diesen analytischen Vorbereitungen wenden wir uns zur Betrachtung des Zusammenhanges der verschiedenen Werthe von τ' mit der Gestalt der Curve, wobei wir nach einander x, y und s als unabhängige Variable ansehn wollen.

I. Es werde x als unabhängige Variable angesehn.

Ist die Tangente der Curve im Punkte P nicht mit der Ordinatenaxe parallel, so besitzt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \tau}{\sin(\mu - \tau)}$$

— weil dann $\sin(\mu - \tau)$ nicht verschwindet — einen bestimmten endlichen Werth, und demnach thut dies wegen der vorausgesetzten Differentiirbarkeit von $\frac{dy}{dx}$ auch $\frac{d^2y}{dx^2}$. Daher ist dann nach (2) $\frac{d\tau}{dx}$ ein bestimmter Werth mit gleichem Vorzeichen, wie $\frac{d^2y}{dx^2}$. Nun bedeutet aber nach dem Begriff der Derivirten ein positiver Werth von $\frac{d\tau}{dx}$ dieses, dass τ gleichzeitig mit x wächst, d. i., dass die Tangente bei wachsendem x eine rechtläufige Drehung erfährt, oder — wie es die in nebenstehender Figur unter einander verzeichneten Hauptfälle vor Augen



führen — dass die Ordinaten des dem Berührungspunkte benachbarten Curventheiles grösser sind als die Ordinaten der Tangente für dieselbe Abscisse. Hat dagegen $\frac{d\tau}{dx}$ einen negativen Werth, so nimmt τ bei wachsendem x ab, die Tangente dreht sich rückläufig und die Curve besitzt kleinere Ordinaten als die Tangente.

Dies führt zu dem

Lehrsatz I.

Derjenige Theil einer Curve $f(x,y)=0$, welcher in der Nähe ihres Berührungspunktes mit einer Tangente einen endlichen Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ ergiebt, liegt gegen die Tangente auf der Seite der wachsenden oder abnehmenden y, je nachdem $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ oder <0 ist.

Diejenige Seite der Curve, welche sie ihrer Tangente in der Nähe des Berührungspunktes zuwendet, heisst ihre convexe Seite, die entgegengesetzte Seite die concave.

Ist die Ordinate des Berührungspunktes positiv, wie in der Figur, so liegt die Abscissenaxe gegen die Tangente auf der Seite der abnehmenden Ordinaten; umgekehrt aber, wenn die Ordinate negativ ist.

Man kann daher den obigen Satz, indem man die Schnittpunkte der Curve mit der Abscissenaxe ausser Acht lässt, auch so aussprechen:

Ist das Product $y\frac{d^2y}{dx^2}\gtrless 0$, so wendet die Curve der Abscissenaxe (der Axe der x) ihre convexe oder concave Seite zu, je nachdem in der letzten Ungleichung das obere oder untere Zeichen gilt.

Die hierdurch dargebotene Anschauung ist jedoch weniger einfach, weil sie, um völlig klar zu werden, doch wieder in die Fassung des obigen Lehrsatzes zurückübersetzt werden muss.

Zusatz.

Ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ in einem Punkte der Curve stetig und von Null verschieden, so sind die **beiderseitig** benachbarten Curventheile nach einerlei Seite gekrümmt, und zwar nach der Seite der wachsenden y oder nach der entgegengesetzten Seite von der Tangente abgewandt, je nachdem der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv oder negativ ist.

— Denn unter der obigen Voraussetzung bewahrt $\frac{d^2y}{dx^2}$ bei hinreichend kleinen Veränderungen von x sein Vorzeichen.

Definition.

Ein Punkt, in welchem die beiden zusammenstossenden Theile einer Curve die entgegengesetzten Richtungen einer einzigen Graden berühren, von dem aus sie aber auf verschiedenen Seiten der Graden liegen, heisst ein **Wendepunkt** der Curve.

Lehrsatz II.

Wo $\frac{d^2y}{dx^2}$ sein Vorzeichen ändert, liegt ein Wendepunkt der Curve.

Es ist dies eine unmittelbare Folgerung aus dem Lehrsatz I, weil es nur von dem Vorzeichen der Grösse $\frac{d^2y}{dx^2}$ abhängt, auf welcher Seite der Tangente der Curventheil verläuft.

Ob der Vorzeichenwechsel von $\frac{d^2y}{dx^2}$ bei stetiger oder unstetiger Veränderung des Werthes zu Stande kommt, thut nichts zur Sache.

Jeder Vorzeichenwechsel von $\frac{d^2y}{dx^2}$ bedingt aber nach § 3 ein Maximum oder Minimum von $\frac{dy}{dx}$.

Mithin kann man den letzten Satz auch so aussprechen:

Lehrsatz III.

Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve, so liegen überall dort Wendepunkte derselben, wo die Function $f'(x)$ einen Maximal- oder Minimalwerth besitzt.

Aus der Anwendung des in § 115 entwickelten Lehrsatzes auf die Function $f'(x)$ an Stelle der dort abgehandelten Function $f(x)$ erhält man daher den

Lehrsatz IV.

Verschwindet $f''(x)$ für $x = a$, und besitzt in der Reihe der höheren Derivirten

$$f'''(x),\ f^{IV}(x),\ f^{V}(x),\ \ldots$$

diejenige von niedrigster Ordnung, welche dies nicht thut, eine **ungrade** Ordnungszahl, und ausserdem einen endlichen Werth mit bestimmt ausgesprochenem Vorzeichen, so liegt an der Stelle $x = a$ ein Wendepunkt der Curve $y = f(x)$.

II. Es werde y als unabhängige Variable betrachtet.

Da die Unterscheidung von Abscisse und Ordinate auf keiner wesentlichen begrifflichen Verschiedenheit beruht, so hat man die in I gewonnenen Resultate nur mutatis mutandis zu übertragen. Die Nothwendigkeit, bei der Aufsuchung der Wendepunkte x mit y zu vertauschen, liegt nur da vor, wo die Tangente der Ordinatenaxe parallel läuft, d. i. dort, wo $\frac{dy}{dx}$ unendlich wird.

III. Es werde die Bogenabscisse s als unabhängige Variable angesehn.

Das Vorzeichen von $\frac{d\tau}{ds}$ lässt sich aus der Formel (4), nämlich aus

$$\frac{d\tau}{ds} = \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2}\right) \cdot \sin\mu,$$

bestimmen.

Da ein positiver oder negativer Werth von $\frac{d\tau}{ds}$ anzeigt, dass τ bei wachsendem s wächst oder abnimmt, so ergiebt sich sofort der

Lehrsatz V.

Man gelangt von der sich an die wachsende Curve anschmiegenden Richtung der Tangente um den Berührungspunkt herum zur Curve in rechtläufiger oder in rückläufiger Bewegung, je nachdem $\frac{d\tau}{ds}$ positiv oder negativ ist. Ändert $\frac{d\tau}{ds}$ beim Durchgange durch den Berührungspunkt sein Vorzeichen, so ist der Berührungspunkt ein Wendepunkt der Curve.

Anmerkung.

Aus der Gleichung $x\cos\psi + y\sin\psi - p = 0$ für die Grade (§ 121, (12)) erhält man (wegen des dabei als rechtwinklig vorausgesetzten Coordinatensystems) beim Übergange zu Polarcoordinaten:

$$x = v\cos\varphi,\quad y = v\sin\varphi,\quad v(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) - p = 0,$$

$$v = \frac{p}{\cos(\varphi - \psi)}.$$

Aus der letzten Gleichung, der „Polargleichung der Graden", folgt für den Richtungswinkel ω der Graden gegen den Vector nach § 123, (1):

$$\cot\omega = \frac{d\,l v}{d\varphi} = \operatorname{tng}(\varphi - \psi),\quad \frac{d\omega}{d\varphi} = -1.$$

Man könnte also bei Polarcoordinaten die Abweichung einer Curve von ihrer Tangente danach beurtheilen, in welcher Weise sich das $\frac{d\omega}{d\varphi}$ der Curve von (-1) unterscheidet. Die Abweichung der Curve von einer logarithmischen Spirale würde, weil bei der letzteren $\frac{d\omega}{d\varphi} = 0$ ist, daraus erkannt werden, ob bei ihr $\frac{d\omega}{d\varphi} > 0$ oder < 0 ist.

Die eingehendere Besprechung dieser und ähnlicher Fragen können wir uns ersparen, weil die Resultate generell ein zu geringes Gewicht haben.

Beispiele.

I.

Aus der Gleichung $y^2 = 2px$ der Parabel folgt $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}$. Da demnach das Product $y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{p}{y}\right)^2$ für jeden Werth von y negativ ist, so wendet die Parabel der Abscissenaxe überall die concave Seite zu.

Ferner ist bei ihr $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{p} > 0$. Dies hat im Wesentlichen dieselbe Bedeutung, weil daraus folgt, dass die Parabel sich überall nach der Richtung der wachsenden x hin krümmt.

II.

Die Curve $y = x \sin l x$

ergiebt:

$$\frac{dy}{dx} = \cos l x + \sin l x = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - l x\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos l x - \sin l x}{x} = \frac{\sqrt{2}}{x} \sin\left(\frac{\pi}{4} - l x\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2}{x^2} \cos l x.$$

Sie besitzt Wendepunkte überall, wo $\sin\left(\frac{\pi}{4} - l x\right) = 0$, d. i. überall, wo $\frac{\pi}{4} - l x = -k\pi$, $x = \sqrt[4]{e^{\pi}} \cdot (e^{\pi})^k$ bei einem ganzen k ist; denn für diese Werthe von x verschwindet $\frac{d^2y}{dx^2}$, aber nicht $\frac{d^3y}{dx^3}$ — vergl. Lehrs. IV.

Die Abscissen der Wendepunkte bilden demnach eine geometrische Reihe mit dem Quotienten e^{π}; desgleichen auch die absoluten Werthe der Ordinaten, weil

$$\frac{y}{x} = \sin l x = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^k \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

erhalten wird.

Aus dem letzten Ausdruck folgt ferner, dass die Wendepunkte abwechselnd auf zwei Graden liegen, welche durch den Nullpunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems symmetrisch zur Abscissenaxe gezogenen sind, und deren Richtungswinkel α und α_1 durch die Ausdrücke $\operatorname{tng} \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\operatorname{tng} \alpha_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\cos 2\alpha = \cos 2\alpha_1 = \frac{1}{3}$ bestimmt werden.

Für die Richtungswinkel τ der Tangenten in den Wendepunkten ergiebt sich aus

$$\operatorname{tng} \tau = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - l\,x\right) = (-1)^k \cdot \sqrt{2}$$

zunächst, dass alle Wendepunkte, welche auf der einen Graden liegen, parallele Tangenten haben, dann aber auch, dass diese Tangenten auf dem andern Wendepunktträger senkrecht stehn, weil unter der entsprechenden Beziehung von τ mit den α die Relation

$$\operatorname{tng} \alpha \cdot \operatorname{tng} \tau = -1, \quad \operatorname{tng} \tau = -\cot \alpha = \operatorname{tng}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

hervorgeht.

Anmerkung.

Die Maximal- und die Minimalpunkte der Curve liegen auf denselben beiden Graden $y = \pm x \sqrt{\frac{1}{2}}$ in geometrischer Progression. Die Schnittpunkte der Curve mit der Abscissenaxe liegen in geometrischer Progression; und die Tangenten in ihnen sind mit jenen Graden parallel. Die Halbirungslinien der Coordinatennebenwinkel berühren die Curve in Punkten, welche auf ihnen ebenfalls in geometrischer Progression folgen. Andere elegante Resultate erhält man bei der Quadratur, u. s. w. Daher empfiehlt sich die Curve zur Exemplification.

III.

Die Curve $y = p x^{\alpha+1}$,

bei welcher α einen positiven Bruch mit ungradem Nenner bezeichne, erstreckt sich continuirlich so durch die Coordinatenebene, dass zu jedem einzelnen Werthe von x ein einzelner Werth von y gehört. Die Curve hat die Abscissenaxe im Nullpunkte des Coordinatensystems zur Tangente, weil

$$\frac{\sin \tau}{\sin(\mu - \tau)} = \frac{dy}{dx} = (\alpha + 1) p x^{\alpha}$$

für $x = 0$ verschwindet; und sie kehrt der Abscissenaxe überall ihre convexe Seite zu, weil die zweite Derivirte

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \alpha(\alpha + 1) p x^{\alpha - 1}$$

überall einen positiven Werth von

$$y \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = \alpha(\alpha + 1) \cdot p^2 x^{2\alpha}$$

ergiebt.

Beim Nullpunkte der Coordinaten ist $\frac{d^2 y}{d x^2}$ für $\alpha < 1$ unstetig und für $\alpha \geqq 1$ stetig; in allen Fällen jedoch wechselt oder bewahrt $\frac{d^2 y}{d x^2}$ sein Vorzeichen, je nachdem der Zähler von α eine grade oder ungrade Zahl ist.

Mithin ist, wenn α einen ungraden Nenner und einen graden Zähler besitzt, der Nullpunkt ein Wendepunkt der Curve, in welchem sie von der einen Seite der Abscissenaxe auf die andere übertritt — z. B.: $y = p x^{\frac{4}{5}+1}$.

Hat aber α auch einen ungraden Zähler — z. B. in $y = p x^{\frac{3}{5}+1}$, so verbleibt die Curve auf einer Seite der Abscissenaxe.

Im ersten Falle besteht die Curve aus zwei im Nullpunkt zusammenstossenden congruenten Theilen, im zweiten Falle aber nur dann, wenn das Coordinatensystem rechtwinklig ist.

§ 127.

Einige Sätze aus der analytischen Geometrie über die Lagen der Graden gegen einander.

Lehrsatz I.

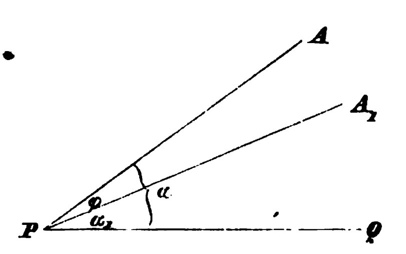
Bedeuten α und α_1 die Richtungswinkel zweier Richtungen gegen eine dritte, φ den Richtungswinkel der ersten gegen die zweite, so ist stets:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \sin\alpha\sin\alpha_1, \tag{1}$$

$$\sin\varphi = \sin\alpha\cos\alpha_1 - \cos\alpha\sin\alpha_1. \tag{2}$$

$$\cot\varphi = \frac{\cot\alpha_1\cot\alpha + 1}{\cot\alpha_1 - \cot\alpha}. \tag{3}$$

Beweis. Zieht man von einem Punkte P aus drei Strahlen PQ, PA, PA_1, welche mit den drei gegebenen Richtungen gleichgerichtet sind, so ist nach dem bekannten Satze über die Gleichheit der Winkel mit gleichgerichteten Schenkeln und nach dem Begriff des Richtungswinkels einer Richtung gegen eine andere (§ 120) unter allen Umständen, wie die Strahlen auch liegen mögen,



$$\varphi + \alpha_1 = \alpha, \qquad \varphi = \alpha - \alpha_1.$$

Hieraus folgt, was behauptet wird, nach § 61.

Zusatz.

Zwei grade Linien stehen auf einander senkrecht, wenn ihre Richtungswinkel α und α_1 der Gleichung

$$\operatorname{tng}\alpha\cdot\operatorname{tng}\alpha_1 = -1 \tag{4}$$

genügen.

— Dies folgt aus (1) oder (3), weil $\cos\varphi = \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cot\varphi = \cot\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$ wird.

Lehrsatz II.

Sind die Gleichungen zweier Graden in der Form

$$a\,x + b\,y = c\,,$$
$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

gegeben, während der Coordinatenwinkel $= \mu$ ist, so lässt sich der Richtungswinkel φ der zweiten gegen die erste aus der Formel

$$(5) \qquad \cot\varphi = \frac{aa_1 - (ab_1 + ba_1)\cos\mu + bb_1}{(ab_1 - ba_1)\sin\mu},$$

berechnen.

Beweis. Bringt man die Gleichung $ax + by = c$ auf die Form

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

und wendet auf sie den Lehrsatz IV des § 121 an, so findet man:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\mu - \alpha)} = -\frac{a}{b}, \quad \cot\alpha = \frac{a\cos\mu - b}{a\sin\mu}.$$

Setzt man dies und den analogen Werth von $\cot\alpha_1$ in (3) ein, so ergiebt sich die Gleichung (5) vermittelst sehr einfacher Reductionen.

Zusatz.

Zwei grade Linien

$$a\,x + b\,y = c\,,$$
$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

stehen auf einander senkrecht, wenn

$$(6) \qquad \begin{cases} aa_1 - (ab_1 + a_1 b)\cos\mu + bb_1 = 0, \\ a(a_1 - b_1\cos\mu) + b(b_1 - a_1\cos\mu) = 0 \end{cases}$$

ist. Unter der Bedingung

$$(7) \qquad ab_1 - ba_1 = 0, \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$$

sind sie **einander parallel**, wenn man hierbei den für

$$(8) \qquad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

eintretenden Fall mitrechnet, in welchem sie sich vollständig decken.

— Dass das Letztere unter der Bedingung (8) in der That eintritt, folgt aus der dann stattfindenden Identität der Gleichungen der beiden Graden.

Lehrsatz III.

Die Entfernung r zweier Punkte (x, y) und (a, b) von einander wird durch die Gleichung

$$(9) \qquad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\mu,$$

bei einem rechtwinkligen Coordinatensystem $\left(\mu = \frac{\pi}{2}\right)$ also durch die Gleichung

$$(10) \qquad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

bestimmt.

— Dies folgt vermittelst der Elimination von τ aus den beiden Gleichungen

$$(x-a)\sin\mu = r\sin(\mu-\tau), \quad (y-b)\sin\mu = r\sin\tau,$$

welche sich aus § 121, (6) ergeben, ohne Mühe.

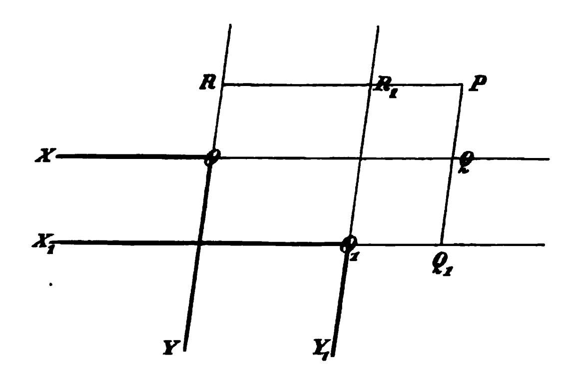
Definition.

Zwei Coordinatensysteme heissen **isotrop**, wenn man ihre Nullpunkte in einerlei Richtung umkreisen muss, um auf dem kürzesten Wege von der Abscissenaxe zur Ordinatenaxe zu gelangen. Im entgegengesetzten Falle heissen sie **antitrop.** Im Besondern nennt man diejenigen isotropen Coordinatensysteme **gleichgerichtet,** deren gleichnamige Axen gleichgerichtet sind.

Lehrsatz IV.

Sind x und y die Coordinaten eines Punktes im primitiven, x_1 und y_1 aber in einem gleichgerichteten secundären System, a und b endlich die primitiven Coordinaten des Nullpunktes des letzteren, so gelten stets die Relationen:

$$(11)\qquad \begin{cases} x = a + x_1, \\ y = b + y_1. \end{cases}$$



— Der Beweis erfordert nur die einfache Anwendung des Begriffs der algebraischen Addition.

Die Exemplification an der nebenstehenden Figur ergiebt:

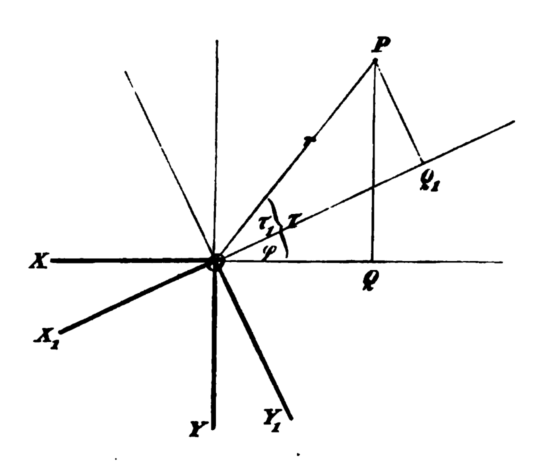
$$x = + OQ = + RR_1 + O_1Q_1 = a + x_1,$$
$$y = + OR = - QQ_1 + O_1R_1 = b + y_1.$$

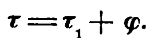
Lehrsatz V.

Sind x und y die primitiven, x_1 und y_1 die secundären Coordinaten eines Punktes in Bezug auf zwei **isotrope rechtwinklige** Systeme mit einerlei Nullpunkt, und bedeutet φ den Richtungswinkel der secundären Abscissenaxe gegen die primitive, so ist:

$$(12)\qquad \begin{cases} x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \\ y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi. \end{cases}$$

Beweis. Die absolute Strecke $OP = r$, welche von dem gemeinsamen Nullpunkt O der beiden Systeme aus nach demjenigen Punkte P hin gezogen ist, dessen Coordinaten verglichen werden sollen, habe im primitiven System den Richtungswinkel τ und im secundären den Richtungswinkel τ_1. Dann ist unter allen Umständen:





$$\tau = \tau_1 + \varphi.$$

Hieraus folgt:

$$r \cos \tau = r \cos \tau_1 \cdot \cos \varphi - r \sin \tau_1 \cdot \sin \varphi,$$
$$r \sin \tau = r \cos \tau_1 \cdot \sin \varphi + r \sin \tau_1 \cdot \cos \varphi.$$

Substituirt man hier die aus § 121, (7) folgenden Werthe

$$r \cos \tau = x\,, \quad r \sin \tau = y\,;$$
$$r \cos \tau_1 = x_1, \quad r \sin \tau_1 = y_1,$$

so erhält man die Gleichungen (12) ohne Weiteres.

Zusatz.

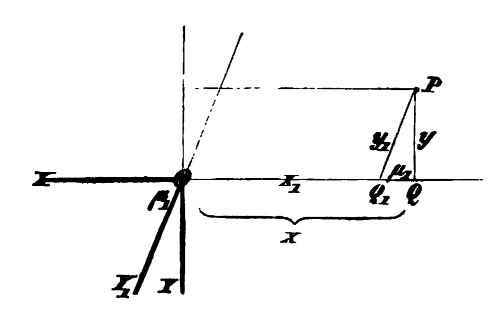
Sind die Nullpunkte verschieden gelegen, so braucht man auf den rechten Seiten von (12) nur noch die entsprechende primitive Coordinate des neuen Nullpunktes hinzuzufügen.

$$(13) \qquad \begin{cases} x = a + x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi, \\ y = b + x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi. \end{cases}$$

— Denn man kann die Coordinatentransformation successive vornehmen, indem man zunächst auf ein gleichgerichtetes System mit dem neuen Nullpunkt übergeht und hinterher die Drehung um den Winkel φ eintreten lässt.

Lehrsatz VI.

Geht man von dem rechtwinkligen Coordinatensystem der x, y ohne Veränderung der Abscissenaxe zu dem isotropen schiefwinkligen System der x_1, y_1 mit dem Coordinatenwinkel μ_1 über, so ist:



$$(14)\begin{cases} x = x_1 + y_1 \cos\mu_1. \\ y = y_1 \sin\mu_1. \end{cases}$$

— Den Beweis liest man unmittelbar aus der nebenstehenden Figur heraus.

Zusatz.

Geht man von dem schiefwinkligen System der x, y, μ ohne Änderung der Abscissenaxe zu dem isotropen rechtwinkligen der $x_1, y_1, \frac{\pi}{2}$ über, so muss man

$$(15)\qquad \begin{cases} x = x_1 - y_1 \cot\mu, \\ y = \dfrac{y_1}{\sin\mu} \end{cases}$$

substituiren.

Lehrsatz VII.

Geht man ohne Verschiebung des Nullpunktes von dem Coordinatensystem der x, y, μ zu dem isotropen System der x_1, y_1, μ_1 über, so ist

$$(16)\qquad \begin{cases} x \sin\mu = x_1 \sin(\mu - \varphi) + y_1 \sin(\mu - \mu_1 - \varphi), \\ y \sin\mu = x_1 \sin\varphi \qquad + y_1 \sin(\mu_1 + \varphi). \end{cases}$$

In diesen Formeln bedeutet φ den Richtungswinkel der secundären Abscissenaxe gegen die primitive.

Beweis. Verwandelt man das schiefwinklige System der x, y, μ zunächst in ein rechtwinkliges der $x', y', \frac{\pi}{2}$, so folgt aus (15):

$$x \sin\mu = x' \sin\mu - y' \cos\mu,$$
$$y \sin\mu = y'.$$

Dreht man dieses System um den Winkel φ, so erhält man aus (12) für die neuen Coordinaten x'', y'':

$$x \sin\mu = x'' \sin(\mu - \varphi) - y'' \cos(\mu - \varphi),$$
$$y \sin\mu = x'' \sin\varphi \qquad + y'' \cos\varphi.$$

Verwandelt man endlich den rechten Coordinatenwinkel der x'', y'' in den schiefen μ_1, so führen sich die neuen Coordinaten x_1 und y_1 nach (14) durch die folgende Substitution ein:

$$x'' = x_1 + y_1 \cos\mu_1, \quad y'' = y_1 \sin\mu_1;$$

und man erhält die Formeln (16).

Durch die blosse Interpretation der Formeln (16) an der Figur, in welcher zwei Axenpaare in der vorgeschriebenen Weise liegen, ergiebt sich der

Zusatz.

Die Relationen (16) lassen sich auch in der Gestalt

$$(17) \qquad \begin{cases} x \sin(xy) = x_1 \sin(x_1 y) + y_1 \sin(y_1 y), \\ y \sin(yx) = x_1 \sin(x_1 x) + y_1 \sin(y_1 x) \end{cases}$$

darstellen, falls man unter $(x\,y)$ den Richtungswinkel der y-Axe gegen die x-Axe, unter $(x_1 y)$ den Richtungswinkel der y-Axe gegen die x_1-Axe versteht, u. s. w. — also u. a. auch $(xy) = -(yx)$ setzt.

Lehrsatz VIII.

Aus der Gleichung

$$x \cos\psi + y \sin\psi - p = 0$$

einer Graden für ein rechtwinkliges Coordinatensystem[1])

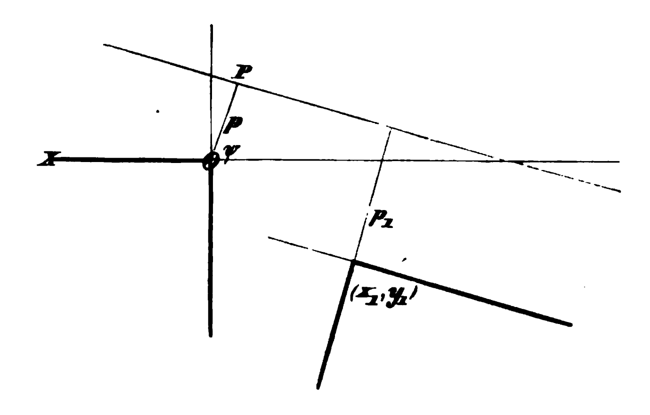
[1]) Vgl. § 121, Lehrs. V.

ergiebt sich deren Entfernung p_1 von einem beliebigen Punkte (x_1, y_1) der Ebene durch den Ausdruck

(18) $$x_1 \cos\psi + y_1 \sin\psi - p = -p_1;$$

wobei p_1 einen positiven oder einen negativen Werth annimmt, je nachdem der Punkt (x_1, y_1) und der Nullpunkt auf derselben Seite der Graden liegen, oder auf entgegengesetzten Seiten.

Beweis. Legt man durch den Punkt (x_1, y_1) als secundären Nullpunkt ein isotropes rechtwinkliges Coordinatensystem der p_1, q_1,



dessen Abscissenaxe den Richtungswinkel ψ hat, so muss man nach (13) in der primitiven Gleichung substituiren:

$$x = x_1 + p_1 \cos\psi - q_1 \sin\psi,$$
$$y = y_1 + p_1 \sin\psi + q_1 \cos\psi.$$

Thut man dies, so folgt:

$$x_1 \cos\psi + y_1 \sin\psi + p_1 - p = 0;$$

was mit (18) übereinstimmt.

Das Wegfallen der Ordinate q_1 bestätigt die — übrigens von vorn herein ersichtliche — senkrechte Lage der Graden gegen die neue Abscisse p_1. Und was wir über das Vorzeichen der letzteren behaupten, erhellt aus unserer Ableitungsmethode als selbstverständlich.

§ 128.

Die Gleichungen der Tangenten und Normalen. Eine Eigenthümlichkeit der algebraischen Curven.

A. Die Gleichung der Tangente.

Um die Punkte (x, y) einer Curve $f(x, y) = 0$ von andern Punkten der Ebene zu unterscheiden, wollen wir die Coordinaten der letzteren durch ξ, η bezeichnen. Wie bisher, heisse der Coordinatenwinkel μ, der Richtungswinkel der Tangente τ, die Bogenabscisse s, und r sei die Entfernung der Punkte (ξ, η) und (x, y) von einander.

Machen wir nun (ξ, η) zu einem beliebigen Punkt derjenigen Graden, welche die Curve im Punkte (x, y) berührt, so ist die Gleichung dieser Tangente (nach § 121, (6)):

$$\frac{\xi - x}{\sin(\mu - \tau)} = \frac{\eta - y}{\sin \tau} = \frac{r}{\sin \mu}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die Gleichung (2) des § 124, nämlich durch die Gleichung

$$\frac{\frac{dx}{ds}}{\sin(\mu - \tau)} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\sin \tau} = \frac{1}{\sin \mu},$$

so folgt:

$$(\xi - x)\frac{ds}{dx} = (\eta - y)\frac{ds}{dy} = r.$$

Zieht man schliesslich noch in Betracht, dass aus der Curvengleichung $f(x, y) = 0$ die Relation

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} = 0$$

folgt, und substituirt aus dem Vorhergehenden

$$r\frac{dx}{ds} = \xi - x, \quad r\frac{dy}{ds} = \eta - y,$$

so erhält man die Tangentengleichung noch in der Gestalt:

$$(\xi - x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Wir resumiren:

Lehrsatz I.

Versteht man unter (x, y) den Berührungspunkt der Tangente an die Curve $f(x, y) = 0$, unter s die Bogenabscisse des Berührungspunktes und unter (ξ, η) einen beliebigen Punkt der Tangente, so sind die wichtigsten Formen der **Gleichung der Tangente** die folgenden:

$$(1) \qquad (\xi - x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$(2) \qquad (\xi - x) \cdot \frac{d s}{d x} = (\eta - y) \cdot \frac{d s}{d y},$$

$$(3) \qquad \eta - y = (\xi - x) \cdot \frac{d y}{d x},$$

$$(4) \qquad \frac{\xi - x}{\sin(\mu - \tau)} = \frac{\eta - y}{\sin \tau},$$

$$(5) \qquad \eta - y = (\xi - x) \cdot \frac{\sin \tau}{\sin(\mu - \tau)}.$$

Während die ersten drei Gleichungen den Coordinatenwinkel μ nicht enthalten, vereinfachen sich die beiden andern für ein rechtwinkliges System, wie folgt:

$$(4') \qquad \frac{\xi - x}{\cos \tau} = \frac{\eta - y}{\sin \tau},$$

$$(5') \qquad \eta - y = (\xi - x) \cdot \operatorname{tng} \tau.$$

Bei den „algebraischen Curven“, d. h. bei solchen Curven, deren Gleichung $f(x, y) = 0$ linker Hand eine ganze rationale algebraische Function $f(x, y)$ von x und y hat, lässt sich die Gleichung (1) der Tangente auf eine bemerkenswerthe Weise transformiren.

Die algebraische Function $f(x, y)$ heisst eine Function m^tes^ Grades, falls sie sich durch die Substitution von tx und ty für x und y in eine Function $f(tx, ty)$ vom m^ten^ Grade in Bezug

auf t verwandelt. Z. B. ist $f(x, y) = x^2 y^3 + a x^4$ eine Function 5ten Grades, weil $f(tx, ty) = x^2 y^3 \cdot t^5 + a x^4 \cdot t^4$ wird.

Homogen heisst die algebraische Function, wenn bei dieser Substitution $f(tx, ty) = t^m \cdot f(x, y)$ resultirt. Z. B. ist $f(x, y) = x^2 y^3 + a x^4 y$ eine homogene Function 5ten Grades, weil $f(tx, ty) = t^5 \cdot (x^2 y^3 + a x^4 y) = t^5 \cdot f(x, y)$ hervorgeht.

Jede algebraische Function m^{ten} Grades lässt sich als eine Summe von homogenen Functionen darstellen, deren Grad vom m^{ten} bis zum $null^{ten}$ fällt, also in der Form:

$$f(x, y) = u_m + u_{m-1} + u_{m-2} + \cdots + u_1 + u_0,$$

in welcher ganz allgemein u_k eine homogene Function k^{ten} Grades bedeutet.

Da $u_k = \varphi(x, y)$ demnach die Eigenschaft

$$\varphi(tx, ty) = t^k \cdot \varphi(x, y)$$

hat, so folgt durch die Differentiation dieser Gleichung nach t:

$$\frac{\partial \varphi(tx, ty)}{\partial (tx)} \cdot \frac{d(tx)}{dt} + \frac{\partial \varphi(tx, ty)}{\partial (ty)} \cdot \frac{d(ty)}{dt} = k \cdot t^{k-1} \cdot \varphi(x, y)$$

oder, wenn man noch die Werthe $\frac{d(tx)}{dt} = x$, $\frac{d(ty)}{dt} = y$ substituirt und hinterher $t = 1$ macht:

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \cdot y = k \cdot \varphi(x, y),$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial u_k}{\partial y} \cdot y = k \cdot u_k.$$

Wendet man dieses Resultat auf die Differentiation der algebraischen Function $f(x, y)$ an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y &= m \cdot u_m + (m-1) \cdot u_{m-1} + (m-2) \cdot u_{m-2} + \cdots + 1 \cdot u_1 \\ &= m \cdot (u_m + u_{m-1} + u_{m-2} + \cdots + u_1 + u_0) \\ &\quad - (1 \cdot u_{m-1} + 2 \cdot u_{m-2} + 3 \cdot u_{m-3} + \cdots + m \cdot u_0). \end{aligned}$$

Der Bestandtheil

$$u_m + u_{m-1} + u_{m-2} + \cdots + u_1 + u_0 = f(x, y)$$

des letzten Ausdrucks verschwindet für alle Punkte der Curve $f(x, y) = 0$, so dass für dieselben nur

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -(1 \cdot u_{m-1} + 2 \cdot u_{m-2} + 3 \cdot u_{m-3} + \cdots + m \cdot u_0)$$

übrig bleibt, und die Gleichung (1) die folgende Gestalt annimmt:

$$\xi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 1 \cdot u_{m-1} + 2 \cdot u_{m-2} + 3 \cdot u_{m-3} + \cdots + m \cdot u_0 = 0.$$

Erwägt man noch, dass die partiellen Derivirten $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ von einem mindestens um 1 niedrigeren Grade sind, als die algebraische Function $f(x, y)$, dass die eine von ihnen aber wegen der Relation

$$x \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u_m}{\partial y} = m \cdot u_m$$

vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade sein muss, so kann man daher das Resultat aussprechen, wie folgt:

Lehrsatz II.

Ist die Gleichung $f(x, y) = 0$ einer algebraischen Curve vom m^{ten} Grade, so ist die Gleichung ihrer Tangente

$$(\xi - x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

für x und y um einen Grad niedriger und lässt sich in der Form

$$(6) \quad \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 1 \cdot u_{m-1} + 2 \cdot u_{m-2} + 3 \cdot u_{m-3} + \cdots + m \cdot u_0 = 0$$

darstellen, falls man allgemein unter u_k den homogenen Bestandtheil k^{ten} Grades versteht, welcher sich bei der Zerlegung

$$(7) \qquad f(x, y) = u_m + u_{m-1} + u_{m-2} + \cdots + u_1 + u_0$$

ergiebt.

Beispiel.

Die allgemeinste Gleichung der Curven zweiten Grades

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + c \cdot y^2 + 2d \cdot x + 2e \cdot y + f = 0$$

ergiebt:

$$u_2 = a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + c \cdot y^2, \quad u_1 = 2d \cdot x + 2e \cdot y, \quad u_0 = f;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(a \cdot x + b \cdot y + d), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(b \cdot x + c \cdot y + e).$$

Mithin ist die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y):

$$\xi \cdot (ax + by + d) + \eta \cdot (bx + cy + e) + dx + ey + f = 0.$$

B. Die Gleichung der Normale.

Um die Gleichung der Normale einer Curve zu finden, stelle man nach der Anleitung des vorigen § die Gleichung derjenigen Graden auf, welche auf der Tangente im Berührungspunkte (x, y) senkrecht steht.

Zunächst muss die Gleichung der Normale sich in der Form

$$(\xi - x) \cdot a + (\eta - y) \cdot b = 0$$

darstellen lassen, welche, so lange a und b nicht näher bestimmt werden, weiter nichts ausdrückt, als dass die Normale eine von denjenigen Graden ist, welche durch den Punkt (x, y) hindurchgehn. Dass sie auf der Tangente

$$(\xi - x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

senkrecht steht, spricht sich nach § 127, (6) so aus:

$$a \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cos \mu\right) + b \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \cos \mu\right) = 0.$$

Um diese Bedingung zu erfüllen, braucht man offenbar nur

$$a = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \mu - \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$b = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cos \mu$$

zu machen. Demnach ist

$$(\xi - x)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\mu - \frac{\partial f}{\partial y}\right) + (\eta - y)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\cos\mu\right) = 0$$

eine von den möglichen Formen der Gleichung der Normale.

Dieses Resultat ist aus der Form (1) der Tangentengleichung erhalten:

Um sogleich das Resultat aus der Gleichung (2) zu ziehn, hat man nur darauf zu achten, dass diese aus (1) entsteht, wenn man $\frac{ds}{dx}$ für $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\left(-\frac{ds}{dy}\right)$ für $\frac{\partial f}{\partial y}$ schreibt. Mithin ergiebt sich aus (2):

$$(\xi - x)\cdot\left(\frac{ds}{dx}\cos\mu + \frac{ds}{dy}\right) + (\eta - y)\cdot\left(\frac{ds}{dx} + \frac{ds}{dy}\cos\mu\right) = 0.$$

Geht man endlich von der Form (4) der Tangentengleichung aus, welche den Richtungswinkel τ der Tangente enthält, so braucht man für denselben nur $\tau \pm \frac{\pi}{2}$ zu setzen, um die Gleichung der Normale sofort zu erhalten. Man findet, weil mit Beziehung der Vorzeichen auf einander

$$\sin\left[\mu - \left(\tau + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \mp\cos(\mu - \tau), \quad \sin\left(\tau \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\tau$$

ist:

$$-\frac{\xi - x}{\cos(\mu - \tau)} + \frac{\eta - y}{\cos\tau} = 0.$$

Alle diese Formeln gewinnen an Eleganz, sobald $\mu = \frac{\pi}{2}$ ist. Wir fassen die Resultate zusammen.

Lehrsatz III.

Die Gleichung der **Normale** einer Curve $f(x, y) = 0$ im Punkte (x, y) kann, wenn man unter (ξ, η) einen beliebigen Punkt der Normale versteht, in folgenden Formen dargestellt werden:

$$(8) \quad (\xi - x)\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos\mu - \frac{\partial f}{\partial y}\right] + (\eta - y)\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\cos\mu\right] = 0.$$

$$(9)\quad (\xi - x)\cdot[x' + y'\cdot\cos\mu] + (\eta - y)\cdot[y' + x'\cdot\cos\mu] = 0,$$ [1]

$$(10)\quad \frac{\xi - x}{\cos(\mu - \tau)} + \frac{\eta - y}{\cos\tau} = 0, (\xi - x)\cos\tau + (\eta - y)\cos(\mu - \tau) = 0.$$

Im Fall eines rechtwinkligen Coordinatensystems nehmen diese Gleichungen die einfacheren Formen an:

$$(8')\quad (\xi - x)\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - (\eta - y)\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$(9')\quad (\xi - x)\cdot x' + (\eta - y)\cdot y' = 0,\ \eta - y = -(\xi - x)\cdot\frac{dx}{dy};$$

$$(10')\quad (\xi - x)\cdot\cos\tau + (\eta - y)\cdot\sin\tau = 0, \eta - y = -(\xi - x)\cdot\cot\tau.$$

§ 129.

Berührung einer Curve mit einer Curve: Contacte von verschieden hoher Ordnung, Krümmungscurve, Umhüllende.

Besitzen zwei Curven in einem gemeinsamen Punkte (x, y) eine gemeinsame Tangente, so sagt man, dass die Curven sich in diesem Punkte ebenfalls berühren.

Der Richtungswinkel τ dieser gemeinsamen Tangente ist zwar selbstverständlich bei beiden Curven gleich, folgt aber auf beiden Curven verschiedenen Änderungsgesetzen, weil die beiden Curven sonst zusammenfielen (§ 121, Lehrs. I).

Die Grösse von τ wird durch die Formel (1) des § 120 bestimmt, und für die erste Derivirte von τ haben wir in § 126, (4) für den Fall, dass die Bogenabscisse zur unabhängigen Variabeln gemacht wird, den Ausdruck gefunden:

$$(1)\qquad \tau' = (x'y'' - y'x'')\cdot\sin\mu.$$

Differentiirt man denselben wiederholt, so erhält man:

[1] Um diese Gleichung zu erhalten, ist diejenige, welche oben s enthält, mit $\frac{dx\cdot dy}{ds\cdot dt}$ multiplicirt, wo t irgend eine Variable bedeutet, von welcher x und y abhängen.

$$\tau'' : \sin\mu = x'y''' - y'x''',$$
$$\tau''' : \sin\mu = (x'y^{IV} - y'x^{IV}) + (x''y''' - y''x'''),$$
$$\tau^{IV} : \sin\mu = (x'y^{V} - y'x^{V}) + 2\cdot(x''y^{IV} - y''x^{IV}),$$
$$\tau^{V} : \sin\mu = (x'y^{VI} - y'x^{VI}) + 3\cdot(x''y^{V} - y''x^{V}) + 2\cdot(x'''y^{IV} - y'''x^{IV}).$$
$$\tau^{VI} : \sin\mu = (x'y^{VII} - y'x^{VII}) + 4\cdot(x''y^{VI} - y''x^{VI}) + 5\cdot(x'''y^{V} - y'''x^{V}).$$

u. s. w.

$$(2)\quad \tau^{(m)} : \sin\mu = 1\cdot(x'y^{(m+1)} - y'x^{(m+1)}) + m_1\cdot(x''y^{(m)} - y''x^{(m)}) + m_2\cdot(x'''y^{(m-1)} - y'''x^{(m-1)}) + \cdots$$

Die Anzahl der Glieder rechter Hand ist gleich der grössten ganzen Zahl, welche $\frac{1}{2}m$ nicht überschreitet, und die Coefficienten m_k lassen sich — wie man vermittelst des Leibnitzschen Satzes (§ 31) leicht findet — durch Binomialcoefficienten so darstellen:

$$m_k = \binom{m-1}{k} - \binom{m-1}{k-1}.$$

Das Letztere interessirt übrigens für unsern Zweck nicht.

Dagegen ist es für uns wichtig, dass $\tau^{(m)}$ sich als eine ganze algebraische Function von

$$x', x'', x''', \cdots, x^{(m+1)};\ y', y'', y''', \cdots, y^{(m+1)}$$

darstellt, mithin einen völlig bestimmten Werth besitzt, so lange diese einen solchen haben, und sich gleichzeitig mit ihnen stetig ändert.

Man kann diesen Schluss umkehren, weil auch die Derivirten von x und y als stetige Functionen des Richtungswinkels τ und seiner Derivirten darstellbar sind. Denn es ist nach § 124, (2):

$$(3)\quad \begin{cases} x'\cdot\sin\mu = +\sin(\mu-\tau), \\ x''\cdot\sin\mu = -\cos(\mu-\tau)\cdot\tau', \\ x'''\cdot\sin\mu = -\sin(\mu-\tau)\cdot\tau'^2 - \cos(\mu-\tau)\cdot\tau'', \\ x^{IV}\cdot\sin\mu = +\cos(\mu-\tau)\cdot\tau'^3 - 3\sin(\mu-\tau)\cdot\tau'\tau'' - \cos(\mu-\tau)\cdot\tau''' \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} y' \cdot \sin\mu = +\sin\tau, \\ y'' \cdot \sin\mu = +\cos\tau\cdot\tau', \\ y''' \cdot \sin\mu = -\sin\tau\cdot\tau'^2 + \cos\tau\cdot\tau'', \\ y^{IV} \cdot \sin\mu = -\sin\tau\cdot\tau'^3 - 3\sin\tau\cdot\tau'\tau'' + \cos\tau\cdot\tau''', \end{cases}$$

u. s. w.

Die Derivirten von τ nach s sind unabhängig von der Lage des Coordinatensystems gegen die Curve, da τ sich nur um eine Constante ändert, wenn man der Abscissenaxe eine andere Richtung giebt, die Bogenabscisse s aber dadurch überhaupt nicht afficirt wird.

Aus dem schon erwähnten Umstande, dass die verschiedenen Curven, welche in einem gemeinsamen Punkte eine gemeinsame Tangente besitzen, verschiedenen Gesetzen der Änderung des Richtungswinkels unterworfen sind, hat man die Veranlassung hergenommen, den folgenden Begriff aufzustellen:

Definition.

Genügen die Richtungswinkel τ und τ_1 der Tangenten zweier Curven in einem gemeinsamen Punkte der letzteren den Relationen

$$(5)\quad \tau = \tau_1,\ \tau' = \tau_1',\ \tau'' = \tau_1'',\ \tau''' = \tau_1''',\ \cdots,\ \tau^{(m-1)} = \tau_1^{(m-1)};\quad \tau^{(m)} \gtrless \tau_1^{(m)}$$

— die Differentiationen nach den Bogenabscissen ausgeführt — so sagt man: die beiden Curven besässen in jenem Punkte einen **Contact von der m^{ten} Ordnung.**

Zusatz.

Die Ordnung des Contactes zweier Curven ist ein Attribut ihrer Gestalt — sie ist unabhängig von der Wahl des Coordinatensystems.

Wollte man indessen bei der Untersuchung der Contacte die Derivirten der Richtungswinkel nach den Bogenabscissen in der

That analytisch darstellen und dann zur Vergleichung bringen, so würde dies in der Regel unbequeme Rechnungen erheischen, da die Curven nicht durch Gleichungen zwischen τ und s gegeben zu sein pflegen, sondern durch Gleichungen zwischen x und y.

Nun zeigen aber die Gleichungen (3) und (4), dass aus

$$\tau = \tau_1, \quad \tau' = \tau_1', \quad \tau'' = \tau_1'', \cdots, \tau^{(m-1)} = \tau_1^{(m-1)}$$

folgt:

$$x' = x_1', \quad x'' = x_1'', \quad x''' = x_1''', \cdots, x^{(m)} = x_1^{(m)};$$

$$y' = y_1', \quad y'' = y_1'', \quad y''' = y_1''', \cdots, y^{(m)} = y_1^{(m)}.$$

Und die Gleichung (2) zeigt, dass die umgekehrte Folgerung ebenfalls zutrifft. Ausserdem sind die Derivirten der x und der y bei jeder Curve durch die Gleichung (§ 124, (2))

$$x' \sin\tau = y' \sin(\mu - \tau)$$

und durch die hieraus vermittelst Differentiation entstehenden eindeutig verbunden, so dass sich die Reihe der Gleichungen, welche die Derivirten der x enthalten, von selbst erfüllt, wenn die Gleichungen zwischen den Derivirten der y Geltung haben — und umgekehrt.

Endlich bedarf es auch nicht der Differentiation der Ordinate y nach s, sondern es genügt die Differentiation nach x, wenn nur die Tangente nicht der Ordinatenaxe parallel ist; denn in letzterem Falle ist $\frac{dy}{dx} = \infty$ und nach (3) $x' \sin\mu = \sin(\mu - \mu) = 0$, so dass schon die Relation

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{dx} \cdot x'$$

zwischen den ersten Derivirten zur Zurückführung von $\frac{dy}{ds}$ auf $\frac{dy}{dx}$ unbrauchbar wird. Nehmen wir aber diesen besondern Fall aus, so erweist sich unsere letzte Behauptung als stichhaltig. Denn aus der Relation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$$

folgen durch Differentiation nach x lauter Ausdrücke

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} = \frac{\tau'}{x'^3 \cdot \sin\mu},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'\tau'' - 3\tau'x''}{x'^5 \cdot \sin\mu},$$

u. s. w.,

welche im Nenner die Constante $\sin\mu$ mit einer Potenz von x' multiplicirt enthalten und daher — weil x' nicht $= 0$ sein soll — völlig bestimmte Werthe haben, so weit den Derivirten von τ nach s solche Werthe zukommen. Da das Bildungsgesetz von $\frac{d^m y_1}{dx_1^m}$ dasselbe ist, wie von $\frac{d^m y}{dx^m}$, so muss demnach

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^m y_1}{dx_1^m}$$

bis zu jeder Nummer m erhalten werden, bis zu welcher $\tau^{(m-1)} = \tau_1^{(m-1)}$ ist.

Dass man auch diesen Schluss umkehren kann, liegt auf der Hand. Demnach gilt der

Lehrsatz I.

Zwei Curven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ besitzen bei jedem Werthe von x, für welchen

$$(6)\quad f(x) = \varphi(x),\ f'(x) = \varphi'(x),\ f''(x) = \varphi''(x), \cdots, f^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(x);$$
$$f^{(m+1)}(x) \gtrless \varphi^{(m+1)}(x)$$

ist, einen Contact m^{ter} Ordnung. Und umgekehrt müssen diese Relationen überall dort, wo ein solcher Contact besteht, Geltung haben, wenn man diejenigen gemeinsamen Punkte ausnimmt, in denen die Tangente parallel zur Axe der y liegt;[1]) — dann gelangt man durch die Vertauschung von x mit y zur Entscheidung.

---

[1]) Unsere Darstellung des Gegenstandes weicht von derjenigen, welche man sonst überall vorfindet, u. a. dadurch ab, dass man den Grad des Con-

Denken wir uns jetzt diejenige Coordinatenaxe, welche der gemeinsamen Tangente der beiden Curven nicht parallel ist, als Abscissenaxe und construiren eine dritte Curve

$$y = f(x) - \varphi(x),$$

deren Ordinate die algebraische Differenz der Ordinaten der beiden gegebenen Curven ist, so wird diese dritte Curve bei der fraglichen Abscisse x die Abscissenaxe zur Tangente haben, weil an dieser Stelle nach (6)

$$y = f(x) - \varphi(x) = 0, \quad \frac{dy}{dx} = f\,(x) - \varphi'(x) = 0$$

hervorgeht, und ebendaselbst von der einen Seite der Abscissenaxe zur andern übertreten oder dies nicht thun, je nachdem der Richtungswinkel der Tangente dieser dritten Curve — und demnach die Function

$$[f'(x) - \varphi'(x)]$$

— an der fraglichen Stelle ein Maximum, respective Minimum, ist oder nicht, d. h. nach § 126, Lehrsatz IV: je nachdem die Differenz

$$f^{(m+1)}(x) - \varphi^{(m+1)}(x)$$

bei einem graden oder bei einem ungraden m zu verschwinden aufhört.

In Bezug auf die beiden ersten Curven bedeutet dies, dass sie sich schneiden oder dies nicht thun, weil die Differenz ihrer Ordinaten das Vorzeichen wechselt oder dies nicht thut.

Daher gilt der

---

tactes durch die Relationen (6) zu definiren pflegt und dann die Unabhängigkeit desselben von der Wahl des Coordinatensystems zu beweisen sucht. Dies erfordert aber — abgesehn davon, dass hierbei eine wesentliche Eigenschaft der Curven an sich durch ein unwesentliches Hülfsmittel der Betrachtung, die Coordinaten, definirt ist — complicirtere Betrachtungen und verschliesst solche Punkte, in denen die Tangente der Ordinatenaxe parallel liegt, dem Begriff.

Lehrsatz II.

Ist der Contact zweier Curven von **grader** Ordnung, so schneiden sie sich im Berührungspunkte, ist er von **ungrader** Ordnung, so verbleibt jede von ihnen auf einerlei Seite der andern — und umgekehrt.

Wendet man auf die Gleichung

$$y = f(x) - \varphi(x)$$

derjenigen dritten Curve, welche die Differenz der Ordinaten der beiden gegebenen Curven zur Ordinate hat, den Taylorschen Satz an, indem man der grösseren Einfachheit wegen die Ordinatenaxe durch den Berührungspunkt der Curven gehen lässt, so erhält man (§ 38, (2)):

$$y = \left\{f(0) - \varphi(0)\right\} + \frac{x}{1!}\cdot\left\{f'(0) - \varphi'(0)\right\} + \cdots + \frac{x^m}{m!}\cdot\left\{f^{(m)}(0) - \varphi^{(m)}(0)\right\}$$

$$+ \frac{x^{m+1}}{m!}\cdot\int_0^1 u^m \left\{f^{(m+1)}(x-ux) - \varphi^{(m+1)}(x-ux)\right\} du,$$

mithin bei einem Contacte von der m^{ten} Ordnung:

$$y = x^{m+1}\cdot\int_0^1 \frac{u^m}{m!}\cdot\left\{f^{(m+1)}(x-ux) - \varphi^{(m+1)}(x-ux)\right\} du = x^{m+1}\cdot J(x).$$

In diesem Ausdruck nähert sich das Integral $J(x)$ bei der Annäherung von x an 0 einem nicht verschwindenden Grenzwerth $J(0)$, weil der Voraussetzung gemäss

$$f^{(m+1)}(0) - \varphi^{(m+1)}(0) \gtrless 0$$

ist.

Durch eine ganz analoge Betrachtung findet man

$$y_1 = f(x) - \varphi_1(x) = x^{m_1+1}\cdot J_1(x)$$

für die Ordinatendifferenz y_1 der Curve $y = f(x)$ mit einer Curve $y = \varphi_1(x)$, wenn deren Contact von der m_1^{ten} Ordnung ist.

Es folgt ferner:

$$\frac{y}{y_1} = x^{m-m_1} \cdot \frac{J(x)}{J_1(x)};$$

also:

$$\lim_{x=0} \cdot \frac{y}{y_1} = \frac{J(0)}{J_1(0)} \quad \text{für } m = m_1,$$

$$\lim_{x=0} \cdot \frac{y}{y_1} = 0 \quad \text{für } m > m_1.$$

Dies lässt sich so aussprechen:

Lehrsatz III.

Wird eine Curve von mehreren Curven in einem Punkte berührt, so schmiegt sich diejenige, deren Contact mit ihr die höchste Ordnungszahl besitzt, in hinreichender Nähe des Berührungspunktes am engsten an sie an: und zwar in der Weise, dass das Verhältnis der Abstände auf jeder nicht zur Tangente parallelen Secante[1] bei der Annäherung der letzteren an den Berührungspunkt dem Grenzwerthe Null zustrebt, wenn die Ordnungszahlen der Contacte verschieden sind, sonst aber dem nicht verschwindenden Grenzwerth $J(0):J_1(0)$. Verläuft eine Curve zwischen zwei sich berührenden Curven, so ist die Ordnung ihres Contactes mit diesen mindestens eben so hoch, wie diejenige des Contactes der beiden letzteren gegen einander.

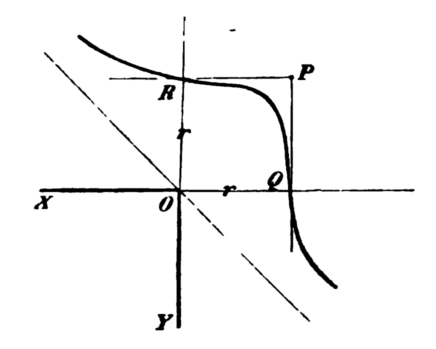
Zwei Curven, welche beim Berührungspunkt einander ihre convexen Seiten zuwenden, besitzen keinen höheren Contact mit einander als mit der Tangente.

Setzen wir nun den Fall, dass die Function $\varphi(x)$ zwar ihrer Form nach gegeben sei, aber einen oder mehr numerisch noch nicht bestimmte Parameter $p, p_1, p_2, \ldots$ enthalte, so wird dadurch

---

[1]) nämlich $\frac{y}{y_1}$. — Wir hatten den Coordinatenwinkel μ beliebig gelassen.

ein gewisser gemeinsamer Charakter aller derjenigen Curven bedingt, deren Gleichungen unter der Form $y = \varphi(x)$ dargestellt werden können. Z. B. besitzt die Gleichung $y = ax + b$ zwei Parameter, a und b, deren Änderung sich geometrisch als Verschiebung einer Graden interpretirt, die Gleichung des Kreises um den Nullpunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems, $x^2 + y^2 = r^2$, enthält nur einen Parameter r, dessen Änderung mit der Änderung des Radius allein übereinstimmt, während die Gleichung $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ drei Parameter hat, deren Veränderung nicht nur den Radius r des dargestellten Kreises, sondern auch die Lage seines Centrums (a, b) variirt. — Übrigens braucht die Änderung der Parameter in einer durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ zusammengefassten Schar von Curven durchaus nicht immer solche Verwandtschaften der Curven vorzuführen, welche wir der Ähnlichkeit der Gestalt wegen von vorne herein anzuerkennen geneigt sind, wie den Übergang eines Kreises in einen andern. Z. B. verwandelt sich der Kreis, welcher durch die Gleichung $y = \sqrt[n]{r^n - x^n}$ oder $x^n + y^n = r^n$ für $n = 2$ dargestellt wird, für $n = 1$ in eine Grade, für $r = 3$ ungefähr in die hierneben verzeichnete Gestalt mit einer Asymptote durch den Punkt O; und je grösser man das n macht, desto genauer fällt der Bogen QR mit der gebrochenen Linie QPR zusammen.



Die Curven $x^2 + ay^2 = r^2$ gehn bei der Veränderung des a aus dem positiven Gebiet ins negative von Ellipsen in Hyperbeln über, nachdem sie sich für $a = 0$ in zwei Grade $x = +r$ und $x = -r$ aufgelöst, welche mit der Ordinatenaxe parallel liegen.

Nach diesen Betrachtungen, welche die Verwandtschaft von Curven nach Parametern beleuchten sollten, setzen wir voraus, dass die Curvengleichung

$$\eta = \varphi(\xi;\, p,\, p_1,\, p_2,\, \dots,\, p_m)$$

$(m+1)$ Parameter $p, p_1, p_2, \ldots, p_m$ besitze. Die laufenden Coordinaten dieser Curve haben wir durch ξ und η bezeichnet, um sie von denjenigen der Curve $y = f(x)$ sichtbar zu unterscheiden.

Verlangt man nun, dass aus der Curvenschar

$$\eta = \varphi(\xi; p, p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

eine Curve ausgewählt werde, welche mit der Curve $y = f(x)$ in einem Punkte (x, y) der letzteren einen Contact von irgend welcher Ordnung n besitze, so ist diese Forderung nach unserm Lehrsatz I gleichbedeutend mit derjenigen, dass die $(n+1)$ Gleichungen

$$(7) \quad f(x) = \varphi(x), f'(x) = \varphi'(x), f''(x) = \varphi''(x), \cdots, f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x)$$

erfüllt werden sollen.

Da uns $(m+1)$ willkürlich bestimmbare Parameter zu Gebote stehn, so lässt sich dies nicht nur immer ausführen, so lange $m \geq n$ ist, sondern es bleiben noch $(m-n)$ auch weiter der Willkür anheimfallende Parameter übrig.

Mithin wird die Aufgabe, falls man einen Contact von der m^{ten} Ordnung verlangt, durch eine einzige Curve aus der Schar

$$\eta = \varphi(\xi; p, p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

gelöst; die Parameter derselben werden vermittelst der Gleichungen (7) als völlig bestimmte Functionen der Coordinaten x, y des Berührungspunktes erhalten. Soll die Ordnung des Contactes niedriger sein, so genügt eine unbeschränkte Anzahl von Curven unserer Schar der Aufgabe, soll sie grösser sein, so kann die Auflösung höchstens für einzelne Punkte der Curve $y = f(x)$ gelingen, in denen sich die überzähligen Gleichungen von selbst erfüllen.

Es gilt demnach der

Lehrsatz IV.

In jeder Schar von Curven

$$\eta = \varphi(\xi; p, p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

welche nach $(m+1)$ Parametern mit einander verwandt sind, giebt es eine einzige Curve, welche mit der Curve

$$y = f(x)$$

in dem Punkte (x, y) den generell höchsten Contact von der m^{ten} Ordnung besitzt. Die Parameter $p, p_1, p_2, \ldots, p_m$ derselben — der **„Krümmungscurve von $y = f(x)$ aus jener Schar“** — sind bestimmte Functionen der Abscisse x des Berührungspunktes und lassen sich aus den $(m + 1)$ Gleichungen

$$(8)\quad f(x) = \varphi(x),\ f'(x) = \varphi'(x),\ f''(x) = \varphi''(x), \ldots, f^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(x)$$

berechnen, deren rechte Seiten die Derivirten von φ nach ξ für $\xi = x$ bedeuten.

Liegt die Tangente in dem verlangten Berührungspunkte parallel zur Ordinatenaxe, so muss man bei den Rechnungen die Coordinatenaxen mit einander vertauschen.

Wollen wir beispielsweise aus der Schar grader Linien $\eta = p\,\xi + p_1$, welche durch zwei Parameter p und p_1 charakterisirt wird, diejenige bestimmen, welche mit der Curve $y = f(x)$ einen möglichst hohen Contact besitzt, so müssen wir $\varphi(\xi) = p\xi + p_1$, $\varphi(x) = p\,x + p_1$, $\varphi'(x) = p$, $\varphi''(x) = \varphi'''(x) = \cdots = 0$ setzen und dann nach (8) p und p_1 aus den Gleichungen

$$p\,x + p_1 = f(x), \quad p = f'(x)$$

berechnen. Die Resultate $p = f'(x)$ und $p_1 = f(x) - x f'(x)$ sind in der Gleichung $\eta = p\,\xi + p_1$ zu substituiren; was — wie es nicht anders zu erwarten war — die Gleichung der Tangente

$$\eta = \xi \cdot f'(x) + f(x) - x \cdot f'(x), \quad \eta - f(x) = (\xi - x) \cdot f'(x)$$

ergiebt. Der Contact ist von der ersten Ordnung, falls nicht von selbst $f''(x) = f'''(x) = \cdots = 0$ wird, was z. B. in den Wendepunkten von $y = f(x)$ wenigstens hinsichtlich $f''(x)$ zu geschehen pflegt.

Die Anwendung auf die Bestimmung des Krümmungskreises werden wir im nächsten § besprechen.

Hier soll uns noch die Umkehrung des allgemeinen Problems beschäftigen, nämlich dasjenige: die Gleichung der Curve $y = f(x)$ zu finden, wenn die Gleichung ihrer Krümmungscurve gegeben ist.

Die letztere erscheint, nachdem die Parameter sämmtlich aus (8) berechnet sind, laut dem obigen Satze in der Form $\eta = \varphi(\xi, p)$, da alle Parameter sich als Functionen von x oder anstatt dessen als Functionen von einem der Parameter darstellen; sie ist also die Gleichung einer Curvenschar, deren Verwandtschaft durch einen Parameter p vermittelt wird; und $y = f(x)$ nimmt die Bedeutung der „**Umhüllenden** dieser Schar", d. i. die Bedeutung einer Curve an, welche alle Curven dieser Schar berührt.

Nehmen wir an, die Umhüllende einer beliebig gegebenen Curvenschar

$$\eta = \varphi(\xi, p)$$

hätte Existenz — was, wie wir sogleich sehn werden, durchaus nicht immer der Fall ist — und nennen den Berührungspunkt wieder (x, y), so muss deren Gleichung $y = f(x)$ mit der Gleichung $\eta = \varphi(\xi, p)$ nach (8) durch die Relationen

$$(9) \qquad f(x) = \varphi(x, p), \quad f'(x) = \frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial x}$$

verbunden sein. Aus der ersteren von diesen folgt aber, weil die Umhüllende von Punkt zu Punkt eine andere Curve aus der Schar, d. i. eine Curve mit verändertem p, berührt:

$$f'(x) = \frac{d\varphi(x, p)}{dx} = \frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Dies ergiebt durch die Subtraction des Ausdrucks (9) für $f'(x)$:

$$\frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} = 0.$$

Über $\frac{dp}{dx}$ lässt sich nur aussagen, dass es keine generell verschwindende Grösse sein kann, weil p sonst eine Constante wäre und nicht eine Variable, wie wir es verlangen. Daher muss

$$\frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial p} = 0$$

gemacht werden; so dass die Umhüllende durch die beiden Gleichungen

$$y = \varphi(x, p), \quad \frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial p} = 0$$

bestimmt wird, von denen die letztere das zu einer beliebigen Abscisse x gehörende p berechnen lässt, um dann aus der ersteren die Ordinate y zu finden.

Freilich ist es fraglich, ob sich die letzte Gleichung zur Bestimmung von p eignet; denn sie thut es u. a. augenscheinlich nicht, wenn $\varphi(x, p)$ eine ganze algebraische Function ersten Grades von p ist, weil p dann in $\frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial p}$ nicht mehr vorkommt. — Dies hat zur Folge, dass die Gleichung $\frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial p} = 0$ höchstens für einzelne Werthe von x Geltung erlangt, deren Substitution in $y = \varphi(x, p)$ weiter nichts leistet als die Angabe der Ordinaten aller Curven $\eta = \varphi(\xi, p)$ aus der Schar für $\xi = x$.

Fragen wir nach der geometrischen Bedeutung dafür, dass sich die Gleichung $\frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial p} = 0$ zur Bestimmung von p eignet so erhalten wir die Antwort aus der folgenden Überlegung:

Verändert man p um $\varDelta p$, so stellen die Gleichungen

$$\eta = \varphi(\xi, p), \quad \eta = \varphi(\xi, p + \varDelta p)$$

zwei Curven der Schar und (ξ, η) einen Schnittpunkt derselben dar, falls man verlangt, dass ξ und η in beiden Gleichungen einerlei Werth haben. Aus diesen Gleichuugen folgt:

$$\varphi(\xi, p + \varDelta p) - \varphi(\xi, p) = 0, \quad \frac{\varphi(\xi, p + \varDelta p) - \varphi(\xi, p)}{\varDelta p} = 0.$$

Daher ergiebt die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi(\xi, p)}{\partial p} = 0$$

die Abscisse ξ eines Schnittpunktes einer bestimmten Curve $\eta = \varphi(\xi, p)$ aus der Schar mit der in continuirlicher Folge benachbarten Curve $\eta = \varphi(\xi, p + dp)$. Daraus folgt dreierlei: 1) dass die Existenz eines solchen Schnittpunktes Bedingung für die Existenz der umhüllenden Curve ist, 2) dass diese Schnittpunkte

auf der umhüllenden Curve liegen, und 3) dass die Anzahl dieser Schnittpunkte mit der Anzahl umhüllender Curven übereinstimmt, oder — wie man lieber sagt — mit der Anzahl der Äste der umhüllenden Curve.

Die Ordnung des Contactes der Umhüllenden mit der Curvenschar bestimmt sich nach (8) daraus, wie weit

$$\frac{d^m f(x)}{d x^m} = \frac{\partial^m \varphi(x, p)}{\partial x^m}$$

ist, oder — weil das p in der ersten Gleichung (9) $f(x) = \varphi(x, p)$ eine Function von x darstellt — daraus, wie weit

$$\frac{d^m \varphi(x, p)}{d x^m} = \frac{\partial^m \varphi(x, p)}{\partial x^m}$$

ist. Die zweite Gleichung (9) erklärte diese Relation gültig für $m = 1$. Aus

$$\frac{d \varphi(x, p)}{d x} = \frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial x}$$

folgt aber:

$$\frac{d^2 \varphi(x, p)}{d x^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x, p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, p)}{\partial p \cdot \partial x} \cdot \frac{d p}{d x};$$

so dass bei einem Contacte zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, p)}{\partial p \cdot \partial x} = 0$$

sein muss.

Gilt überhaupt für irgend eine Nummer n die Relation

$$\frac{d^n \varphi(x, p)}{d x^n} = \frac{\partial^n \varphi(x, p)}{\partial x^n},$$

so folgt aus ihr:

$$\frac{d^{n+1} \varphi(x, p)}{d x^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1} \varphi(x, p)}{\partial x^{n+1}} + \frac{\partial^{n+1} \varphi(x, p)}{\partial p \cdot \partial x^n} \cdot \frac{d p}{d x};$$

weshalb die linke Seite der letzten Gleichung nur dann mit dem

ersten Gliede der rechten Seite für jedes x übereinstimmt, wenn

$$\frac{\partial^{n+1}\varphi(x,p)}{\partial p\cdot\partial x^n}=0$$

ist.

Die Resultate unserer Untersuchung über die Umhüllung lassen sich so zusammenfassen:

Lehrsatz V.

Die **Umhüllende** einer Curvenschar $y=\varphi(x,p)$ wird durch die Elimination des Parameters p aus den beiden Gleichungen

$$(10)\qquad y=\varphi(x,p),\quad \frac{\partial\varphi(x,p)}{\partial p}=0$$

gefunden. Sie existirt nur dann, wenn die bei stetiger Veränderung des Parameters p auf einander folgenden Curven der Schar sich schneiden; denn sie ist mit dem geometrischen Ort dieser Schnittpunkte identisch und besteht aus so viel Ästen, wie viel Schnittpunkte zwei unendlich benachbarte Curven der Schar geben.

Der Contact der Umhüllenden mit jeder einzelnen Curve der umhüllten Schar ist von derjenigen Ordnung m, bis zu welcher die Gleichungen

$$(11)\quad \frac{\partial\varphi(x,p)}{\partial p}=0,\ \frac{\partial^2\varphi(x,p)}{\partial p\cdot\partial x}=0,\ \frac{\partial^3\varphi(x,p)}{\partial p\cdot\partial x^2}=0,\cdots,\ \frac{\partial^m\varphi(x,p)}{\partial p\cdot\partial x^{m-1}}=0$$

Geltung haben, kann aber mit einzelnen Curven der Schar von höherer Ordnung sein.

Zusatz.

Ist $\psi(x,y,p)=0$ die Gleichung der Curvenschar, so wird die Umhüllende durch die Gleichungen

$$(12)\qquad \psi(x,y,p)=0,\quad \frac{\partial\psi(x,y,p)}{\partial p}=0$$

bestimmt.

Denn man erhält die zweite Gleichung (10) aus der ersten, wenn man bei ihrer Differentiation nach p beide Coordinaten x und y als Constante behandelt.

Beispielsweise besitzen weder eine Schar von parallelen Graden, noch eine Schar von concentrischen Kreisen eine Umhüllende. Jede Curve ist die Umhüllende der Schar ihrer Tangenten.

Als ein besonderes Beispiel wollen wir die Aufgabe auflösen: Die Umhüllende derjenigen Schar von Graden zu finden, deren Abschnitte zwischen den rechtwinkligen Coordinatenaxen die constante Länge c haben.

Zu dem Zwecke stellen wir die Graden der Schar in der Form

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad a^2+b^2=c^2$$

dar. Differentiirt man nach dem Parameter p, von welchem a und b abhängen, so folgt (vergl. (12)):

$$\frac{x}{a^2}\cdot\frac{da}{dp}+\frac{y}{b^2}\cdot\frac{db}{dp}=0, \quad a\cdot\frac{da}{dp}+b\cdot\frac{db}{dp}=0;$$

mithin durch Elimination von $\frac{da}{dp}$ und $\frac{db}{dp}$:

$$\frac{x}{a^3}=\frac{y}{b^3}, \quad b=a\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so erhält man:

$$a=x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right), \quad b=y^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right);$$

was in Verbindung mit $a^2+b^2=c^2$ ergiebt, dass

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$$

die Gleichung der Umhüllenden der fraglichen Schar von Graden ist.

Übrigens ist dies auch die Umhüllende aller concentrischen Ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, bei welchen $a+b=c$ einen constanten Werth besitzt; während die durch dieselbe Gleichung definirten Ellipsen, wenn $a^2+b^2=c^2$ sein soll, von einem Quadrat umhüllt werden, dessen Diagonalen in den Coordinatenaxen liegen und $=2c$ sind.

§ 130.

Krümmungskreis, Evolute, Evolvente.

Definition.

Unter dem **Krümmungskreise einer Curve** $y=f(x)$ **im Punkte** (x, y) wird derjenige Kreis verstanden, welcher sich in der Nähe dieses Punktes enger an die Curve anschmiegt als irgend ein anderer Kreis. Sein Radius heisst der **Krümmungsradius** und sein Centrum das **Krümmungscentrum** der Curve in diesem Punkt.

Bezeichnet man den Krümmungsradius mit r, die Coordinaten des Krümmungscentrums mit ξ und η, endlich den Coordinatenwinkel[1]) mit μ, so kann die Gleichung des Krümmungskreises in der Form

$$(1) \qquad (\xi-x)^2+(\eta-y)^2+2(\xi-x)(\eta-y)\cos\mu=r^2$$

dargestellt werden, weil diese Gleichung nach § 127, (10) ausdrückt, dass der Punkt (x, y) die Entfernung r vom Punkte (ξ, η) hat.

Da der Krümmungskreis demnach zu einer Kreisschar mit drei Parametern ξ, η, r gehört, so kann man die letzteren nach § 129, Lehrs. IV so bestimmen, dass zwischen dem Kreise (1) und der Curve $y=f(x)$ im Punkte (x, y) ein Contact von der zweiten Ordnung besteht, generell aber keinen höheren Contact

[1]) Nimmt man das Coordinatensystem von vorne herein als rechtwinklig an, so vereinfacht sich die Betrachtung in so fern, als dann $\cos\mu=0$, $\sin\mu=1$ ist.

erzwingen. Und dies drückt sich nach § 129, (6) dadurch aus, dass dem Kreise und der Curve $y = f(x)$ im Punkte (x, y) übereinstimmende Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und von $\frac{d^2y}{dx^2}$ zukommen, oder — wenn man nach einer andern Variabeln als x differentiirt — dass im Berührungspunkt die Relationen zwischen x, y, x', y', x'', y'' für die Curve und für ihren Krümmungskreis identisch sind.

Wir werden, um diese Relationen zu erhalten, daher die Gleichung (1) zweimal differentiiren, hierauf die zusammengehörigen Werthe von x, y, x', y', x'', y'' aus der Curve $y = f(x)$ entnehmen und schliesslich ξ, η, r aus den so gewonnenen drei Gleichungen berechnen.

Man findet durch die Differentiation — bei welcher bloss x und y variabel sind:

(2) $(\xi - x) \cdot [x' + y' \cos \mu] + (\eta - y) \cdot [y' + x' \cos \mu] = 0,$

(3) $(\xi - x) \cdot [x'' + y'' \cos \mu] + (\eta - y) \cdot [y'' + x'' \cos \mu] = s'^2,$

wobei zur Abkürzung die Bogenabscisse s gemäss der Relation

(4) $$s'^2 = x'^2 + y'^2 + 2 x' y' \cos \mu$$

(vergl. § 124, (1)) eingeführt ist.

Die Mühe, die beiden Unbekannten $(\xi - x)$ und $(\eta - y)$ direct aus (2) und (3) zu berechnen, ist gering; man kann dabei aber auch als Zwischenstufe die beiden Gleichungen:

(5) $(x'y'' - y'x'') \cdot \{(\xi - x) + (\eta - y) \cos \mu\} = - y' \cdot s'^2,$

(6) $(x'y'' - y'x'') \cdot \{(\xi - x) \cos \mu + (\eta - y)\} = + x' \cdot s'^2$

benutzen, welche aus (2) und (3) hervorgehn, wenn man sie von einander subtrahirt, nachdem sie beziehungsweise mit y'' und y' oder mit x'' und x' multiplicirt sind.

Man erhält:

(7) $$\xi - x = - \frac{s'^2}{\sin \mu^2} \cdot \frac{x' \cos \mu + y'}{x'y'' - y'x''},$$

(8) $$\eta - y = + \frac{s'^2}{\sin \mu^2} \cdot \frac{x' + y' \cos \mu}{x'y'' - y'x''}.$$

Substituirt man diese Werthe in (1) und beachtet bei der Rechnung, dass

$$(x'+y'\cos\mu)^2+(y'+x'\cos\mu)^2-2(x'+y'\cos\mu)(y'+x'\cos\mu)\cos\mu$$
$$=(x'^2+y'^2+2x'y'\cos\mu)\cdot\sin\mu^2=s'^2\cdot\sin\mu^2$$

ist, so ergiebt sich ferner:

$$\text{(9)} \qquad r=\frac{s^3}{(x'y''-y'x'')\cdot\sin\mu}.$$

Hinsichtlich der letzten Formel bleibt noch zu bemerken, dass ursprünglich die Gleichheit der Quadrate ihrer beiden Seiten ermittelt wird, weshalb nur die Gleichheit von r mit dem absoluten Werthe der rechten Seite behauptet werden kann. Wir setzen willkürlich fest, dass r stets als mit demjenigen Vorzeichen behaftet angesehn werden soll, welches ihm die Relation (9) ertheilt, und wollen uns jetzt danach umsehn, welche geometrische Bedeutung in dieser Festsetzung liegt.

Nach § 126, (1) ist

$$(x'y''-y'x'')\cdot\sin\mu=\tau'\cdot s'^2.$$

Setzt man dies in (7), (8) und (9) ein, so folgt:

$$\text{(10)} \qquad \xi-x=-\frac{x'\cos\mu+y'}{\tau'\sin\mu}=-\frac{dx}{d\tau}\cdot\cot\mu-\frac{dy}{d\tau}\cdot\frac{1}{\sin\mu},$$

$$\text{(11)} \qquad \eta-y=+\frac{x'+y'\cos\mu}{\tau'\sin\mu}=+\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{1}{\sin\mu}+\frac{dy}{d\tau}\cdot\cot\mu,$$

$$\text{(12)} \qquad r=+\frac{s'}{\tau'}=+\frac{ds}{d\tau}.\ ^{1)}$$

---

[1]) Den reciproken Werth des Krümmungsradius, nämlich

$$\frac{1}{r}=\frac{d\tau}{ds},$$

nennt man das Mass der Krümmung oder schlechthin die Krümmung der Curve im Punkte (x, y). Diese Benennung leitet ihren Ursprung aus der folgenden Erwägung ab:

Jeder einzelne Kreis ist überall gleich krumm, weil er sich in sich selbst verschieben lässt, und die verschiedenen Kreise sind desto krummer,

Aus der letzten Gleichung geht hervor, dass wir r als positiv annehmen, wenn die Bogenabscisse s und der Richtungswinkel τ ihrer Verlängerung gleichzeitig wachsen, d. h. nach § 126, wenn die Verlängerung der Bogenabscisse rechtläufig gegen ihre Tangente liegt. Nimmt man hinzu, dass der Krümmungskreis nach § 129, Lehrs. III auf derselben Seite der Tangente liegen muss, wie die Curve, so haben wir demnach die folgende Bestimmung getroffen:

Wir sehn den Krümmungsradius r einer Curve als **positiv** oder als **negativ** an, je nachdem die Verlängerung der Bogenabscisse s gegen den sich ihr anschmiegenden Theil der Tangente **rechtläufig** oder **rückläufig** liegt. — In einem rechtwinkligen Coordinatensystem, welches seinen Nullpunkt im Berührungspunkte hat und den sich an die Bogenabscissenaxe anschmiegenden Theil der Tangente als Abscissenaxe besitzt, ist r die **positive** oder **negative** Ordinate des Krümmungscentrums, je nachdem die beiden Coordinatensysteme **isotrop** oder **antitrop** liegen.

---

je kleiner ihr Radius r ist. Daher nimmt die Krümmung in demselben Sinne zu, wie der Werth des Bruches $\frac{1}{r}$. Kommt man also überein, zu sagen, eine Curve sei im Punkte (x, y) mit ihrem Krümmungskreise **gleich krumm**, so wird der qualitative Begriff der Krümmung einer Curve in der Nähe eines Punktes durch die Quantität $\frac{1}{r}$ messbar — d. i. der Veranschaulichung vermittelst mitgetheilter Zahlen zugänglich — in ähnlicher Weise, wie die Farbe durch die Länge der Lichtwelle.

Freilich leiden die beiden erwähnten Reductionen von Qualitäten und Quantitäten auf einander an derselben Unvollkommenheit, dass man zum Zwecke der vollständigen Interpretation der mitgetheilten Zahlen noch die Längeneinheit vor Augen haben muss, auf welche sich die Zahlen beziehn. Denn dass das Mass der Krümmung $=\frac{1}{2}$, der Krümmungsradius also $=2$ ist, befähigt nicht zur Construction des gleich krummen Kreises, wenn man die Längeneinheit nicht kennt, welche der numerischen Angabe zu Grunde liegt. Mit andern Worten: Dieselbe Gleichung $y=f(x)$ ergiebt bei verschiedenen Längeneinheiten nicht congruente, sondern nur ähnliche Curven.

Hinsichtlich der geometrischen Bedeutung der Gleichungen (2) und (3) verlohnt es sich, noch Folgendes hervorzuheben:

Die Gleichung (2) stimmt mit der Gleichung § 128, (9) der Normale von $y = f(x)$ überein, zeigt also an, dass das Krümmungscentrum auf der Normale des fraglichen Curvenpunktes liegt. Die Gleichung (3) spricht daher aus, dass das Krümmungscentrum die Grenzlage des Schnittpunktes zweier unendlich genäherten Normalen ist; denn bezeichnet man die Gleichung (2) der Abkürzung wegen als $\varphi(x, y; \xi, \eta) = 0$, so hat die Gleichung der benachbarten Normale die Form $\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y; \xi, \eta) = 0$, und der Schnittpunkt (ξ, η) beider Normalen erfüllt die Gleichung $\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y; \xi, \eta) - \varphi(x, y; \xi, \eta) = 0$, welche in (3) übergeht, wenn nach der Division mit dem Zuwachs der unabhängigen Variabeln der Grenzwerth bestimmt wird. — Das Erstere ergiebt sich übrigens auch aus der Erwägung, dass der Krümmungskreis einerlei Tangente mit der Curve im Berührungspunkte haben muss; und hieraus folgt dann das Zweite ebenfalls.[1])

Werden rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt, so vereinfacht sich die Rechnung wesentlich, denn die Ausgangsgleichungen (1), (2) und (3) lauten alsdann:

$$(13) \qquad (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = r^2,$$

$$(14) \qquad (\xi - x) \cdot x' + (\eta - y) \cdot y' = 0,$$

$$(15) \qquad (\xi - x) \cdot x'' + (\eta - y) \cdot y'' = s'^2 = x'^2 + y'^2.$$

[1]) Geht man von diesen Erwägungen aus, so folgt, weil die Tangente und die Normale sich um gleiche Winkel drehen, nach dem Satze über Radius, Bogen und Centriwinkel beim Kreise ohne Weiteres:

$$r = \pm \frac{ds}{d\tau};$$

folglich muss dieselbe Relation gelten, wenn man unter s die Bogenabscisse der Curve $y = f(x)$ versteht.

Wählen wir das obere Vorzeichen und machen die oben ausgeführten Erwägungen über die Bedeutung dieser Wahl, so erkennen wir, dass der Richtungswinkel des vom Punkte (x, y) zum Krümmungscentrum (ξ, η) führenden Strahls $= \tau \pm \frac{\pi}{2}$ ist, wo das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je

Die Resultate bei rechtwinkligen Coordinaten sind:

$$(16)\quad \xi - x = -\frac{y' s'^2}{x'y'' - y'x''} = -\frac{dy}{d\tau} = -\frac{dy}{dx}\cdot\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] : \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$(17)\quad \eta - y = +\frac{x' s'^2}{x'y'' - y'x''} = +\frac{dx}{d\tau} = +\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] : \frac{d^2y}{dx^2};$$

$$(18)\qquad r = \frac{s'^3}{x'y'' - y'x''} = \frac{ds}{d\tau} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Stellen wir uns jetzt vor, dass der Berührungspunkt der Curve $y = f(x)$ mit ihrem Krümmungskreise (1) auf der ersteren gleite. so wird das Krümmungscentrum (ξ, η) seinen Ort ebenfalls ändern und dabei eine stetig zusammenhängende Curve beschreiben, so lange ξ und η stetige Functionen von x und y bleiben. Dies findet jedenfalls statt, so lange $\frac{d^2y}{dx^2}$ sich stetig ändert und nicht verschwindet, während die Stetigkeit der Bahn des Krümmungs-

---

nachdem r einen positiven oder einen negativen Werth annimmt. Hieraus folgt nach § 121, (6):

$$\frac{\xi - x}{\sin\left(\mu - \tau + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\eta - y}{\sin\left(\tau \pm \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pm r}{\sin\mu},$$

$$\frac{\xi - x}{-\cos(\mu - \tau)} = \frac{\eta - y}{+\cos\tau} = \frac{+r}{\sin\mu};$$

$$\xi - x = -\frac{ds}{d\tau}\cdot\frac{\cos(\mu - \tau)}{\sin\mu},$$

$$\eta - y = +\frac{ds}{d\tau}\cdot\frac{\cos\tau}{\sin\mu};$$

was wegen der Gleichung § 124, (2) mit den obigen Gleichungen (10) und (11) übereinstimmt.

Diese als einfacher und eleganter erscheinende Ableitung haben wir im Texte nicht gewählt, weil die Einfachheit und Eleganz in der That nicht vorhanden sind, falls die Schlüsse überall völlig sicher bleiben sollen.

centrums überall unterbrochen wird, wo $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ist — vergl. (7), (8) und (16), (17).

Benutzen wir von jetzt ab der grösseren Bequemlichkeit wegen nur rechtwinklige Coordinaten — wodurch wir uns auf das Formelsystem (13) bis (18) beschränken — und differentiiren die Gleichung (14), indem wir ξ und η ausser x und y als veränderlich ansehn, so erhalten wir das Resultat, dass die Veränderungen von ξ und η der Gleichung

$$\xi'\cdot x'+\eta'\cdot y'+(\xi-x)\cdot x''+(\eta-y)\cdot y''=s'^2$$

genügen, dass also — wie man vermittelst der Subtraction der Gleichung (15) findet — die Gleichung

(19) $$\xi'\cdot x'+\eta'\cdot y'=0,\quad \frac{d\eta}{d\xi}\cdot\frac{dy}{dx}+1=0$$

erfüllt wird.

Dieselbe bedeutet nach § 127, (4), da $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d\eta}{d\xi}$ die Tangenten der Richtungswinkel der Berührenden an die Curve $y=f(x)$ im Punkte (x, y) und an die Bahn des Krümmungscentrums im entsprechenden Punkte (ξ,η) sind, dass diese beiden Berührenden auf einander senkrecht stehn, dass also die Normale der Curve $y=f(x)$ Tangente der Bahn des Krümmungscentrums ist.

Dasselbe Resultat folgt auch daraus, dass die Bahn des Krümmungscentrums der Curve $y=f(x)$ nach § 129, Lehrs. V die Umhüllende der Schar ihrer Normalen ist, weil die unendlich benachbarten Normalen sich — nach (3) oder (15) — im Krümmungscentrum schneiden.

Die Bogenabscisse σ der Bahn des Krümmungscentrums steht in einem eigenthümlichen Zusammenhang mit dem Krümmungsradius r. Differentiirt man nämlich die Gleichung (13), so folgt:

$$(\xi-x)(\xi'-x')+(\eta-y)(\eta'-y')=rr',$$

was, nachdem man die Gleichung (14) addirt hat, für die Veränderungen von ξ, η und r ergiebt:

$$(\xi-x)\cdot\xi'+(\eta-y)\cdot\eta'=rr',$$

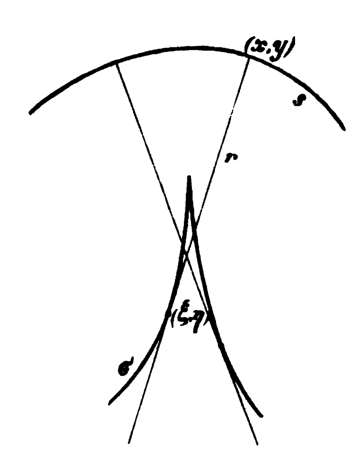
$$\frac{r'}{\sigma'}=\frac{\xi-x}{r}\cdot\frac{\xi'}{\sigma'}+\frac{\eta-y}{r}\cdot\frac{\eta'}{\sigma'}.$$

Die rechte Seite dieser letzten Gleichung ist aber der Cosinus desjenigen Winkels, welchen die Richtung des Krümmungsradius r vom Punkte (x, y) aus mit der Richtung des wachsenden σ vom Punkte (ξ, η) aus einschliesst — vergl. § 127, (1) und § 122, (7), so wie § 124, (2). Da dieser Winkel nach dem Obigen $= 0$ oder $= \pi$ ist, je nachdem r und σ gleichzeitig wachsen und abnehmen oder dies nicht thun, so ergiebt sich in demselben Sinne

(19) $$r' = \pm \sigma'.$$

Hieraus folgt durch Integration unter Beziehung der oberen und der unteren Vorzeichen auf einander:

(20) $$\begin{cases} r = \pm \sigma + \text{Const.}, \\ \Delta r = \pm \Delta \sigma, \quad \text{abs} \cdot \Delta r = \text{abs} \cdot \Delta \sigma. \end{cases}$$



Da mithin die absoluten Werthe der Veränderungen von r und σ einander gleich sind, so zeigt dies, dass (x, y) als ein bestimmter Punkt eines auf die Bahn des Krümmungscentrums bis zum Punkte (ξ, η) aufgelegten (biegsamen aber nicht ausdehnsamen) Fadens, welcher in der Richtung von deren Tangente gespannt erhalten wird, die Curve $y = f(x)$ beschreibt, sobald man den Faden auf die Bahn des Krümmungscentrums (ξ, η) weiter auf- oder von ihr abwickelt.

Andere Punkte des Fadens beschreiben dabei andere Curven. Und es ist auch nicht nöthig, nur solche Punkte ins Auge zu fassen, welche in der tangentiellen Verlängerung des Fadens liegen, sondern man kann sich anstatt der letzteren eine starre Grade mit einem auf ihr festen Punkt denken, welche sich auf der Bahn des Krümmungscentrums — ohne zu gleiten — wälzt.

Hieraus entspringen die folgenden Benennungen und Begriffe:

Definition.

Die Bahn des Krümmungscentrums einer Curve heisst die **Evolute** oder **Abgewickelte** der letzteren. Die Bahn, welche ein beliebiger Punkt einer starren Graden beschreibt, wenn diese sich als Tangente auf einer Curve wälzt, heisst eine **Evolvente** oder **Abwickelnde** der letzteren.

Lehrsatz I.

Die Coordinaten ξ und η der **Evolute** einer Curve $y = f(x)$ werden durch die Gleichungen (7) und (8) oder (10) und (11) oder — bei einem rechtwinkligen Coordinatensystem — durch die Gleichungen (16) und (17) bestimmt, die abgewickelte Fadenlänge r durch (9), (12) oder (18). Die letzteren rectificiren die Evolute (ohne Integration) in Verbindung mit (20).

In Bezug auf die Rectification der Evolvente bleibt noch zu erwähnen übrig, dass es **nicht** gestattet ist, in (20) oder in

$$(21) \qquad \sigma = + r + \text{Const.}$$

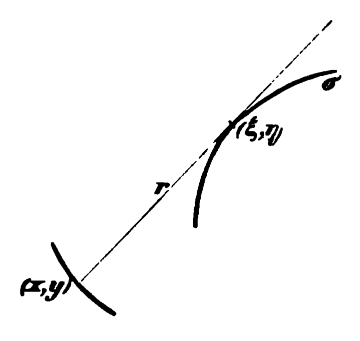
das beliebig gelassene Vorzeichen einfürallemal bei einer gegebenen Evolvente zu wählen. Man muss im Gegentheil, falls der Ausdruck für den Evolutenbogen σ bei fortschreitender Abwickelung wachsen soll, überall dort mit dem Vorzeichen vor r in (21) wechseln, wo

$$r' = s''$$

sein Vorzeichen ändert, d. h.: wo r ein Maximum oder ein Minimum ist.

Auf die interessanten Beziehungen, welche die Evolute der Evolute, deren Evolute und überhaupt die Evoluten höherer Ordnung zur Grundcurve und unter sich haben, können wir hier nicht näher eingehn. Dieselben sind zum Theil von sehr einfacher Natur. Z. B. werden die Krümmungsradien der Reihe nach offenbar durch $\frac{ds}{d\tau}, \frac{d^2s}{d\tau^2}, \frac{d^3s}{d\tau^3}, \ldots$ dargestellt, was den Coefficienten der Taylorschen Entwickelung von s nach τ eine anschauliche Bedeutung giebt.

Nach dem Obigen entstehn aus einer Curve $\eta = \varphi(\xi)$ unbeschränkt viele Evolventen, da jeder Punkt (x, y) der abwickelnden Tangente eine besondere Evolvente beschreibt.



Nimmt man die Bogenabscisse σ als aus solcher Richtung kommend an, dass der vom Berührungspunkt (ξ, η) nach dem Punkte (x, y) hin führende Theil der Tangente zur gradlinig gespannten Verlängerung von σ wird, und bezeichnet diese Verlängerung durch r, so ist nach § 121, (7):

(22) $$\frac{x-\xi}{d\xi} = \frac{y-\eta}{d\eta} = \frac{r}{d\sigma},$$

— weil $\frac{d\xi}{d\sigma}$ und $\frac{d\eta}{d\sigma}$ den Cosinus und den Sinus des Richtungswinkels von r bedeuten — und ausserdem nach dem Begriff der Abwickelung:

(23) $$r + \sigma = \text{Const.}, \quad \frac{dr}{d\sigma} = -1.$$

Differentiirt man mit Berücksichtigung des zuletzt angeführten Werthes die beiden aus (22) folgenden Gleichungen

$$x = \xi + r \cdot \frac{d\xi}{d\sigma}, \quad y = \eta + r \cdot \frac{d\eta}{d\sigma},$$

so erhält man:

$$\frac{dx}{d\sigma} = r \cdot \frac{d^2\xi}{d\sigma^2}, \quad \frac{dy}{d\sigma} = r \cdot \frac{d^2\eta}{d\sigma^2},$$

und hieraus:

$$\frac{dx}{d\sigma} \cdot \frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{dy}{d\sigma} \cdot \frac{d\eta}{d\sigma} = r \cdot \left\{ \frac{d\xi}{d\sigma} \cdot \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + \frac{d\eta}{d\sigma} \cdot \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \right\}.$$

Es folgt aber aus der bekannten Relation

$$\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 = 1,$$

dass der Inhalt der letzten Klammer $= 0$, mithin dass

$$x' \cdot \xi' + y' \cdot \eta' = 0, \quad \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = -1$$

ist.

Das Letztere lässt sich nach § 127, (4) so interpretiren: Jede Tangente einer Curve ist die gemeinsame Normale ihrer sämmtlichen Evolventen, der Berührungspunkt das gemeinsame Krümmungscentrum der letzteren und die Curve selbst deren gemeinsame Evolute.

Man pflegt Curven, welche lauter gemeinsame Normalen besitzen, parallel zu nennen. Wir wollen uns davon überzeugen, dass sie Evolventen einer einzigen Curve sein müssen — was sich besser so aussprechen lässt, dass sie auf den gemeinsamen Normalen einen constanten Abstand von einander haben, da dann die parallelen Graden mit eingeschlossen werden, welche keine Evolute haben.

Zu dem Zweck differentiiren wir die Gleichung

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2,$$

welche ausdrückt, dass die Entfernung der beiden Punkte (x, y) und (x_1, y_1) mit r benannt werden soll, nach irgend einer Variabeln, welche die gleichzeitig vorzunehmenden Verschiebungen dieser Punkte auf irgend welchen Linien charakterisirt. Es folgt:

$$(x - x_1) \cdot (x' - x_1') + (y - y_1) \cdot (y' - y_1') = r \cdot r'.$$

Die Bedingung, dass die beiden Punkte (x, y) und (x_1, y_1) auf einer einzigen Normale dieser beiden Linien liegen, drückt sich nach § 128, (9′) so aus:

$$(x - x_1) \cdot x' + (y - y_1) \cdot y' = 0,$$
$$(x - x_1) \cdot x_1' + (y - y_1) \cdot y_1' = 0.$$

Mithin ergiebt sich:

$$r \cdot r' = 0,$$

oder weil der Abstand r generell nicht verschwindet:

$$r' = 0, \quad r = \text{Const.}$$

Damit ist bewiesen, dass je zwei parallele Curven auf ihren gemeinsamen Normalen einen constanten Abstand von einander haben, und dass die Umhüllende der gemeinsamen Normalen die gemeinsame Evolute der parallelen Curven ist.

Endlich wollen wir noch die Gleichung der Evolvente einer Curve aufstellen. Dieselbe ist offenbar nichts anderes als das Eliminationsresultat von ξ, η, r und σ aus (22), (23) und der Relation

$$\sigma'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + 2 \cdot \xi' \eta' \cos\mu,$$

welche zwischen ξ, η und σ nach § 124, (1) besteht. Die letztere erfordert jedenfalls eine Integration, was die praktische Ausführung (im Gegensatz zur Bestimmung der Evolute) erschwert. — Da die Relationen (22) und (23) bei jedem Coordinatenwinkel gelten, so ergiebt sich demnach der

Lehrsatz II.

Bestimmt man die Bogenabscisse σ der Curve $\eta = \varphi(\xi)$ so, dass sie in der Richtung des gespannten tangentialen Fadens wächst, so erhält man die Coordinaten x und y einer Evolvente aus der Relation

$$\frac{x-\xi}{d\xi} = \frac{y-\eta}{d\eta} = \frac{c-\sigma}{d\sigma}, \tag{24}$$

d. i. aus den Gleichungen

$$x = \xi - (\sigma - c) \cdot \frac{d\xi}{d\sigma}, \tag{25}$$

$$y = \eta - (\sigma - c) \cdot \frac{d\eta}{d\sigma}, \tag{26}$$

$$1 = \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 + 2\frac{d\xi}{d\sigma}\frac{d\eta}{d\sigma}\cos\mu. \tag{27}$$

Die verschiedenen Evolventen unterscheiden sich durch verschiedene Werthe der Constanten c.

§ 131.

Beispiele für die Krümmungskreise, Evoluten und Evolventen.

I.

Der Krümmungsradius der Kegelschnitte.

Nach § 123, IV ist

(1) $$v = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

die focale Polargleichung sämmtlicher Kegelschnitte; die letzteren unterscheiden sich nur durch die Werthe der Constanten ε und p.

In rechtwinkligen Coordinaten folgt hieraus, wenn man $v \cos \varphi = x$, $v^2 = x^2 + y^2$ einführt:

(2) $$y^2 = p^2 - 2 p \varepsilon x - (1 - \varepsilon^2) x^2.$$

Durch Differentiation ergiebt sich:

$$y \frac{dy}{dx} = - p \varepsilon - (1 - \varepsilon^2) x,$$

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -(1 - \varepsilon^2).$$

Aus der letzten Gleichung folgt mit Benutzung der vorangehenden:

$$\begin{aligned} y^3 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} &= -(1 - \varepsilon^2) y^2 - \left(y \frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &= - p^2 (1 - \varepsilon^2) + 2 p \varepsilon (1 - \varepsilon^2) x + (1 - \varepsilon^2)^2 x^2 \\ &\quad - p^2 \varepsilon^2 \qquad - 2 p \varepsilon (1 - \varepsilon^2) x - (1 - \varepsilon^2)^2 x^2 \\ &= - p^2 \end{aligned}$$

und demnach auch:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \varepsilon^2 - y \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon^2 + \frac{p^2}{y^2} = \frac{p^2 + \varepsilon^2 y^2}{y^2}.$$

Mithin erhält man nach § 130, (18) für den Krümmungsradius r den Ausdruck:

$$(3) \qquad r = -\frac{(p^2 + \varepsilon^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = -p \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon^2 y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

oder, wenn man die Polarcoordinaten restituirt:

$$(4) \qquad r = -\frac{v^3}{p^2} \cdot (1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos\varphi)^{\frac{3}{2}}.$$

Die Subnormale n auf der Abscissenaxe wird nach § 122, (4) durch die Formel

$$n = y \frac{dy}{dx}$$

ausgedrückt. Hieraus folgt für denjenigen Theil $\mathfrak{N}$ der Normale, welcher zwischen der Curve und der Abscissenaxe liegt:

$$\mathfrak{N}^2 = y^2 + n^2 = y^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Bei den Kegelschnitten ist daher

$$(5) \qquad \mathfrak{N}^2 = p^2 + \varepsilon^2 y^2,$$

was vermittelst der Substitution in (3) zu dem Resultate führt: Giebt man dem zwischen der Curve und der Abscissenaxe liegenden Theil $\mathfrak{N}$ der Normale einerlei Vorzeichen mit dem Krümmungsradius r, so wird der letztere bei allen Kegelschnitten durch die Formel

$$(6) \qquad r = \frac{\mathfrak{N}^3}{p^2}$$ [1]

dargestellt.

---

[1]) Bezeichnet man durch $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{T}_1$ die entsprechenden Theile der Normale und der Tangente bei Polarcoordinaten und durch ω den Richtungswinkel der Tangente, so ist nach § 123, IV:

$$v \cdot \mathfrak{N} = p \cdot \mathfrak{N}_1 = \varepsilon y \cdot \mathfrak{T}_1, \qquad v = \mathfrak{N}_1 \cdot \sin\omega$$

mithin u. a. auch:

$$r = p \cdot \left(\frac{\mathfrak{N}_1}{v}\right)^3 = \frac{p}{\sin\omega^3}.$$

Aus der Gleichung (6) folgt, dass die absoluten Werthe von r und $\mathfrak{R}$ gleichzeitig wachsen und abnehmen, und aus (5), dass diese Veränderungen gleichzeitig mit den analogen Veränderungen von y^2 vorgehn. .

Daher besitzt der Krümmungsradius **bei allen Kegelschnitten** einen Minimalwerth $\text{abs}\cdot r = p$ in den Scheitelpunkten der Hauptaxe (in denen $y = 0$ wird), und die Evolute an solcher Stelle eine Spitze (weil r die tangentiale Entfernung der Evolute vom Kegelschnitt ist).

Wir haben oben ferner gefunden:

$$\frac{d \cdot y^2}{dx} = -2p\varepsilon - 2(1-\varepsilon^2)x,$$

$$\frac{d^2 \cdot y^2}{dx} = -2(1-\varepsilon^2).$$

Bei der Parabel verschwindet $\frac{d \cdot y^2}{dx}$ nicht, weil sie durch $\varepsilon = 1$ charakterisirt ist, was $\frac{d \cdot y^2}{dx} = -2p\varepsilon$ macht und demnach anzeigt, dass der Krümmungsradius vom Werthe p aus wächst, ohne jemals wieder abzunehmen.

Übrigens wächst $\mathfrak{R}$, und demnach auch r, bei unendlich wachsendem y^2 unendlich. Dasselbe muss auch bei der Hyperbel geschehn, welche ebenfalls die unendliche Vergrösserung von y zulässt.

Parabel und Hyperbel also werden desto weniger krumm, je weiter man sich vom Scheitel entfernt. Bei der Ellipse dagegen giebt es Minima der Krümmung, d. i. Maxima von $\text{abs}\cdot r$. Denn verschwindet $\frac{d \cdot y^2}{dx}$, so ist $x = -\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$ und $y^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$, was nur bei Ellipsen einen reellen Werth von y ergiebt, weil nur bei ihnen $1-\varepsilon^2 > 0$ ist. Das Eintreten eines Maximums von y^2 und r ist gesichert durch den negativen Werth von $\frac{d^2 \cdot y^2}{dx^2}$.

Diese Minimalkrümmung besitzt die Ellipse in den Scheiteln der kleinen Axe; denn substituirt man in ihrer Gleichung (2)

$$x = x_1 - \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2},$$

so erhält man die Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{x_1^2}{\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}} = 1.$$

Und der Krümmungsradius erlangt an der Stelle der Minimalkrümmung den Werth:

$$r = \frac{p}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Selbstverständlich liegen auch hier Spitzen der Evolute.

Anmerkung.

Die Gleichung der Evolute eines beliebigen Kegelschnitts würde sich durch Substitution der gefundenen Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in § 130, (17) und (18) ohne Weiteres aufstellen lassen. Wir ziehn es jedoch vor, die verschiedenen Classen der Kegelschnitte gesondert zu betrachten, weil ausser der schon erwähnten Lage der Spitzen nur wenig wichtige gemeinsame Eigenschaften gefunden werden.

II.

Evolute der Parabel.

Die Scheitelgleichung der Parabel

(7) $$y^2 = 2px$$

ergiebt:

$$p \cdot \frac{dx}{dy} = y, \quad p \cdot \frac{d^2x}{dy^2} = 1.$$

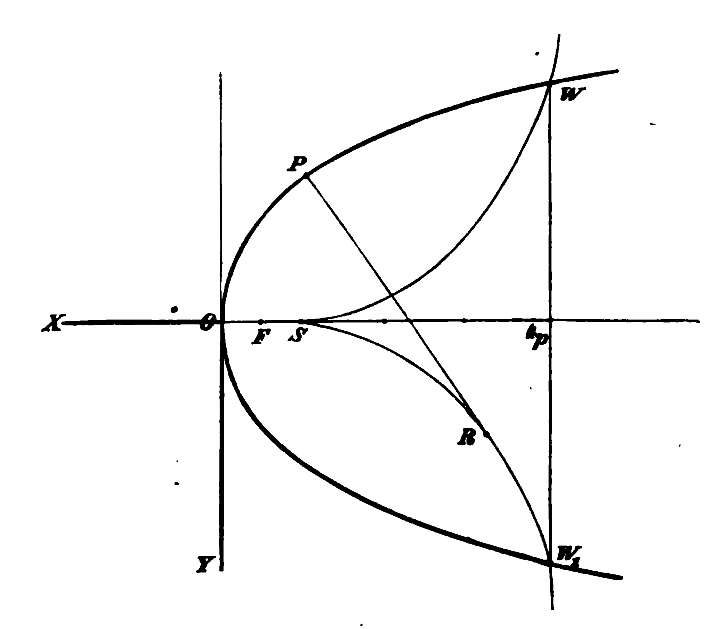
Setzt man diese Werthe in § 130, (17) und (18) ein, so erhält man die Gleichungen der Parabelevolute:

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi = p + \dfrac{3y^2}{2p} = p + 3x, \\ \eta = -\dfrac{y^3}{p^2} = -2 \cdot \dfrac{xy}{p} \end{cases}$$

oder:

$$(9)\qquad 27p \cdot \eta^2 = 8 \cdot (\xi - p)^3.$$

Demnach ist $\xi = p = OS = 2 \cdot OF$ der kleinste Werth, welchen die Abscisse der Parabelevolute annehmen kann, was damit über-



einstimmt, dass nach I der Krümmungsradius r seinen kleinsten Werth p im Scheitel O annimmt.

Da die erste Derivirte, nämlich

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{\frac{2(\xi - p)}{3p}},$$

für $\xi = p$ verschwindet, so ist OS die Tangente der Evolute in S, was eine Spitze der letzteren in S bedingt.

Ferner erhält man:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{6p(\xi - p)}},$$

$$\eta \cdot \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{2(\xi - p)}{9 \cdot \sqrt{p}}.$$

Der letzte Ausdruck hat überall einen positiven Werth. Mithin ist die Evolute überall gegen die Abscissenaxe convex.

Da der Krümmungsradius PR der Parabel — absolut genommen — nach (3) und (8) den Werth

$$PR = p\left(1 + \frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}} = p\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{\xi - p}{p}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(p + 2\xi)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3p}}$$

hat, so ist die Länge des Evolutenbogens

(10) $$SR = PR - OS = \frac{(p + 2\xi)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3p}} - p,$$

wo ξ die Abscisse des Punktes R bedeutet.

An den Stellen, welche die Parabel (7) und ihre Evolute (9) gemein haben, müssen die beiden Gleichungen

$$y^2 = 2px, \quad 27py^2 = 8(x - p)^3$$

gleichzeitig erfüllt werden. Durch die Elimination von y ergiebt sich aus ihnen:

$$4(x - p)^3 = 27p^2x.$$

Diese Gleichung hat offenbar nur eine reelle Wurzel $x = 4p$. Dazu gehört $y = \pm 2p \cdot \sqrt{2}$.

Der Evolutenbogen von der Spitze S bis zu einem solchen Schnittpunkt W mit der Parabel ist nach (10) demnach:

$$SW = p \cdot (3\sqrt{3} - 1).$$

III.

Evolute der Ellipse.

Aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse

(11) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

folgt durch Differentiation:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

Substituirt man diese Werthe in § 130, (16), (17) und (18), so erhält man vermittelst einfacher Rechnung:

(12) $$\begin{cases} \xi = + \dfrac{e^2 x^3}{a^4}, \\ \eta = - \dfrac{e^2 y^3}{b^4}, \end{cases}$$

(13) $$r = -\frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Setzt man aus (12) die Werthe

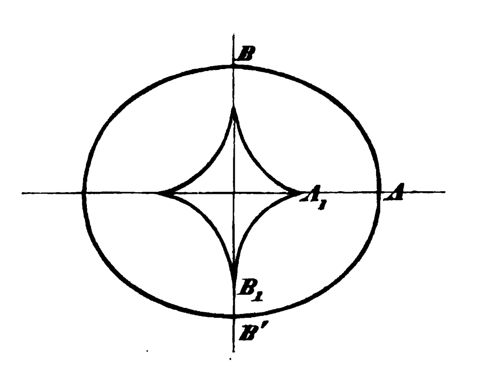
$$x = + a \cdot \left(\frac{a \xi}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y = - b \cdot \left(\frac{b \eta}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

in (11) ein, so ergiebt sich

(14) $$\left(\frac{\xi}{\frac{e^2}{a}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{\frac{e^2}{b}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

als Gleichung der Evolute der Ellipse.

Sie hat die hierneben gezeichnete sternförmige Gestalt mit vier Spitzen, in denen die Hauptaxen der Ellipse Tangenten sind. Der Bogen $A_1 B_1$, welcher die Evolute des Ellipsenquadranten AB ist, schneidet den Ellipsenquadranten AB', falls $e^2 = a^2 - b^2$ einen hinreichend grossen Werth hat.



Dies tritt nach (14) ein, sobald $\frac{e^2}{b} > b$, $a^2 > 2b^2$ ist. Die Lage der Schnittpunkte findet man durch die Auflösung einer Gleichung dritten Grades für die Unbekannte $x^{\frac{2}{3}}$.

Die Länge des Evolutenquadranten $A_1 B_1$ ist $= BB_1 - AA_1$. was nach (13) ergiebt:

$$A_1 B_1 = \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{a b}. \tag{15}$$

IV.

Evolute der Hyperbel.

Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{16}$$

geht aus derjenigen der Ellipse hervor, wenn man $(-b^2)$ für b^2 substituirt. Daher gilt die Formel (13) in ungeänderter Gestalt nämlich

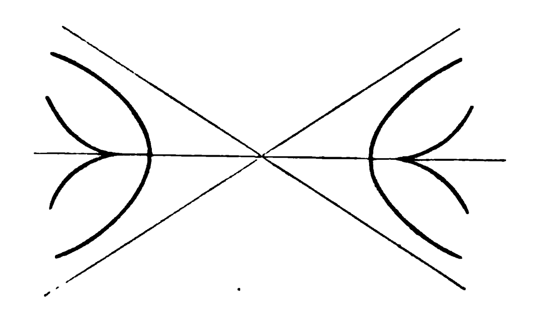
$$r = -\frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}, \tag{17}$$

auch für den Krümmungsradius der Hyperbel, und die Gleichung der Evolute der Hyperbel erscheint in der Form

$$\left[\frac{\xi}{\frac{e^2}{a}}\right]^{\frac{2}{3}} - \left[\frac{\eta}{\frac{e^2}{b}}\right]^{\frac{2}{3}} = 1, \tag{18}$$

wo nun $e^2 = a^2 + b^2$ ist.

Die Evolute der Hyperbel besteht aus zwei Zweigen, wie die Hyperbel selbst. Sie ist überall gegen die Abscissenaxe convex und schneidet, falls $a > b$ ist, die Asymptotenaxen der Hyperbel in den vier Punkten, deren Coordinaten



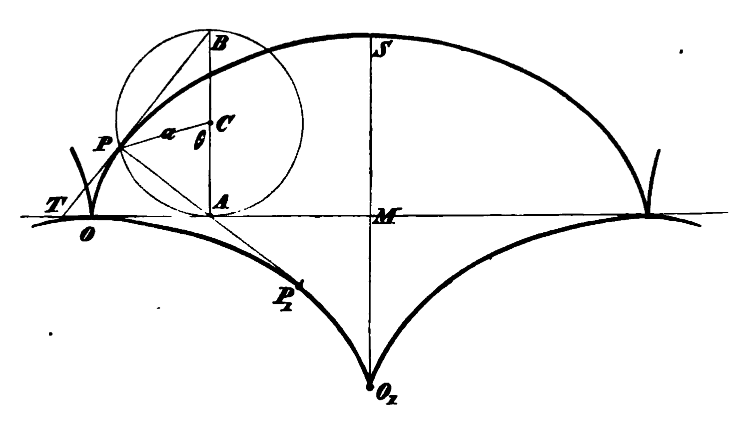
$$\xi = \pm \frac{a e^2}{\left(a^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \eta = \pm \frac{b e^2}{\left(a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

sind. Ist $a \leqq b$, so giebt es keinen Schnittpunkt; denn für $a = b$ ist die Grenzrichtung der Tangente der Evolute mit der Asymptotenrichtung parallel, für $a < b$ aber entfernt sich die Evolute von der Asymptote der Hyperbel.

V.

Evolute der gemeinen Cycloide.

Nach § 122, V ist — indem jetzt a den Radius des Wälzungskreises und θ den Wälzungswinkel bedeute:



$$x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta);$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta;$$

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 4a^2\sin\frac{\theta}{2}^2, \quad \frac{ds}{d\theta} = +2a\sin\frac{\theta}{2}.$$

Für den Richtungswinkel τ der Tangente BPT ergiebt sich aus diesen Formeln, wie wir schon früher gesehn haben:

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}, \quad d\tau = -\frac{1}{2}d\theta;$$

mithin für den Krümmungsradius r nach § 130, (18):

$$r = \frac{ds}{d\tau} = -4a\sin\frac{\theta}{2}.$$

Da aber die Normale $PA = 2a\sin\frac{\theta}{2}$ ist, so folgt:

Man erhält das Krümmungscentrum P_1 der Cycloide, wenn man die Normale PA über A hinaus verdoppelt.

Für die Coordinaten ξ und η des Krümmungscentrums ergiebt sich demnach aus § 130, (16) und (17) zunächst:

$$\xi = x - \frac{dy}{d\tau} = a(\theta - \sin\theta) + 2a\sin\theta = a(\theta + \sin\theta),$$

$$\eta = y + \frac{dx}{d\tau} = a(1 - \cos\theta) - 2a(1 - \cos\theta) = -a(1 - \cos\theta).$$

Verlegt man nun noch den Coordinatenanfang nach der Stelle O_1, welche das Krümmungscentrum für den Scheitel S der Cycloide anzeigt, so erhält man zur Bestimmung der neuen Coordinaten ξ_1 und η_1 von P_1:

$$\xi = \quad O M + \xi_1 = \quad \pi a + \xi_1,$$
$$\eta = - O_1 M + \eta_1 = - 2a + \eta_1;$$

mithin:

$$-\xi_1 = \pi a - \xi = a\left[(\pi - \theta) - \sin(\pi - \theta)\right],$$
$$+\eta_1 = 2a + \eta = a\left[\quad 1 \quad - \cos(\pi - \theta)\right].$$

D. h.: Die Evolute der Cycloide ist eine congruente Cycloide, welche von der Basis der ersteren in ihrem Scheitel bei O berührt wird.

Für die halbe Cycloide ergiebt sich demnach, was wir früher auf anderm Wege gefunden haben:

$$O S = O_1 O = O_1 S = 4a.$$

VI.

Krümmungsradius der Lemniscate.

Aus der Polargleichung der Lemniscate

$$v = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

folgt:

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = v^2 + \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi} = \frac{a^4}{v^2}.$$

Der Richtungswinkel der Tangente gegen den Vector hat nach § 123, V den Werth

$$\omega = 2\varphi + \frac{\pi}{2},$$

deren Richtungswinkel gegen die Abscissenaxe also den Werth:

$$\tau = \varphi + \omega = 3\varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus in Verbindung mit dem Obigen folgt für den Krümmungsradius

$$r = \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{3} \cdot \frac{ds}{d\varphi} = \frac{a^2}{3v}.$$

Demnach ist der Krümmungsradius der Lemniscate ihrem Vector umgekehrt proportional. Er besitzt seinen Minimalwerth in den Scheiteln, woselbst er $= \frac{1}{3} a$ ist.

VII.

Krümmungskreis und Evolute der Curve $y = p x^{2-\alpha}$.

Da

$$\frac{dy}{dx} = (2-\alpha) p x^{1-\alpha}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = (2-\alpha)(1-\alpha) p x^{-\alpha}$$

ist, so folgt — unter Annahme eines rechtwinkligen Coordinatensystems — aus den Formeln (16), (17) und (18) des § 130:

$$\xi = -\frac{\alpha x + (2-\alpha)^2 p^2 x^{3-2\alpha}}{1-\alpha},$$

$$\eta = +\frac{x^\alpha + (2-\alpha)(3-2\alpha) p^2 x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha) p},$$

$$r = \frac{\left\{ x^{\frac{2}{3}\alpha} + (2-\alpha)^2 p^2 x^{\frac{2}{3}(3-2\alpha)} \right\}^{\frac{3}{2}}}{(2-\alpha)(1-\alpha) p}.$$

Für $\alpha = \frac{3}{2}$ ist unsere Curve eine Parabel mit dem Parameter $\frac{1}{2} p^2$; bei ihr hat, wie wir übrigens bereits aus früherem wissen, $\lim_{x=0} \cdot r$ einen von Null verschiedenen Grenzwerth $\frac{1}{2} p^2$. Auch für $\alpha = 0$ ist die Curve eine Parabel.

Für $\alpha > \frac{3}{2}$ und für $\alpha < 0$ ist $\lim_{x=0} \cdot r = \infty$; und zwar tritt hierbei die Erscheinung auf, dass für $2 > \alpha > \frac{3}{2}$ die Abscissenaxe und für $\alpha < 0$ die Ordinatenaxe zur Asymptote der Evolute wird.

Uns interessirt hauptsächlich der Fall, dass $\frac{3}{2} > \alpha > 0$ ist.

Denken wir α zwischen diesen Grenzen liegend, so geht hervor:

$$\lim_{x=0} \cdot \xi = 0, \quad \lim_{x=0} \cdot \eta = 0, \quad \lim_{x=0} \cdot r = 0;$$

weshalb der Krümmungskreis der Curve $y = p x^{2-\alpha}$ für $\frac{3}{2} > \alpha > 0$ bei dem Nullpunkt der Coordinaten in einen Punkt zusammenschrumpft, die Krümmung also unendlich gross wird. — Dass der Fall $\alpha = 1$, in welchem unsere Curve eine Grade $y = p x$ ist, hierbei ausgenommen werden muss, versteht sich einerseits von selbst, andrerseits zeigen es die obigen Formeln, welche für $\alpha = 1$ keinen Sinn haben. Abgesehen von dieser alleinigen Ausnahme ist der Nullpunkt des Coordinatensystems Schnittpunkt der Curve mit ihrer Evolute, und zugleich sein eigenes Krümmungscentrum. In ihm sind die Coordinatenaxen tangential zur Curve und zur Evolute; und es geht die Evolute in ihm durch die Curve hindurch, wenn die letztere hier einen Wendepunkt besitzt, d. h. wenn α ein Bruch aus einem ungraden Zähler und ungraden Nenner ist. — Z. B. haben die Curven $y = p x^{\frac{3}{5}}$, $y = p x^{\frac{11}{7}}$ diese Eigenschaft. — Ist der Zähler von α grade und der Nenner ungrade, so verbleiben die Curve und ihre Evolute beim Punkte (0, 0) auf einerlei Seite derjenigen Coordinatenaxe, welche die Tangente der ersteren ist, und die Evolute besitzt im Punkte (0, 0) eine Spitze. Ist der Zähler von α ungrade und der Nenner grade, so verhält sich die Sache umgekehrt.

VII.

Evolvente des Kreises.

Bezeichnet man den zum Punkte (ξ, η) führenden Kreisradius durch ϱ und seinen Richtungswinkel durch θ, so ist:

$$\xi = \varrho \cos \theta, \quad \eta = \varrho \sin \theta, \quad \sigma = \varrho \theta,$$

falls das Kreiscentrum zum Nullpunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems gemacht wird, σ aber zugleich mit θ verschwinden und rechtläufig wachsen soll.

Da dann

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = -\sin \theta, \quad \frac{d\eta}{d\sigma} = +\cos \theta$$

ist, so wird die Evolvente des Kreises durch die Gleichungen

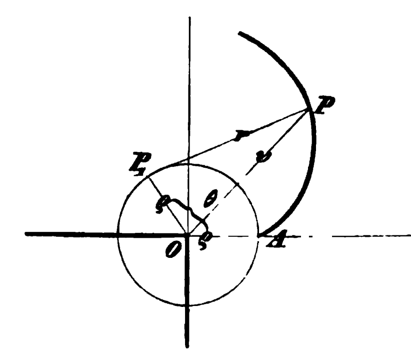
$$x = \varrho \cos \theta + (\varrho \theta - c) \sin \theta,$$
$$y = \varrho \sin \theta - (\varrho \theta - c) \cos \theta$$

bestimmt [§ 130, (25) u. (26)], aus denen noch θ eliminirt werden muss, falls man eine Gleichung zwischen x und y erhalten will.

Um sich die Gestalt der Evolvente zu veranschaulichen, genügt es, $c = 0$ anzunehmen. Man erhält dadurch

$$x = \varrho \cdot [\cos \theta + \theta \cdot \sin \theta],$$
$$y = \varrho \cdot [\sin \theta - \theta \cdot \cos \theta]$$

als Gleichungen der Evolvente des Kreises bei einer solchen Lage des Coordinatensystems, dass die Evolute den Kreis in der Verlängerung der Abscissenaxe trifft.



Setzt man ferner

$$x = v \cos \varphi, \quad y = v \sin \varphi,$$

so folgt für die Polarcoordinaten der Evolvente:

$$v = \varrho \cdot \sqrt{1 + \theta^2},$$

$$\varphi = \theta - \arccos \frac{\varrho}{v};$$

$$v^2 = \varrho^2 \cdot \left\{ 1 + \left(\varphi + \arccos \frac{\varrho}{v} \right)^2 \right\},$$

$$\frac{v}{\varrho} \cdot \cos \left(\varphi - \sqrt{\left(\frac{v}{\varrho} \right)^2 - 1} \right) = 1,$$

$$\operatorname{tng} \frac{\varphi}{2} = \frac{v \sin \frac{\sqrt{v^2 - \varrho^2}}{\varrho} - \sqrt{v^2 - \varrho^2}}{\varrho + v \cos \frac{\sqrt{v^2 - \varrho^2}}{\varrho}}.$$

Die Kreisevolvente lässt sich durch Elementarfunctionen rectificiren.

Da nämlich

$$\frac{dx}{d\theta} = \varrho \theta \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \varrho \theta \sin \theta$$

ist, so folgt für den Bogen $AP = s$:

$$\left(\frac{ds}{d\theta} \right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = \varrho^2 \theta^2,$$

$$s = \frac{1}{2} \varrho \cdot \theta^2;$$

d. i.:

$$2 \varrho s = r^2 = v^2 - \varrho^2;$$

$$2 \cdot OA \cdot AP = PP_1^2 = AP_1^2.$$

Auch das vom Vector v bestrichene Flächenstück $OAP = f$ lässt sich leicht auswerthen.

Bedenkt man nämlich, dass

$$\varphi = \theta - \operatorname{arc\,tng} \theta, \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = 1 - \frac{1}{1 + \theta^2} = \frac{\theta^2}{1 + \theta^2}$$

ist, so folgt:

$$2\,f = \int_0^{\varphi} v^2\,d\varphi = \int_0^{\theta} \frac{v^2\theta^2}{1+\theta^2}\,d\theta = \varrho^2 \cdot \int_0^{\theta} \theta^2\,d\theta,$$

$$f = \frac{1}{6}\,\varrho^2\,\theta^3 = \frac{1}{3}\,s\,\sigma;$$

$$3 \cdot AOP = AP \cdot AP_1.$$

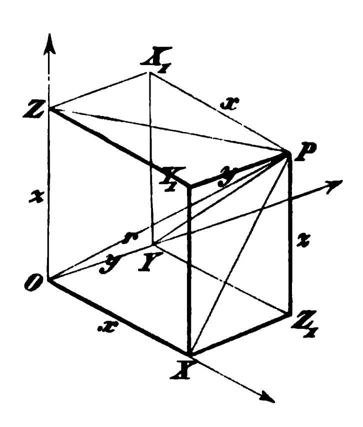
Capitel XIX.

Anwendungen in der Stereometrie.

§ 132.

Einige Sätze über die Grade im Raum.

Es sei O der Nullpunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, d. i. der gemeinsame Endpunkt dreier rechtwinklig zu einander stehenden Graden — der „Coordinatenaxen". Ferner sei P ein beliebiger Punkt im Raume; x, y, z seien seine Coordinaten, d. h. x, y, z seien die positiven oder negativen Strecken, welche man zu den Coordinatenaxen von O aus addiren muss, um zu den Fusspunkten X, Y, Z derjenigen Senkrechten zu gelangen, welche von P aus auf die Coordinatenaxen (oder ihre Verlängerungen) gefällt sind. Endlich werde die absolute Länge von OP mit r bezeichnet, und α, β, γ seien die spitzen oder stumpfen Winkel, welche die Richtung OP mit den Verlängerungsrichtungen der Coordinatenaxen bildet.



Dann liest man aus der Figur unmittelbar ab, dass

$$(1) \qquad \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma} = r$$

ist.

Bisweilen erweist sich eine etwas andere Auffassung der Coordinaten nützlich.

Legt man nämlich durch den Punkt P drei Ebenen parallel zu den drei „Coordinatenebenen" — d. h. zu denjenigen drei Ebenen, in welchen die drei Coordinatenaxen paarweise liegen — so werden OX, OY und OZ drei zusammenstossende Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedons, weshalb man für sie auch die gegenüberliegenden Kanten PX_1, PY_1 und PZ_1 setzen kann.

Mithin lassen sich die Coordinaten x, y und z von P auch als die positiven oder negativen Abstände des Punktes P von den drei Coordinatenebenen der (yz), (zx) und (xy) auffassen.

Ausserdem ergiebt sich für die Diagonale OP jenes rechtwinkligen Parallelepidedons die Relation

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

weil nach dem Pythagoreischen Satze

$$\begin{aligned} OP^2 &= OZ_1^2 + Z_1P^2 \\ &= (OX^2 + XZ_1^2) + Z_1P^2 = OX^2 + OY^2 + OZ^2 \end{aligned}$$

ist. Und daraus folgt, wenn man aus (1)

$$x = r\cos\alpha,\ y = r\cos\beta,\ z = r\cos\gamma$$

substituirt:

(2) $$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$ [1]

Stellt man sich vor, dass die drei Winkel α, β, γ constant bleiben, während die Länge r von OP sich ändert, so gleitet der Punkt P auf der Graden OP. Daher wird durch (1) die Bedingung ausgedrückt, dass der Punkt P auf einer bestimmten Graden liegt, welche durch O hindurchgeht.

Um die Gleichungen einer Graden zu finden, welche durch

---

[1]) Diese Gleichung zeigt u. a., dass nur zwei von den drei Winkeln α, β, γ völlig willkürlich gewählt werden können; sie lässt für den dritten nur die Wahl zwischen zwei Supplementen übrig, weil $\sin\gamma = + \text{abs}\cdot\sqrt{\cos\alpha^2 + \cos\beta^2}$ hervorgeht. Dasselbe lehrt übrigens auch die Anschauung direct; denn sind α und β bestimmt, so muss OP die eine von den beiden Graden sein, in welchen sich die beiden Rotationskegelflächen schneiden, deren Axen OX und OY und deren Öffnungswinkel α und β sind. Der Werth von γ entscheidet darüber, welche von den beiden Schnittlinien gemeint sei.

einen beliebigen Punkt O_1 des Raumes hindurchgeht, denken wir O_1 zum Nullpunkt eines zweiten Coordinatensystems gemacht, dessen Axen mit denjenigen des primitiven Systems gleichgerichtet sind, benennen mit a, b, c die primitiven Coordinaten von O_1 und mit x_1, y_1, z_1 die secundären Coordinaten eines beliebigen Punktes P der fraglichen Graden.

Dann ergiebt sich aus (1):

$$\frac{x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_1}{\cos\beta} = \frac{z_1}{\cos\gamma} = r,$$

wo nun $O_1P = r$ gesetzt ist, und α, β, γ die Richtungswinkel von O_1P gegen die Verlängerungsrichtungen der secundären Axen anzeigen. Diese Winkel sind aber nach einem elementaren Satze denjenigen gleich, welche der durch O parallel zu O_1P gezogene Strahl mit den primitiven Axen bildet, und daher unabhängig von der Lage des Punktes O_1. — Sie heissen die „Richtungswinkel“ von O_1P.

Ferner ist es eine unmittelbare Folge der zweiten Auffassungsweise der Coordinaten von P, dass die Relationen

$$x = a + x_1,\ y = b + y_1,\ z = c + z_1;$$

$$x_1 = x - a,\ y_1 = y - b;\ z_1 = z - c$$

bestehn; weshalb

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma} = r$$

sein muss.

Damit sind die beiden folgenden Sätze bewiesen.

Lehrsatz I.

Sind x, y, z die primitven, x_1, y_1, z_1 aber die secundären Coordinaten eines Punktes in Bezug auf zwei Coordinatensysteme mit gleichgerichteten Axen, ferner a, b, c die primitiven Coordinaten des secundären Nullpunktes, so bestehn stets die Relationen:

(3) $$x = a + x_1,\ y = b + y_1,\ z = c + z_1.$$

Lehrsatz II.

Eine Grade im Raum wird durch das Gleichungssystem

$$(4) \qquad \frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma} = r$$

bestimmt, in welchem r die vom Punkte (a, b, c) zum Punkte (x, y, z) hinführende Strecke und α, β, γ die Richtungswinkel der letzteren gegen die Verlängerungsrichtungen der Axen des rechtwinkligen Coordinatensystems bedeuten.[1])

Aus (4) ergiebt sich:

$$x-a = r\cos\alpha,\ y-b = r\cos\beta,\ z-c = r\cos\gamma;$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \cdot (\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2).$$

Wendet man die Formel (2) auf die rechte Seite der letzten Gleichung an, so erhält man den

Lehrsatz III.

Versteht man unter r die Entfernung zweier Punkte (a, b, c) und (x, y, z) von einander, so ist stets:

$$(5) \qquad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

falls ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde gelegt wird.

Unter dem Winkel zweier Richtungen gegen einander versteht man bekanntlich denjenigen Winkel, welchen man erhält, wenn man von einem beliebigen Punkte aus zwei mit ihnen gleichgerichtete Strahlen zieht. Man weiss ferner aus den Elementen der Stereometrie, dass die Grösse dieses Winkels unabhängig von der Wahl seines Scheitelpunktes ist, mögen die beiden Graden

[1]) Man lasse nicht ausser Acht, dass α, β, γ stets als positiv und concav angesehn werden.

welche seiner Construction zu Grunde liegen, sich schneiden oder kreuzen.

Um den Winkel φ zweier Richtungen (α, β, γ)[1] und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ gegen einander zu berechnen, ziehen wir vom Coordinatenanfang O aus die mit ihnen gleich gerichteten Strahlen OP und OP_1, machen $OP_1 = OP = r$ und ziehn die Grade PP_1.

Dann ist einerseits nach dem erweiterten Pythagoreischen Satz:

$$PP_1^2 = OP^2 + OP_1^2 - 2\,OP \cdot OP_1 \cdot \cos\varphi$$
$$= 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos\varphi.$$

Nach (1) haben P und P_1 die Coordinaten: $r\cos\alpha$, $r\cos\beta$, $r\cos\gamma$, beziehungsweise: $r\cos\alpha_1$, $r\cos\beta_1$, $r\cos\gamma_1$; weshalb nach (5) andrerseits

$$PP_1^2 = (r\cos\alpha - r\cos\alpha_1)^2 + (r\cos\beta - r\cos\beta_1)^2 + (r\cos\gamma - r\cos\gamma_1)^2$$

gesetzt werden kann.

Die Vergleichung der beiden Ausdrücke für PP_1^2 ergiebt, nachdem man noch mit r^2 dividirt hat:

$$2 - 2\cos\varphi = (\cos\alpha - \cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta - \cos\beta_1)^2 + (\cos\gamma - \cos\gamma_1)^2$$
$$= (\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2) + (\cos\alpha_1^2 + \cos\beta_1^2 + \cos\gamma_1^2)$$
$$- 2 \cdot (\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)$$

oder wegen der Gleichung (2):

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

---

[1]) Abkürzung dafür, dass α, β, γ die Richtungswinkel gegen die Verlängerungsrichtungen der Coordinatenaxen sind.

Demnach gilt der

Lehrsatz IV.

Sind α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 die Richtungswinkel zweier Strahlen gegen die Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so wird der Winkel φ der beiden Strahlen gegen einander durch die Gleichung

$$\text{(6)} \qquad \cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$$

bestimmt.

Zusatz.

Die Richtungswinkel zweier sich **rechtwinklig** schneidenden oder kreuzenden Graden erfüllen die Bedingung:

$$\text{(7)} \qquad \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0.$$

Nach Lehrsatz II bestehn zwischen den drei Coordinaten x, y, z der Punkte einer Graden zwei Gleichungen, nämlich:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta}, \quad \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma},$$

von denen die eine auch durch die Gleichung

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{z-c}{\cos\gamma}$$

ersetzt werden kann.

Es erhellt, dass jede einzelne von diesen Gleichungen die Gleichung der Projection der Graden in der Ebene derjenigen Coordinaten ist, welche sie mit einander in Beziehung bringt.

Denn beispielsweise werden durch die Gleichung

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta}$$

keine Aussagen über die lothrechten Abstände z der Graden von der (xy)-Ebene gemacht, sondern nur solche über die Spur der Fusspunkte (x, y) der Lothe. Dass diese Gleichung für sich allein zur völligen Bestimmung der Graden im Raume nicht ausreicht, ist selbstverständlich. Man kann demnach wegen der völligen Willkür in Bezug auf z auch sagen:

Die einzelnen Gleichungen in der Relation (4) sind die Gleichungen derjenigen Ebenen, welche normal zu den Coordinatenebenen durch die Grade gelegt sind.

Benutzt man von der Relation (4) den Theil

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=r,$$

um aus ihm

$$\frac{x-a}{\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}\right)}=\frac{y-b}{\left(\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\right)}=r\sin\gamma$$

abzuleiten, und fragt nach der geometrischen Bedeutung der erhaltenen Formel, so kann man die folgende Antwort geben: Da $r\sin\gamma$ die (absolute) Entfernung der Punkte (x, y) und (a, b) in der (xy)-Ebene von einander ist, so drücken für diese Ebene die Brüche $\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$ und $\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$ den Cosinus und den Sinus des Richtungswinkels derjenigen Graden gegen die x-Axe aus, welche vom Punkte (a, b) zum Punkte (x, y) führt (vergl. § 121, (7)).

Dies lässt sich so aussprechen:

Lehrsatz V.

Bezeichnet man durch ζ den Richtungswinkel, welchen die Projectionsrichtung einer Graden

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$$

in der (xy)-Ebene vom Punkte (a, b) aus zum Punkte (x, y) hin mit der Verlängerungsrichtung der x-Axe macht, so ist

$$\text{(8)} \qquad \cos\zeta = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \quad \sin\zeta = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}.$$

Haben ξ und η die analogen Bedeutungen für die Projectionen in den Ebenen der (yz) und der (zx) gegen die y-Axe, respective gegen die z-Axe, so ist analog:

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \cos\xi = \dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}, & \sin\xi = \dfrac{\cos\gamma}{\sin\alpha}; \\[2ex] \cos\eta = \dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta}, & \sin\eta = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}. \end{cases}$$

Schliesslich wollen wir uns noch mit der Ermittelung derjenigen Graden beschäftigen, welche auf zwei gegebenen Graden senkrecht steht.

Sind α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 die Richtungswinkel zweier Graden, λ, μ, ν die Richtungswinkel ihrer gemeinsamen Senkrechten, so bestehn nach (7) die Gleichungen

$$\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu = 0,$$

$$\cos\alpha_1 \cos\lambda + \cos\beta_1 \cos\mu + \cos\gamma_1 \cos\nu = 0.$$

Eliminirt man aus ihnen je eine von den Grössen $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, so erhält man ohne Weiteres die Relation:

$$\text{(10)} \qquad \frac{\cos\lambda}{\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\gamma\cos\beta_1}$$

$$= \frac{\cos\mu}{\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\alpha\cos\gamma_1} = \frac{\cos\nu}{\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\beta\cos\alpha_1} = \frac{1}{\theta}.$$

Das θ, dessen reciproker Werth jeden der ersten drei Brüche ausdrückt, ist eine hinreichend wichtige Grösse, um näher bestimmt zu werden. Dies kann so geschehn, dass man zunächst $\theta^2(\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2)$ unter Rücksicht auf die Gleichung (2) berechnet, welcher die Richtungswinkel jeder einzelnen Graden unterworfen sind. Man findet:

$$(11)\quad \theta^2 = (\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\beta\cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\gamma\cos\beta_1)^2 + (\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\alpha\cos\gamma_1)^2$$

$$= \cos\alpha^2(\cos\beta_1^2 + \cos\gamma_1^2) + \cos\beta^2(\cos\gamma_1^2 + \cos\alpha_1^2) + \cos\gamma^2(\cos\alpha_1^2 + \cos\beta_1^2)$$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta\cos\alpha_1\cos\beta_1 - 2\cos\beta\cos\gamma\cos\beta_1\cos\gamma_1 - 2\cos\gamma\cos\alpha\cos\gamma_1\cos\alpha_1$$

$$= \cos\alpha^2(1-\cos\alpha_1^2) + \cos\beta^2(1-\cos\beta_1^2) + \cos\gamma^2(1-\cos\gamma_1^2)$$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta\cos\alpha_1\cos\beta_1 - 2\cos\beta\cos\gamma\cos\beta_1\cos\gamma_1 - 2\cos\gamma\cos\alpha\cos\gamma_1\cos\alpha_1$$

$$= 1 - (\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)^2$$
$$= 1 - \cos\varphi^2$$
$$= \sin\varphi^2,$$

wo φ nach (6) wieder den Winkel bedeutet, welchen die beiden Richtungen (α, β, γ) und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ mit einander bilden. Mithin ist

$$\theta = \pm\sin\varphi.$$

Um darüber zu entscheiden, wann hier das obere und wann das untere Vorzeichen zu wählen ist, beachte man zunächst, dass θ sich nicht ändert, wenn man die beiden Richtungen (α, β, γ) und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ohne Änderung ihres gegenseitigen Winkels φ irgendwie im Raume an andere Stellen bringt. Zieht man aber von irgend einem Punkt, z. B. dem Nullpunkt des Coordinatensystems, aus drei mit (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, (λ, μ, ν) parallele Richtungen und dreht das System derselben so, dass die erstere in die Verlängerung der x-Axe und die letztere in die Verlängerung der z-Axe fällt, so ist bei dieser Lage:

$$\alpha = 0,\ \beta = \gamma = \frac{\pi}{2};\ \lambda = \mu = \frac{\pi}{2},\ \nu = 0;$$

und man erhält demnach:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\pm\sin\varphi} = \frac{\cos\nu}{\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\beta\cos\alpha_1} = \frac{1}{\cos\beta_1},$$
$$\theta = \pm\sin\varphi = \cos\beta_1.$$

Da die Winkel, um welche es sich handelt, als concave Winkel vorausgesetzt werden, so ist $\sin\varphi$ positiv. Mithin muss für θ der Werth $+\sin\varphi$ oder der Werth $-\sin\varphi$ genommen werden, je nachdem β_1 spitz oder stumpf ist, d. h. je nachdem die Richtung $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, welche in die (xy)-Ebene fiel, auf der positiven oder auf der negativen Seite der x-Axe liegt.

Definition.

Diejenige Seite einer Coordinatenebene, auf welcher die Verlängerung der dritten Axe liegt, heisst die positive Seite derselben. Man nennt zwei Systeme von je drei Richtungen **isotrop**, wenn sie bei der — nach beliebiger Wahl — festgesetzten Zuordnung derselben als Coordinatenaxen in eine solche Lage gebracht werden können, dass die positiven Seiten je zweier gleichnamigen Coordinatenebenen in gleichem Sinne bestimmt sind.[1]

Daher muss in (10) $\theta = +\sin\varphi$ genommen werden, wenn das System der Richtungen (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, (λ, μ, ν) mit demjenigen der Axen der x, y, z isotrop ist.

Erweitert man die in (10) verglichenen Brüche mit ihren Nennern und wendet dann den Satz an, dass die Summe der Zähler der drei ersten Brüche, dividirt durch die Summe ihrer Nenner, dem letzten Bruche $\frac{\theta}{\theta^2}$ gleich sein muss, so erhält man, weil nach (11) die Summe der Nenner $= \theta^2$ ist:

$$\cos\lambda\cdot(\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\gamma\cos\beta_1)$$
$$+\cos\mu\cdot(\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\alpha\cos\gamma_1) + \cos\nu\cdot(\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\beta\cos\alpha_1)$$
$$= \theta$$

oder in kürzerer Schreibweise:

---

[1]) Zwei Coordinatensysteme, welche in zwei Axen übereinstimmen, während die dritten entgegengesetzte Richtungen haben, lassen sich nicht in eine solche Lage bringen, wie man sie auch drehen mag; sie sind antitrop.

$$\begin{vmatrix} \cos\lambda, & \cos\alpha, & \cos\alpha_1 \\ \cos\mu, & \cos\beta, & \cos\beta_1 \\ \cos\nu, & \cos\gamma, & \cos\gamma_1 \end{vmatrix} = \theta.$$

Wir resumiren:

Lehrsatz VI.

Bedeutet φ den concaven Winkel, welchen die beiden Richtungen (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ mit einander bilden, und (λ, μ, ν) diejenige auf beiden senkrechte Richtung, welche das System dieser drei Richtungen mit demjenigen der drei Coordinatenaxen (in der Folge x, y, z) isotrop macht, so ist stets:

(12)
$$\begin{vmatrix} \cos\lambda, & \cos\alpha, & \cos\alpha_1 \\ \cos\mu, & \cos\beta, & \cos\beta_1 \\ \cos\nu, & \cos\gamma, & \cos\gamma_1 \end{vmatrix} = \sin\varphi$$

oder in andern Formen:

(13)
$$\cos\lambda\cdot(\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\gamma\cos\beta_1) + \cos\mu\cdot(\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\alpha\cos\gamma_1) + \cos\nu\cdot(\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\beta\cos\alpha_1) = \sin\varphi,$$

(14)
$$\frac{\cos\lambda}{\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\gamma\cos\beta_1} = \frac{\cos\mu}{\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\alpha\cos\gamma_1} = \frac{\cos\nu}{\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\beta\cos\alpha_1} = \frac{1}{\sin\varphi}.$$

Um endlich die Entfernung e der beiden Graden

$$\frac{x - a}{\cos\alpha} = \frac{y - b}{\cos\beta} = \frac{z - c}{\cos\gamma} = r,$$

$$\frac{x_1 - a_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y_1 - b_1}{\cos\beta_1} = \frac{z_1 - c_1}{\cos\gamma_1} = r_1$$

von einander zu bestimmen, besitzen wir, wenn (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) die Fusspunkte der gemeinsamen Senkrechten auf den Graden sind, ausser diesen beiden Gleichungssystemen noch das folgende:

$$\frac{x - x_1}{\cos\lambda} = \frac{y - y_1}{\cos\mu} = \frac{z - z_1}{\cos\nu} = e.$$

Aus diesen Relationen kann man zunächst ableiten:

$$\begin{aligned} e\cos\lambda - r\cos\alpha + r_1\cos\alpha_1 &= a - a_1, \\ e\cos\mu - r\cos\beta + r_1\cos\beta_1 &= b - b_1, \\ e\cos\nu - r\cos\gamma + r_1\cos\gamma_1 &= c - c_1. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich durch Elimination von $(-r)$ und r_1:

$$\begin{vmatrix} \cos\lambda, & \cos\alpha, & \cos\alpha_1 \\ \cos\mu, & \cos\beta, & \cos\beta_1 \\ \cos\nu, & \cos\gamma, & \cos\gamma_1 \end{vmatrix} \cdot e = \begin{vmatrix} a - a_1, & \cos\alpha, & \cos\alpha_1 \\ b - b_1, & \cos\beta, & \cos\beta_1 \\ c - c_1, & \cos\gamma, & \cos\gamma_1 \end{vmatrix};$$

d. i. mit Rücksicht auf (12) und (14):

$$e\sin\varphi$$

$$= (a - a_1)\cdot\cos\lambda\sin\varphi + (b - b_1)\cdot\cos\mu\sin\varphi + (c - c_1)\cdot\cos\nu\sin\varphi,$$

$$e = (a - a_1)\cdot\cos\lambda + (b - b_1)\cos\mu + (c - c_1)\cos\nu.$$

Eliminirt man e und r_1, so erhält man den Werth von r und daraus die Werthe von x, y, z vermittelst der Gleichungen der ersten Graden. Die analogen Ausdrücke für den Fusspunkt der Senkrechten auf der zweiten Graden ergeben sich dann durch die blosse Vertauschung der Symbole. — Für uns haben die Coordinaten der Fusspunkte zu wenig Interesse, um die an sich einfache Rechnung hier auszuführen.

Das gewonnene Resultat lautet:

Lehrsatz VII.

Bezeichnet man durch φ den Winkel, welchen die beiden Richtungen (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ einschliessen, und durch (λ, μ, ν) diejenige zu beiden senkrechte Richtung,

welche das System dieser drei Richtungen mit demjenigen der drei Axen der x, y und z isotrop macht, so lässt sich die Entfernung e der beiden Graden

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma},$$

$$\frac{x-a_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-b_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-c_1}{\cos\gamma_1}$$

so darstellen:

(15) $$e=(a-a_1)\cos\lambda+(b-b_1)\cos\mu+(c-c_1)\cos\nu$$

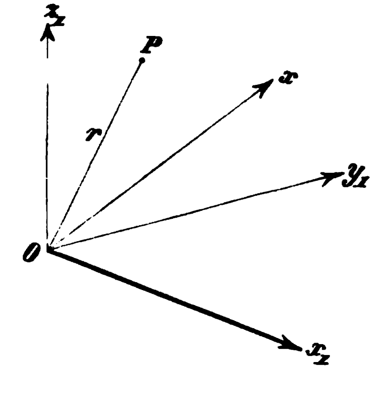
$$=\frac{1}{\sin\varphi}\cdot\begin{vmatrix} a-a_1, & \cos\alpha, & \cos\alpha_1 \\ b-b_1, & \cos\beta, & \cos\beta_1 \\ c-c_1, & \cos\gamma, & \cos\gamma_1 \end{vmatrix}.$$

§ 133.

Dislocation rechtwinkliger Coordinatensysteme.

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P in dem primitiven System und x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen Coordinaten desselben Punktes P in Bezug auf ein secundäres System, dessen Nullpunkt mit demjenigen des ersteren in O zusammenfällt.

Den concaven Winkel, welchen die Verlängerungsrichtungen zweier Axen mit einander bilden, bezeichnen wir dadurch, dass wir die Namen der beiden Axen in einer Klammer hinter einander schreiben, z. B. $(x x_1)$, $(x y)$, u. s. w.



Zieht man die Grade $OP=r$ und bezeichnet die Winkel, welche sie mit den Axen bildet, in der so eben besprochenen Weise, so folgt aus dem vorigen § einerseits:

$$\frac{x}{\cos(r\,x)} = \frac{y}{\cos(r\,y)} = \frac{z}{\cos(r\,z)} = r,$$

$$\frac{x_1}{\cos(r\,x_1)} = \frac{y_1}{\cos(r\,y_1)} = \frac{z_1}{\cos(r\,z_1)} = r.$$

Und andrerseits ist nach der Gleichung (6) desselben §, wenn man vom secundären System ausgeht:

$$\cos(rx) = \cos(rx_1)\cos(xx_1) + \cos(ry_1)\cos(xy_1) + \cos(rz_1)\cos(xz_1),$$
$$\cos(ry) = \cos(rx_1)\cos(yx_1) + \cos(ry_1)\cos(yy_1) + \cos(rz_1)\cos(yz_1),$$
$$\cos(rz) = \cos(rx_1)\cos(zx_1) + \cos(ry_1)\cos(zy_1) + \cos(rz_1)\cos(zz_1).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit r und substituirt aus den vorhergehenden Relationen:

$$r\cos(r\,x) = x, \quad r\cos(r\,y) = y, \quad r\cos(r\,z) = z, \quad \text{u. s. w.},$$

so folgt:

$$x = x_1\cos(x\,x_1) + y_1\cos(x\,y_1) + z_1\cos(x\,z_1),$$
$$y = x_1\cos(y\,x_1) + y_1\cos(y\,y_1) + z_1\cos(y\,z_1),$$
$$z = x_1\cos(z\,x_1) + y_1\cos(z\,y_1) + z_1\cos(z\,z_1).$$

Stimmt der secundäre Nullpunkt nicht mit dem primitiven überein, so kann man die Transformation der Coordinaten mit Hülfe einer intermediären Operation vollziehn, welche zunächst den Nullpunkt ohne Änderung der Richtung der Axen an seine neue Stelle bringt, und dann den Axen die neuen Richtungen geben, wie oben. Hierdurch erhalten die rechten Seiten der obigen Transformationsformeln nach § 132, Lehrs. I noch die primitiven Coordinaten a, b, c des neuen Nullpunkts als neue Summanden.

Mithin ergiebt sich mit Rücksicht auf den Lehrs. VI des vorigen § der folgende

Lehrsatz.

Geht man von dem primitiven rechtwinkligen Coordinatensystem der x, y, z zu einem secundären rechtwinkligen System der x_1, y_1, z_1 über, dessen Nullpunkt die primitiven Coordinaten a, b, c hat, so ist:

$$(1)\quad \begin{cases} x = a + x_1 \cos(x x_1) + y_1 \cos(x y_1) + z_1 \cos(x z_1), \\ y = b + x_1 \cos(y x_1) + y_1 \cos(y y_1) + z_1 \cos(y z_1), \\ z = c + x_1 \cos(z x_1) + y_1 \cos(z y_1) + z_1 \cos(z z_1). \end{cases}$$

Die Cosinus der Richtungswinkel der Axen des einen Systems gegen diejenigen des andern erfüllen die Gleichung

$$(2)\quad \begin{vmatrix} \cos(x x_1), & \cos(x y_1), & \cos(x z_1) \\ \cos(y x_1), & \cos(y y_1), & \cos(y z_1) \\ \cos(z x_1), & \cos(z y_1), & \cos(z z_1) \end{vmatrix} = \pm 1$$

in der Weise, dass rechts das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die beiden Coordinatensysteme isotrop oder antitrop sind.[1])

Für **isotrope** Systeme ergiebt sich ausserdem[2]):

$$(3)\quad \begin{cases} \cos(x x_1) = \cos(y y_1)\cos(z z_1) - \cos(y z_1)\cos(z y_1), \\ \cos(y x_1) = \cos(z y_1)\cos(x z_1) - \cos(z z_1)\cos(x y_1), \\ \cos(z x_1) = \cos(x y_1)\cos(y z_1) - \cos(x z_1)\cos(y y_1); \end{cases}$$

und:

$$(4)\quad \begin{cases} x - a = \begin{vmatrix} x_1, & \cos(y x_1), & \cos(z x_1) \\ y_1, & \cos(y y_1), & \cos(z y_1) \\ z_1, & \cos(y z_1), & \cos(z z_1) \end{vmatrix}, \\[2ex] y - b = \begin{vmatrix} x_1, & \cos(z x_1), & \cos(x x_1) \\ y_1, & \cos(z y_1), & \cos(x y_1) \\ z_1, & \cos(z z_1), & \cos(x z_1) \end{vmatrix}, \\[2ex] z - c = \begin{vmatrix} x_1, & \cos(x x_1), & \cos(y x_1) \\ y_1, & \cos(x y_1), & \cos(y y_1) \\ z_1, & \cos(x z_1), & \cos(y z_1) \end{vmatrix}. \end{cases}$$

[1]) Die Gleichung (2) ist nämlich identisch mit der Gleichung (12) des vorigen §, nur dass der dortige Winkel φ hier den Werth $\frac{\pi}{2}$ hat.

[2]) Die Gleichung (14) des vorigen §.

Zusatz.

In der Determinante (2) ist die Summe der Quadrate der Elemente, welche in **einer** Zeile oder Columne stehn, $= +1$, dagegen die Summe der Produkte der Elemente, welche in **verschiedenen** Zeilen oder Columnen an entsprechenden Stellen stehn, $= 0$.

Bestimmt man die Lage eines Punktes P im Raum durch seine Entfernung $OP = r$ vom Nullpunkte O der rechtwinkligen Coordinaten und durch die drei Richtungswinkel (r x), (r y), (r z) des Vectors OP, so ist diese Bestimmungsweise das Analogon zu der Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene vermittelst Polarcoordinaten. Die zwischen den drei Richtungswinkeln bestehende Gleichung

$$\cos(r\,x)^2 + \cos(r\,y)^2 + \cos(r\,z)^2 = 1$$

ist der Ausdruck dafür, dass im Grunde drei Variable zur Bestimmung des Punktes P ausreichen; denn man kann, wenn r, (r x) und (r y) gegeben sind, $\cos(r\,z)^2$ berechnen. Jedoch genügt diese Bestimmungsmethode vermittelst dreier Variabeln nicht allen Anforderungen, weil sie nicht darüber entscheidet, ob der Winkel (r z) spitz oder stumpf ist.

Dem letztgedachten Übelstand wird abgeholfen, wenn man anstatt der Winkel (r x), (r y), (r z) zwei Winkel φ und ψ einführt, von denen der erstere (φ) den Richtungswinkel der Projection des Vectors r in der (x y)-Ebene und der letztere (ψ) den Ablenkungswinkel des Vectors r von dieser Ebene bedeutet, indem man ψ als positiv oder als negativ ansieht, je nachdem r auf der positiven oder auf der negativen Seite derselben liegt. Dann ist offenbar:

$$(5)\qquad \begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi, \\ y = r\cos\psi\sin\varphi, \\ z = r\sin\psi. \end{cases}$$

§ 134.

Einige Sätze über die Ebene im Raum.

Bezeichnen wir durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Richtungswinkel eines vom Punkte (a, b, c) aus zum Punkte (x, y, z) hinführenden Strahls und durch r die Entfernung der beiden Punkte von einander, so ist nach § 132:

$$\frac{x - a}{\cos \alpha_1} = \frac{y - b}{\cos \beta_1} = \frac{z - c}{\cos \gamma_1} = r,$$

mithin:

$$r \cos \alpha_1 = x - a, \quad r \cos \beta_1 = y - b, \quad r \cos \gamma_1 = z - c.$$

Diese Werthe substituiren wir in der mit r multiplicirten Gleichung

$$\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha + \cos \beta_1 \cdot \cos \beta + \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma = 0,$$

welche nach § 132, (7) ausdrückt, dass die Richtung $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ auf der Richtung (α, β, γ) senkrecht steht. Dann kommt:

$$(x - a) \cdot \cos \alpha + (y - b) \cdot \cos \beta + (z - c) \cdot \cos \gamma = 0.$$

Da diese Gleichung durch die Coordinaten je zweier Punkte (a, b, c) und (x, y, z) erfüllt werden muss, deren grade Verbindungslinie auf der Richtung (α, β, γ) senkrecht steht, so liegen alle Punkte (x, y, z), welche dieser Gleichung genügen, in derjenigen Ebene, welche auf der Richtung (α, β, γ) lothrecht steht und durch den Punkt (a, b, c) hindurchgeht.

Diese „Gleichung der Ebene“ lässt sich in folgender Weise umgestalten.

Zunächst kann man, da (a, b, c) ein beliebig auszuwählender Punkt der Ebene ist, bestimmen, dass er der Fusspunkt des Lothes p sein soll, welches vom Nullpunkte der Coordinaten aus auf die Ebene gefällt wird. Dann ist nach § 132, (1):

$$a = p \cos \alpha, \quad b = p \cos \beta, \quad c = p \cos \gamma;$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma &= a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma \\ &= p (\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2) \\ &= p. \end{aligned}$$

Mithin ergiebt sich der

Lehrsatz I.

Die **Gleichung** derjenigen **Ebene,** welche durch den Punkt (a, b, c) hindurchgeht und auf der Richtung (α, β, γ) lothrecht steht, ist:

$$(1) \qquad (x - a) \cdot \cos\alpha + (y - b) \cdot \cos\beta + (z - c) \cdot \cos\gamma = 0.$$

Bedeutet p die Länge des vom Nullpunkt auf die Ebene gefällten Lothes und α, β, γ die Richtungswinkel des Lothes vom Nullpunkte aus nach dem Fusspunkte hin, so ist ferner:

$$(2) \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Um die Entfernung p_1 eines beliebigen Punktes (x_1, y_1, z_1) von der obigen Ebene zu ermitteln, machen wir den letzteren zum Nullpunkt eines secundären gleichgerichteten Coordinatensystems der x', y', z'. Dann erhält man, weil die verschiedenen Lothe einer Ebene mit einander parallel sind, nach (2) die Gleichung der Ebene in der Gestalt:

$$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p_1 = 0$$

oder in der Gestalt:

$$x'\cos(\pi - \alpha) + y'\cos(\pi - \beta) + z'\cos(\pi - \gamma) - p_1 = 0,$$

je nachdem die Lothe p und p_1 einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben. Oder m. a. W.: die secundäre Gleichung der Ebene ist

$$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - (\pm p_1) = 0,$$

wo das obere oder das untere Vorzeichen von p_1 gilt, je nachdem der primitive und der secundäre Nullpunkt auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite der Ebene liegen.

Es ist aber nach § 132, (3):

$$x = x_1 + x', \quad y = y_1 + y', \quad z = z_1 + z'$$

oder:

$$x' = x - x_1, \quad y' = y - y_1, \quad z' = z - z_1;$$

weshalb die letzte Gleichung auch so geschrieben werden kann:

$$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\cos\beta + (z - z_1)\cos\gamma - (\pm p_1) = 0,$$

oder, wenn man die Klammern auflöst und die Gleichung (2) anwendet, auch so:

$$\mp p_1 = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p.$$

Verzichtet man also darauf, p_1 als eine absolute Grösse zu betrachten, so kann man das Resultat so formuliren:

Lehrsatz II.

Bezeichnet man die **Entfernung** eines Punktes (x_1, y_1, z_1) von der Ebene

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

durch p_1, indem man diese Grösse als positiv oder negativ ansieht, je nachdem der Punkt (x_1, y_1, z_1) und der Nullpunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems auf der gleichen oder auf verschiedenen Seiten der Ebene liegen, so ist:

(3) $$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p = - p_1.$$

Will man die Neigungswinkel von Ebenen gegen einander bestimmen, so braucht man sich nur zu erinnern, dass dieselben mit denjenigen Winkeln übereinstimmen, welche die Lothe mit einander bilden. Dieselben ergeben sich also aus § 132, (6).

Besonders wichtig sind die Neigungswinkel der Ebene

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

gegen die Coordinatenebenen. In Bezug auf sie gilt der

Lehrsatz III.

Stellt man die Gleichung einer Ebene in der Form

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

dar, wobei p die absolute Länge des Lothes vom Nullpunkt aus auf die Ebene und α, β, γ seine Richtungswinkel bedeuten, so ist gleichzeitig α der Neigungswinkel der Ebene gegen die (yz)-Ebene, β gegen die (zx)-Ebene, γ gegen die (xy)-Ebene.

§ 135.

Tangente und Normalebene einer Curve im Raum. Rectification der Curve.

Um irgend eine Curve im Raume zu bestimmen, bedarf man zweier Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

zwischen den drei Coordinaten x, y, z ihrer einzelnen Punkte. Denn kennt man eine Coordinate eines Punktes der Curve, so ist dadurch zunächst nur die den Punkt enthaltende Ebene bestimmt, welche zur Ebene der andern Coordinaten parallel liegt, jedoch nichts über die Lage des Curvenpunktes in derselben ausgesagt. Nehmen wir an, x sei die bekannte Coordinate, so bleibt noch die Bestimmung der beiden Coordinaten y und z übrig, zu welchem Zweck bekanntlich zwei Gleichungen nöthig sind, mag die Curve ganz oder nur mit einzelnen Punkten in der fraglichen Ebene liegen.

Ist (ξ, η, ζ) ein beliebiger Punkt einer Graden, welche durch den Punkt (x, y, z) der Curve geht, (α, β, γ) die Richtung dieser Graden und r die Entfernung beider Punkte von einander, so hat man nach § 132, (4):

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma} = r.$$

Mithin muss für einen zweiten Schnittpunkt $(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y,\ z + \varDelta z)$ dieser Graden mit der Curve auch die Relation

$$\frac{\varDelta x}{\cos\alpha} = \frac{\varDelta y}{\cos\beta} = \frac{\varDelta z}{\cos\gamma} = \varDelta s$$

gelten; und es ist, wie man durch Division sogleich findet, für jeden Punkt (ξ, η, ζ) der Secante:

$$\frac{\xi - x}{\varDelta x} = \frac{\eta - y}{\varDelta y} = \frac{\zeta - z}{\varDelta z} = \frac{r}{\varDelta s},$$

wobei $\varDelta s$ die Entfernung der beiden Schnittpunkte von einander bedeutet.

Sind nun x, y, z differentiirbare Functionen einer Variabeln t, so folgt demnach für die Tangente:

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dt}} = \frac{r}{\frac{ds}{dt}};$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds},$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Jede Grade, welche auf der Tangente im Berührungspunkte senkrecht steht, heisst eine Normale der Curve in diesem Punkt, und diejenige Ebene, in welcher diese Normalen sämmtlich liegen, die Normalebene.

Die Gleichung der letzteren ist daher nach § 134:

$$(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0,$$

wo (α, β, γ) die Richtung der Tangente bedeutet, oder nach den obigen Formeln für die Cosinus der Richtungswinkel:

$$(\xi - x)\frac{dx}{ds} + (\eta - y)\frac{dy}{ds} + (\zeta - z)\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$(\xi - x)\frac{dx}{dt} + (\eta - y)\frac{dy}{dt} + (\zeta - z)\frac{dz}{dt} = 0.$$

Aus diesen Betrachtungen folgt mithin der

Lehrsatz I.

Für einen Punkt (x, y, z) derjenigen Curve, deren Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

sind, lautet das Gleichungspaar der **Tangente:**

(1) $$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dt}}$$

und die Gleichung der **Normalebene:**

(2) $$(\xi - x)\cdot\frac{dx}{dt} + (\eta - y)\cdot\frac{dy}{dt} + (\zeta - z)\cdot\frac{dz}{dt} = 0.$$

Aus den Formeln für die Cosinus der Richtungswinkel der Tangente folgt ferner, weil nach § 132, (2)

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

ist:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Δs bedeutete die Länge einer Sehne der Curve. Schreibt man nun zwischen zwei festen Punkten der Curve eine Sehnenfolge ein und lässt dann die einzelnen Sehnen unter unendlicher Vermehrung ihrer Anzahl unendlich abnehmen, so ergiebt sich vermittelst einer Betrachtung, welche derjenigen in § 124 ganz analog ist, der

Lehrsatz II.

Bedeutet s die im Punkte (x_0, y_0, z_0) verschwindende Bogenabscisse einer Raumcurve, so ist, indem die unabhängige Variable durch t bezeichnet wird:

(3) $$\begin{cases} s = \int_{t_0}^{t} dt\cdot\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \\ ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \end{cases}$$

§ 136.

Krümmungsaxe, Schmiegungsebene, Krümmungskreis.

Die Normalebenen durch die beiden Curvenpunkte (x, y, z) und ($x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$) sind nach § 135, (2):

$$(\xi - x) \cdot \frac{dx}{dt} + (\eta - y) \cdot \frac{dy}{dt} + (\zeta - z) \cdot \frac{dz}{dt} = 0 \quad .$$

und:

$$(\xi - x - \Delta x) \cdot \left(\frac{dx}{dt} + \frac{d \cdot \Delta x}{dt}\right)$$

$$+ (\eta - y - \Delta y) \cdot \left(\frac{dy}{dt} + \frac{d \cdot \Delta y}{dt}\right) + (\zeta - z - \Delta z) \cdot \left(\frac{dz}{dt} + \frac{d \cdot \Delta z}{dt}\right) = 0.$$

Soll demnach (ξ, η, ζ) ein Punkt in der Schnittlinie dieser beiden Ebenen sein, so müssen die Werthe der Coordinaten ξ, η, ζ beiden Gleichungen zugleich genügen, also auch der Gleichung, welche aus ihnen durch Subtration hervorgeht. Dieselbe lautet nach einer einfachen Transformation:

$$(\xi - x) \cdot \Delta \frac{dx}{dt} + (\eta - y) \cdot \Delta \frac{dy}{dt} + (\zeta - z) \cdot \Delta \frac{dz}{dt}$$

$$= \left(\frac{dx}{dt} + \Delta \frac{dx}{dt}\right) \cdot \Delta x + \left(\frac{dy}{dt} + \Delta \frac{dy}{dt}\right) \cdot \Delta y + \left(\frac{dz}{dt} + \Delta \frac{dz}{dt}\right) \cdot \Delta z.$$

Dividirt man sie durch denjenigen Zuwachs Δt der unabhängigen Variabeln, welche den Zuwachs Δx von x, Δy von y und Δz von z veranlasst, und lässt dann Δt unendlich abnehmen, so erhält man:

$$(\xi - x) \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + (\eta - y) \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + (\zeta - z) \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

— Das Letztere nach § 135, (3).

Mithin muss die Grenzlage der Schnittkante beider Normalebenen der Curve die letzte Gleichung und die erste Gleichung dieses § gleichzeitig erfüllen und wird durch beide Gleichungen vollständig bestimmt. Sie ist das Analogon zu dem Krümmungscentrum einer ebenen Curve, da dieses sich als die Grenzlage des Schnittpunktes zweier unendlich benachbarten Normalen einer solchen Curve ausgewiesen hat.

Fasst man diejenige Ebene ins Auge, welche die Tangente des Punktes (x, y, z) und den Punkt $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$ in sich enthält, so ist es einerseits klar, dass die Curve sich in der Nachbarschaft des Punktes (x, y, z) desto enger an sie anschmiegt, je kleiner Δt wird, und andrerseits, dass die Schnittkante der beiden Normalebenen im Grenzfalle auf ihr lothrecht steht, weil sie sich in die Neigungsebene dieser beiden Normalebenen verwandelt.

Diese Andeutungen werden genügen, um erkennen zu lassen, dass die folgende Definition entscheidende Merkmale der Raumcurven anspricht.

Definition.

Unter der **Krümmungsaxe** einer Curve im Punkte (x, y, z) versteht man die Grenzlage der Schnittkante der Normalebene durch diesen Punkt mit einer unendlich benachbarten Normalebene. Die durch den Punkt (x, y, z) lothrecht zur Krümmungsaxe gelegte Ebene heisst die **Schmiegungsebene** der Curve in diesem Punkt, der Schnittpunkt der Krümmungsaxe mit der Schmiegungsebene das **Krümmungscentrum** und der um das letztere in der Schmiegungsebene gezogene Kreis, welcher durch den Punkt (x, y, z) hindurchgeht, der **Krümmungskreis.**

Oben ist bewiesen der

Lehrsatz I.

Die laufenden Coordinaten ξ, η, ζ der **Krümmungsaxe** einer Curve im Punkte (x, y, z) genügen den beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad (\xi - x) \cdot \frac{dx}{dt} + (\eta - y) \cdot \frac{dy}{dt} + (\zeta - z) \cdot \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$(2) \qquad (\xi - x) \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + (\eta - y) \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + (\zeta - z) \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Stellt man für einen zweiten Punkt (ξ_0, η_0, ζ_0) der Krümmungsaxe die analogen Gleichungen auf und subtrahirt dieselben von (1) und (2), so folgt:

$$(\xi - \xi_0) \cdot \frac{dx}{dt} + (\eta - \eta_0) \cdot \frac{dy}{dt} + (\zeta - \zeta_0) \cdot \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$(\xi - \xi_0) \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + (\eta - \eta_0) \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + (\zeta - \zeta_0) \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Ausserdem ist, wenn man die Entfernung der beiden fraglichen Punkte von einander durch ϱ und die Richtungswinkel der Krümmungsaxe durch λ, μ, ν bezeichnet, nach § 132, (4):

$$\frac{\xi - \xi_0}{\cos \lambda} = \frac{\eta - \eta_0}{\cos \mu} = \frac{\zeta - \zeta_0}{\cos \nu} = \varrho.$$

Substituirt man hieraus für $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$ und $\zeta - \zeta_0$, so kommt:

$$\cos \lambda \cdot \frac{dx}{dt} + \cos \mu \cdot \frac{dy}{dt} + \cos \nu \cdot \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\cos \lambda \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \cos \mu \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \cos \nu \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Die erste von diesen beiden Relationen drückt nach § 132, (7) die bereits bekannte Thatsache aus, dass die Krümmungsaxe perpendiculär zur Tangente steht; die zweite, dass sie auch perpendiculär zu derjenigen Graden steht, bei welcher die Cosinus der Richtungswinkel die Werthe haben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} : w, \quad \frac{d^2y}{dt^2} : w, \quad \frac{d^2z}{dt^2} : w$$

für

$$w = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Sie ist nach § 134, Lehrs. III ein Loth zur Ebene (2).

Um die Lage dieser Graden näher zu bestimmen, differentiiren wir die bekannte Gleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

noch einmal. Dann kommt:

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$$

oder:

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{w} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{w} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{w} = \frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{w}.$$

Mithin bedeutet $\left[\frac{d^2s}{dt^2} : w\right]$ den Cosinus desjenigen Winkels, unter welchem das Loth zur Ebene (2) gegen die Tangente der Curve geneigt ist.

Macht man $t = s$, wählt also die Bogenabscisse zur unabhängigen Variabeln, so wird

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{ds} = 1, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2s}{ds^2} = 0,$$

der fragliche Winkel mithin ein rechter; weshalb dann die Tangente, unser Loth und die Krümmungsaxe ein System von drei rechtwinklig zu einander stehenden Graden bilden.

Bezeichnen wir den Krümmungsradius durch r, seine vom Curvenpunkt (x, y, z) zum Krümmungscentrum hinführende Richtung durch (α, β, γ), so ergiebt sich demnach erstens zur Bestimmung dieser Richtungswinkel:

$$(3)\quad \frac{\cos\alpha}{\frac{d^2x}{ds^2}}=\frac{\cos\beta}{\frac{d^2y}{ds^2}}=\frac{\cos\gamma}{\frac{d^2z}{ds^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

und zweitens zur Bestimmung der Richtungswinkel λ, μ, ν der Krümmungsaxe nach § 132, (12) und (14):

$$(4)\quad \begin{vmatrix} \cos\lambda, & \frac{dx}{ds}, & \cos\alpha \\ \cos\mu, & \frac{dy}{ds}, & \cos\beta \\ \cos\nu, & \frac{dz}{ds}, & \cos\gamma \end{vmatrix} = 1,$$

$$(5)\quad \frac{\cos\lambda}{\frac{dy}{ds}\cdot\cos\gamma-\frac{dz}{ds}\cdot\cos\beta}$$

$$=\frac{\cos\mu}{\frac{dz}{ds}\cdot\cos\alpha-\frac{dx}{ds}\cdot\cos\gamma}=\frac{\cos\nu}{\frac{dx}{ds}\cdot\cos\beta-\frac{dy}{ds}\cdot\cos\alpha}=1;$$

vorausgesetzt, dass das System der Richtungen der Tangente, des Krümmungsradius und der Krümmungsaxe als mit demjenigen der Richtungen der Coordinatenaxen in der Folge x, y, z isotrop gewählt sei.

Ist (ξ, η, ζ) das Krümmungscentrum, so hat man ausserdem:

$$(6)\quad \frac{\xi-x}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y}{\cos\beta}=\frac{\zeta-z}{\cos\gamma}=r.$$

Substituirt man hieraus in (2), so folgt zunächst:

$$r\cdot\left\{\cos\alpha\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\cos\beta\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\cos\gamma\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right\}=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

und hieraus, wenn man $t=s$ macht, unter Rücksicht auf (3) und auf

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$$

die Relation:

$$(7)\qquad r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds}\right)^2}}.$$

Aus der Anwendung von (7) auf (3), (4), (5) und (6) folgen noch einige andere Relationen, deren Ableitung keine Schwierigkeit zeigen wird, sobald wir sie zusammengestellt haben. Die wesentlichen Resultate lauten:

Lehrsatz II.

Versteht man unter r den Krümmungsradius der Curve im Punkt (x, y, z), unter (α, β, γ) seine Richtung von diesem Punkte aus zum Krümmungscentrum (ξ, η, ζ) hin, unter (λ, μ, ν) diejenige Richtung der Krümmungsaxe, welche das System der voranschreitenden Tangente, des Krümmungsradius und der Krümmungsaxe mit demjenigen der Coordinatenaxen x, y und z isotrop conjugirt, so ist — falls die Bogenabscisse s zur unabhängigen Variabeln gemacht wird:

$$(8)\qquad r = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$(9)\qquad \frac{\cos\alpha}{x''} = \frac{\cos\beta}{y''} = \frac{\cos\gamma}{z''} = r, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$(10)\qquad \frac{\cos\lambda}{y'z'' - z'y''} = \frac{\cos\mu}{z'x'' - x'z''} = \frac{\cos\nu}{x'y'' - y'x''} = r, \quad \ldots (5)$$

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} \cos\lambda, & x', & x'' \\ \cos\mu, & y', & y'' \\ \cos\nu, & z', & z'' \end{vmatrix} = \frac{1}{r}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma} = r, \\ \frac{\xi - x}{x''} = \frac{\eta - y}{y''} = \frac{\zeta - z}{z''} = r^2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Bedeutet aber (ξ, η, ζ) nicht nur das Krümmungscentrum, sondern einen **beliebigen Punkt der Schmiegungsebene,** so ist die Gleichung der letzteren:

(13) $$(\xi - x) \cdot \cos\lambda + (\eta - y)\cos\mu + (\zeta - z)\cos\nu = 0$$

oder:

(14) $$(\xi - x)(y'z'' - z'y'') + (\eta - y)(z'x'' - x'z'') + (\zeta - z)(x'y'' - y'x'') = 0.$$

Die **Gleichungen der Krümmungsaxe** sind, wenn ξ, η, ζ deren laufende Coordinaten bedeuten:

(15) $$\left\{ \begin{array}{l} (\xi - x) \cdot x' + (\eta - y) \cdot y' + (\zeta - z) \cdot z' = 0, \\ (\xi - x) \cdot x'' + (\eta - y) \cdot y'' + (\zeta - z) \cdot z'' = 1 \end{array} \right\} \text{(1) u. (2)}$$

oder:

(16) $$\frac{\xi - x - r^2 x''}{y'z'' - z'y''} = \frac{\eta - y - r^2 y''}{z'x'' - x'z''} = \frac{\zeta - z - r^2 z''}{x'y'' - y'x''}.$$

Soll irgend eine andere Grösse t als die Bogenabscisse s zur unabhängigen Variabeln gemacht werden, so ist in den obigen Formeln zu substituiren:

$$x' = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} : \frac{ds}{dt},$$

$$y' = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} : \frac{ds}{dt},$$

$$z' = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} : \frac{ds}{dt};$$

$$x'' = \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{ds}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} \right\} : \left(\frac{ds}{dt}\right)^3,$$

$$y'' = \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{ds}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} \right\} : \left(\frac{ds}{dt}\right)^3,$$

$$z'' = \left\{ \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{ds}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \frac{dz}{dt} \right\} : \left(\frac{ds}{dt}\right)^3;$$

$$y'z''-z'y''=\left\{\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right\}:\left(\frac{ds}{dt}\right)^3,$$

$$z'x''-x'z''=\left\{\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right\}:\left(\frac{ds}{dt}\right)^3,$$

$$x'y''-y'x''=\left\{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right\}:\left(\frac{ds}{dt}\right)^3.$$

Das Resultat der übrigens leichten Rechnung lässt sich so **aussprechen:**

Zusatz.

Macht man irgend eine beliebige Grösse zur unabhängigen Variabeln, so ist:

(17) $$r=\frac{s'^3}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

(18) $$\frac{\cos\alpha}{s'x''-x's''}=\frac{\cos\beta}{s'y''-y's''}=\frac{\cos\gamma}{s'z''-z's''}$$
$$=\frac{r}{s'^3}=\frac{1}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

(19) $$\frac{\cos\lambda}{y'z''-z'y''}=\frac{\cos\mu}{z'x''-x'z''}=\frac{\cos\nu}{x'y''-y'x''}$$
$$=\frac{r}{s'^3}=\frac{1}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}}, \quad \ldots\ldots (10)$$

(20) $$\begin{vmatrix}\cos\lambda, & x', & x''\\ \cos\mu, & y', & y''\\ \cos\nu, & z', & z''\end{vmatrix}=\frac{s'^3}{r}=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}, \quad \cdot (11)$$

Für das **Krümmungscentrum** (ξ, η, ζ) ergiebt sich:

(21) $$\frac{\xi-x}{s'x''-x's''}=\frac{\eta-y}{s'y''-y's''}=\frac{\zeta-z}{s'z''-z's''}=\frac{r^2}{s'^3} \quad \cdot\cdot (12)$$

Die Gleichung der **Schmiegungsebene** bewahrt ihre Form (14) unverändert. Die Gleichungen der **Krümmungsaxe** kann man entweder in ihrer ursprünglichen Gestalt [(1) und (2)] oder auch in der Form

$$(22)\qquad \frac{(\xi - x)\cdot s'^3 - r^2\cdot(s'x'' - x's'')}{y'z'' - z'y''} = \frac{(\eta - y)\cdot s'^3 - r^2\cdot(s'y'' - y's'')}{z'x'' - x'z''} = \frac{(\zeta - z)\cdot s'^3 - r^2\cdot(s'z'' - z's'')}{x'y'' - y'x''} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

verwenden.

§ 137.

Allgemeine Theorie der Schmiegungsflächen, insbesondere der Schmiegungskugel; die Torsion der Raumcurven.

Die bei Gelegenheit der gegenseitigen Berührung ebener Curven eingeführten Begriffe des Contactes n^{ter} Ordnung, der Krümmungscurve u. s. w. kann man offenbar direct auf die Raumcurven übertragen, da in ihnen nichts liegt, was eine zwingende Beziehung zur Ebene hätte. Thut man dies, so wird man sagen:

Zwei Raumcurven haben im Punkte (x, y, z) einen Contact n^{ter} Ordnung, sobald die Derivirten der Coordinaten dieses Punktes von der ersten bis zur n^{ten} Ordnung incl. bei beiden Curven übereinstimmen; und die eine Curve heisst die Krümmungscurve der andern, sobald die sämmtlichen Constanten ihrer beiden Gleichungen durch die Form der letzteren und durch die Ordnung des Contactes bestimmt sind.

Die beiden Gleichungen, welche zur Definition einer Raumcurve nöthig sind, kann man ansehn als die Gleichungen zweier Flächen, welche sich längs der Raumcurve schneiden. Daher ist es ein durchaus präciser Begriff, wenn man sagt:

Eine Curve und eine Fläche haben im Punkte (x, y, z) einen Contact n^{ter} Ordnung, sobald in der letzteren eine Curve liegt, welche mit der ersteren einen Contact von gleich hoher Ordnung hat.

Hieraus folgt:

Sollen zwei Curven in einem Punkte (x, y, z) einen Contact n^{ter} Ordnung haben, so muss jede von beiden mit jeder Fläche, welche durch die andere hindurchgeht, einen gleich hohen Contact haben.

Nach diesen Erwägungen liegt es nahe — analog dem Begriff der Krümmungscurve — für die Beziehung einer Fläche zu einer Curve den folgenden Begriff aufzustellen:

Definition.

Unter allen Flächen, deren Gleichungen die gemeinsame Form $\psi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ haben, heisst diejenige, welche mit einer gegebenen Curve im Punkte (x, y, z) einen Contact von möglichst hoher Ordnung hat, die **Schmiegungsfläche** der Curve für den Punkt (x, y, z).

Zusatz.

Enthält die Gleichung $\psi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ einer Fläche $(n+1)$ willkürliche Constanten, so ist sie die Gleichung der **Schmiegungsfläche** einer gegebenen Curve im Punkte (x, y, z), falls die $(n+1)$ Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \psi(x, y, z) = 0, \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{dt} = 0, \\ \text{u. s. w.} \\ \dfrac{d^n\psi}{dt^n} = \dfrac{\partial^n\psi}{\partial x^n}\cdot\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^n + \cdots\cdots\cdots = 0 \end{cases}$$

erfüllt werden, sobald man die Derivirten der Coordinaten der Fläche durch diejenigen der Curve ersetzt.

Um zunächst zu zeigen, dass die im vorigen § als Schmiegungsebene bezeichnete Ebene es auch nach dem obigen allgemeinen Begriff der Schmiegungsflächen überhaupt ist, gehen wir davon aus, dass jede Ebene, welche durch den Punkt (x, y, z) hindurchgeht, der Gleichung

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = (\xi - x) \cdot \cos\lambda + (\eta - y) \cdot \cos\mu + (\zeta - z) \cdot \cos\nu = 0$$

genügen muss, wodurch die erste unter den Gleichungen (1) erfüllt wird.

Diese Gleichung enthält, weil

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1$$

ist, zwei willkürliche Constanten, so dass sich noch die Gleichungen

$$\frac{d\psi(\xi, \eta, \zeta)}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\psi(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = 0$$

für $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ erfüllen lassen, d. i. die Gleichungen:

$$\cos\lambda \cdot \frac{dx}{dt} + \cos\mu \cdot \frac{dy}{dt} + \cos\nu \cdot \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\cos\lambda \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \cos\mu \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \cos\nu \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Dies sind aber dieselben Gleichungen, aus denen λ, μ, ν auch im vorigen § bestimmt wurden.

Wenden wir uns jetzt zur Bestimmung der Schmiegungskugel, so muss deren Gleichung offenbar die Form haben:

$$(a - \xi)^2 + (b - \eta)^2 + (c - \zeta)^2 = R^2.$$

Sie enthält vier willkürliche Constanten, nämlich die drei Coordinaten a, b, c des Schmiegungscentrums und den Schmiegungsradius R; sie muss daher nach (1) den vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
(a-x)^2 &+ (b-y)^2 + (c-z)^2 = R^2,\\
(a-x)\cdot x' &+ (b-y)\cdot y' + (c-z)\cdot z' = 0,\\
(a-x)\cdot x'' &+ (b-y)\cdot y'' + (c-z)\cdot z'' = x'^2 + y'^2 + z'^2 = s'^2,\\
(a-x)\cdot x''' &+ (b-y)\cdot y''' + (c-z)\cdot z''' = 3\cdot(x'x'' + y'y'' + z'z'')\\
& = 3\cdot s's''
\end{aligned}$$

genügen, welche, wenn s zur unabhängigen Variabeln gemacht wird, die einfachere Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned}
(a-x)^2 &+ (b-y)^2 + (c-z)^2 = R^2,\\
(a-x)\cdot x' &+ (b-y)\cdot y' + (c-z)\cdot z' = 0,\\
(a-x)\cdot x'' &+ (b-y)\cdot y'' + (c-z)\cdot z'' = 1,\\
(a-x)\cdot x''' &+ (b-y)\cdot y''' + (c-z)\cdot z''' = 0.
\end{aligned}$$

Aus den drei letzten Gleichungen lassen sich die Coordinaten a, b, c des Schmiegungscentrums bestimmen; und zwar ergiebt sich, wenn man die Determinante

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix} = D$$

bezeichnet:

$$D\cdot(a-x) = \begin{vmatrix} 0, & y', & z'. \\ 1, & y'', & z'' \\ 0, & y''', & z''' \end{vmatrix} = -(y'z''' - z'y''');$$

und analog:

$$D\cdot(b-y) = -(z'x''' - x'z'''),$$
$$D\cdot(c-z) = -(x'y''' - y'x''').$$

Ferner ergiebt sich durch die Substitution dieser Werthe in der ersten der vier Gleichungen:

$$D^2\cdot R^2 = (x'y''' - y'x''')^2 + (y'z''' - z'y''')^2 + (z'x''' - x'z''')^2,$$

wodurch der Schmiegungsradius R bestimmt ist.

Die hier gefundenen Resultate lassen sich in mannichfacher Weise umgestalten:

Es ist u. a. — vergl. die Anmerkung zu § 82 —

$$D^2 = \begin{vmatrix} x'^2 + y'^2 + z'^2, & x'x'' + y'y'' + z'z'', & x'x''' + y'y''' + z'z''' \\ x'x'' + y'y'' + z'z'', & x''^2 + y''^2 + z''^2, & x''x''' + y''y''' + z''z''' \\ x'x''' + y'y''' + z'z''', & x''x''' + y''y''' + z''z''', & x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 \end{vmatrix}.$$

Da s als die unabhängige Variable gedacht wird, so hat man aber

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

und in Folge dessen ferner:

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

$$[x''^2 + y''^2 + z''^2] + [x'x''' + y'y''' + z'z'''] = 0.$$

Die letzte von diesen Relationen lässt sich wegen der Formel (8) des vorigen § für den Krümmungsradius r auch so darstellen:

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = -[x'x''' + y'y''' + z'z'''] = r^{-2};$$

und hieraus folgt:

$$x''x''' + y''y''' + z''z''' = -r^{-3}\cdot r'.$$

Durch die Substitution dieser Werthe geht D^2 über in:

$$D^2 = \begin{vmatrix} +1, & 0, & -r^{-2} \\ 0, & +r^{-2}, & -r^{-3}\cdot r' \\ -r^{-2}, & -r^{-3}\cdot r', & \Sigma x'''^2 \end{vmatrix}$$
$$= r^{-2}\cdot(x'''^2 + y'''^2 + z'''^2) - r^{-6}\cdot(1 + r'^2).$$

Der Ausdruck, welchen wir oben für $D^2 \cdot R^2$ gefunden haben, lässt sich so transformiren:

$$D^2 \cdot R^2 = (x'y''' - y'x''')^2 + (y'z''' - z'y''')^2 + (z'x''' - x'z''')^2$$

$$= x'''^2(y'^2 + z'^2) + y'''^2(z'^2 + x'^2) + z'''^2(x'^2 + y'^2)$$

$$- 2\,x'y'x'''y''' - 2\,y'z'y'''z''' - 2\,z'x'z'''x'''$$

$$= x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - (x'x''' + y'y''' + z'z''')^2,$$

wo der letzte Ausdruck aus der Anwendung von

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

folgt.

Daher ist:

$$D^2 \cdot R^2 = (x'''^2 + y'''^2 + z'''^2) - r^{-4}.$$

Dies giebt in Verbindung mit

$$D^2 = r^{-2} \cdot (x'''^2 + y'''^2 + z'''^2) - r^{-6} - r^{-6} \cdot r'^2$$

das Resultat:

$$D^2 \cdot R^2 = D^2 \cdot r^2 + r^{-4} \cdot r'^2.$$

Berücksichtigt man aber, dass in dem Ausdruck

$$D \cdot (a - x) = -(y'z''' - z'y''')$$

wegen der Formel

$$y'z'' - z'y'' = r^{-1} \cos\lambda \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{[§ 136, (10)]}$$

gesetzt werden kann:

$$y'z''' - z'y''' = \frac{d \cdot r^{-1} \cos\lambda}{d\,s} = -r^{-2} r' \cdot \cos\lambda + r^{-1} \cdot \frac{d \cos\lambda}{d\,s},$$

so folgt auch:

$$D^2 \cdot R^2 = D^2 \cdot (a - x)^2 + D^2 \cdot (b - y)^2 + D^2 \cdot (c - z)^2$$

$$= r^{-4} \cdot r'^2 \cdot [\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2]$$

$$- 2\,r^{-3} r' \cdot \left[\cos\lambda \cdot \frac{d \cos\lambda}{d\,s} + \cos\mu \cdot \frac{d \cos\mu}{d\,s} + \cos\nu \cdot \frac{d \cos\nu}{d\,s}\right]$$

$$+ r^{-2} \cdot \left[\left(\frac{d \cos\lambda}{d\,s}\right)^2 + \left(\frac{d \cos\mu}{d\,s}\right)^2 + \left(\frac{d \cos\nu}{d\,s}\right)^2\right].$$

Von den eckigen Klammern im letzten Ausdruck ist die erste $= 1$ und daher die zweite $= 0$.

Setzt man mithin

$$\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\varrho^2},$$

so ergiebt sich:

$$D^2 \cdot R^2 = r^{-4} \cdot r'^2 + r^{-2} \cdot \varrho^{-2}.$$

Und hieraus folgt in Verbindung mit dem vorhin für $D^2 \cdot R^2$ gefundenen Ausdruck die Relation:

$$D^2 \cdot r^2 = r^{-2} \cdot \varrho^{-2},$$

also:

$$\varrho = \frac{1}{D \cdot r^2};$$

und wenn man hieraus

$$D = r^{-2} \varrho^{-1}$$

in

$$D^2 \cdot R^2 = D^2 \cdot r^2 + r^{-4} \cdot r'^2$$

substituirt, auch die Relation:

$$R^2 = r^2 + \varrho^2 \cdot r'^2.$$

Die Grösse ϱ nennt man den **Radius der zweiten Krümmung** oder den **Torsionsradius** der Curve im Punkt (x, y, z).

Um ihre geometrische Bedeutung klarzulegen, so seien (λ, μ, ν) und $(\lambda + \Delta\lambda,\ \mu + \Delta\mu,\ \nu + \Delta\nu)$ die Richtungen der Krümmungsaxen, welche zu den Curvenpunkten s und $(s + \Delta s)$ gehören, φ der Winkel, welchen diese Krümmungsaxen mit einander bilden. Dann hat man:

$$1 = \cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2,$$

$$1 = \cos(\lambda + \Delta\lambda)^2 + \cos(\mu + \Delta\mu)^2 + \cos(\nu + \Delta\nu)^2,$$

$$\cos\varphi = \cos\lambda\cos(\lambda + \Delta\lambda) + \cos\mu\cos(\mu + \Delta\mu) + \cos\nu\cos(\nu + \Delta\nu).$$

Addirt man die beiden ersten Gleichungen zu einander und subtrahirt dann das Doppelte der letzten, so folgt:

$$4\sin\frac{\varphi}{2}^2 = (\varDelta\cos\lambda)^2 + (\varDelta\cos\mu)^2 + (\varDelta\cos\nu)^2,$$

$$\lim_{\varDelta s=0} \cdot \left(\frac{\varphi}{\varDelta s}\right)^2 = \left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\varrho^2},$$

$$\varrho = \lim_{\varDelta s=0} \cdot \frac{\varDelta s}{\varphi}.$$

Mithin ist der Torsionsradius ϱ der Grenzwerth des Radius eines Kreises, in welchem auf einem Bogen von der Grösse $\varDelta s$ ein Centriwinkel von der Grösse des Neigungswinkels der Krümmungsaxen oder der Schmiegungsebenen der Endpunkte von $\varDelta s$ gegen einander steht.

Die aufgefundenen Formeln stellen wir zusammen in dem

Lehrsatz.

Bedeutet (a, b, c) das Centrum, R den Radius der **Schmiegungskugel**, ϱ den **Torsionsradius** und r den **Krümmungsradius**, so hat man, indem der Abkürzung wegen

$$D = \begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix}$$

gesetzt wird:

$$\frac{a-x}{y'z'''-z'y'''} = \frac{b-y}{z'x'''-x'z'''} = \frac{c-z}{x'y'''-y'x'''} = -\frac{1}{D}.$$

$$R^2 = r^2 + \frac{r'^2}{D^2 \cdot r^4}$$

$$= r^2 + \varrho^2 \cdot r'^2,$$

$$\varrho = \pm \frac{1}{D \cdot r^2},$$

$$D^2 = r^{-2} \cdot (x'''^2 + y'''^2 + z'''^2) - r^{-6} \cdot (1 + r'^2)$$

$$r' = -r^3 \cdot (x''x''' + y''y''' + z''z''').$$

Die Curve liegt in einer einzigen Ebene, falls identisch

$$D = 0$$

wird.

§ 138.

Tangentialebene und Normale einer Fläche.

Zieht man auf einer Fläche, deren Gleichung

(1) $$\varphi(x, y, z) = 0$$

sei, vom Punkte (x, y, z) aus eine Linie und nennt das zunächst gelegene Linienelement $\varDelta s$, so genügen die Endpunkte desselben der Gleichung

$$\varphi(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y,\ z + \varDelta z) = 0.$$

Mithin erfüllen die Cosinus der Richtungswinkel der Tangente jener Linie im Punkte (x, y, z) — nämlich $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ — die Gleichung

(2) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} = 0.$$

Das Gleichungspaar der Tangente ist aber:

(3) $$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{ds}} = r,$$

wo r die Entfernung des Tangentenpunktes (ξ, η, ζ) vom Berührungspunkt (x, y, z) bedeutet.

Substituirt man aus (3) in (2), so findet man, dass die laufenden Coordinaten (ξ, η, ζ) der Tangente der Gleichung

$$(4)\qquad (\xi - x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\eta - y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (\zeta - z) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

unterworfen sind.

Da die Richtung, in welcher die zu berührende Linie auf der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ vom Berührungspunkte (x, y, z) aus gezogen wurde, in dieser Gleichung nicht auftritt, so gilt sie für alle Tangenten der Fläche im Punkt (x, y, z). Ihre Form zeigt an, dass sämmtliche Tangenten in einer Ebene liegen, für welche die Cosinus der Richtungswinkel des Lothes den Grössen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

proportional sind.

Freilich wird hierbei vorausgesetzt, dass diese partiellen Derivirten von φ völlig bestimmte Werthe haben und bei jeder hinreichend kleinen Verschiebung des Berührungspunktes auf der Fläche nur stetige Veränderungen erleiden, weil nach § 9 die Gleichung (2) nur für solche Lagen von Δs auf der Fläche gefolgert werden kann, welche die Stetigkeitsbedingung erfüllen. Da dieselbe gleichbedeutend mit der Stetigkeitsbedingung für $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ und $\frac{dz}{ds}$ ist, so lehrt die einfache Anschauung, dass die Punkte in Kanten, Sprungrändern, Spitzen — z. B. bei körperlichen Ecken — u. s. w. Ausnahmen machen. In ihnen ist die Stetigkeit auf abgegrenzte Gebiete der Fläche beschränkt; und es gilt dann auch nur für diese einzelnen Gebiete, dass die Tangenten der Fläche in einer Ebene liegen.

Hieraus ergiebt sich der

Lehrsatz.

Sämmtliche Tangenten einer Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ in einem Punkt (x, y, z), in welchem die drei partiellen Derivirten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

bestimmte und von der Differentiationsrichtung unabhängige Werthe haben, liegen in **einer** Ebene — der „**Tangentialebene**"; deren Gleichung ist:

$$(4)\qquad (\xi - x)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (\eta - y)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (\zeta - z)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Die Gleichung der **Normale** in diesem Punkt, d. h. des Lothes auf der Tangentialebene, ist

$$(5)\qquad \frac{\xi - x}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}.$$

Sind die partiellen Derivirten $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ im Punkte (x, y, z) auf irgend welche Weise unstetig, so liegen die Tangenten — wenn es solche überhaupt giebt — generell in verschiedenen Ebenen, liefern also auch verschiedene Normalen.

§ 139.

Complanation der Flächen.

Man umgrenze auf der Fläche

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

einen Theil f derselben, welcher auf der xy-Ebene eine solche Projection F hat, dass die verschiedenen Punkte von F verschiedenen Punkten von f entsprechen, zerschneide F in Rechtecke, deren Seiten den Axen der x und der y parallel sind, und errichte über den einzelnen Rechtecken ΔF grade Cylinder bis über die Fläche f hinaus. Dadurch werden auf der letzteren Theile ausgeschnitten, von denen jeder sich desto enger an den entsprechenden Theil Δf der Tangentialebene eines seiner Punkte anschmiegt, je kleiner ΔF genommen wird.

Der Neigungswinkel derjenigen Tangentialebene, in welcher Δf liegt, gegen die xy-Ebene heisse γ. Dann ist γ auch der

Neigungswinkel der im Berührungspunkt (x, y, z) errichteten Normale gegen die z-Axe, weil zwei Ebenen gegen einander denselben Neigungswinkel haben, wie ihre Lothe; und man hat nach § 138, (5):

$$\cos\gamma = \frac{\partial\varphi}{\partial z} : \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2},$$

während nach einem elementaren Satz über die Grösse der Projection eines ebenen Feldes

$$\frac{\Delta F}{\Delta f} = \cos\gamma$$

ist.

Der Winkel γ variirt bei der Verschiebung des Berührungspunktes in dem über ΔF liegenden Theil von f desto weniger, je kleiner die Dimensionen von ΔF sind, nähert sich also bei unendlich abnehmenden Seitenlängen des Rechtecks ΔF einem bestimmten Grenzwerth — falls nämlich die Fläche f in jedem ihrer Punkte eine einzige bestimmte Normale besitzt. Mithin ist unter derselben Voraussetzung auch

$$\frac{df}{dF} = \frac{1}{\cos\gamma}$$

ein völlig bestimmter Grenzwerth.

Die Anschauung ergiebt das Axiom, dass das Grössenverhältnis zwischen Δf und dem zugehörigen Theil von f sich dem Grenzwerthe 1 nähert, wenn die Dimensionen von Δf unendlich abnehmen. Mithin kann man in der letzten Gleichung df auch als Element der Fläche f ansehn. Und da, seiner Definition gemäss,

$$dF = dx \cdot dy$$

ist, so ergiebt sich aus dem Obigen der folgende

Lehrsatz.

Bedeutet f einen solchen Theil der Fläche

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

dessen verschiedene Punkte auch verschiedene Projectionspunkte in der xy-Ebene haben und ausserdem bestimmte

Tangentialebenen besitzen, so ist, indem F die Projection von f in der xy-Ebene und γ den Richtungswinkel der Normale von f im Punkte (x, y, z) gegen die z-Axe bedeutet:

$$(1) \qquad f = \int \frac{dF}{\cos\gamma}$$

$$= \iint \frac{dx\, dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2},$$

wobei sich die Integration über das ganze Gebiet F zu erstrecken hat.

Übrigens ergiebt sich dieselbe Formel (1), wenn man die Projection F von f auf der xy-Ebene in Dreiecke ΔF zerlegt, in den Ecken der letzteren Lothe errichtet und die Durchstichpunkte derselben mit der Fläche f zur Construction eines Netzes von Dreiecken Δf verwendet, deren Projectionen die ΔF sind. Je kleiner man die Seiten dieser Projectionsdreiecke macht, desto enger wird die in f eingeschriebene gebrochene Fläche $\Sigma \Delta f$ sich an f anschmiegen; und es wird der Werth von $\Sigma \Delta f$ stets wachsen, wenn man die ΔF in drei Dreiecke zerlegt, weil man dadurch das zugehörige Δf durch den Mantel einer dreiseitigen Pyramide über dieser Grundfläche ersetzt. Ausserdem ist

$$\frac{\Delta F}{\Delta f} = \cos\gamma,$$

wenn γ den Neigungswinkel der beiden zusammengehörenden Dreiecksflächen ΔF und Δf gegen einander bedeutet. Besitzt daher die Fläche f in jedem ihrer Punkte eine Normale, so erlangt γ im Grenzfalle den Werth des gleichnamigen Richtungswinkels der letzteren, und es nimmt

$$\frac{dF}{df} = \cos\gamma$$

einen völlig bestimmten Werth an, weshalb dann auch

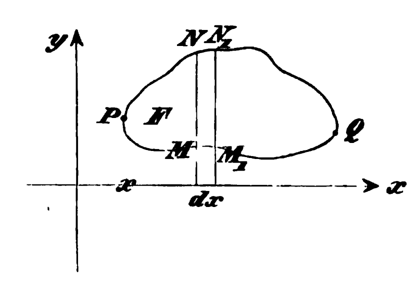
$$\lim_{\Delta F = 0} \cdot \Sigma \Delta f = \lim_{\Delta F = 0} \cdot \Sigma \frac{\Delta F}{\cos\gamma} = \int \frac{dF}{\cos\gamma}$$

einen völlig bestimmten Werth erhält.

Dies ist aber wieder die Formel (1).

Was die Ausführung der doppelten Integration in der Formel (1) betrifft, so muss man das Differential vermittelst der Flächengleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ zunächst als Function von x und y darstellen, indem man aus jener für $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ und für z substituirt. Man erhält dadurch einen Ausdruck von der Form:

$$f = \iint dx\, dy\, \Phi(x, y).$$



Integrirt man nun zunächst nach y und lässt dabei x constant, so heisst dies, dass man denjenigen Theil von f bestimmt, welcher über dem Streifen $M N N_1 M_1$ liegt. Man findet für ihn den Ausdruck:

$$dx \cdot \int_{\mu}^{\nu} \Phi(x, y)\, dy,$$

in welchem μ und ν die Ordinaten der Punkte M und N bedeuten. Ist F kein Rechteck, dessen Seiten parallel zu den Coordinatenaxen liegen, so sind demnach μ und ν Functionen von x, welche von der Gestalt der Projectionsfläche F in der xy-Ebene abhängen und durch dieselbe bestimmt werden. Hat man ihre Ausdrücke eingesetzt, so bleibt noch die Integration nach x übrig, d. i. die Entwickelung des Integrals

$$f = \int_{p}^{q} dx \int_{\mu}^{\nu} \Phi(x, y)\, dy,$$

in welchem p und q die Abscissen der äussersten Punkte P und Q von F in der Richtung der Abscissenaxe bedeuten, m. a. W.: die

Summation aller in dieser Richtung neben einander liegenden Streifen.

Ist die zu complanirende Fläche durch die Rotation einer ebenen Curve

$$y = \psi(x)$$

um die x-Axe entstanden, so kann man bei der Rechnung eine Integration ersparen. Denn bedeutet ω den Winkel, um welchen die Ordinate y sich gedreht hat, so ist ωy der von ihrem Endpunkt durchlaufene Weg (Bogen des Parallelkreises) auf der Rotationsfläche; und wenn noch ds das Linienelement, τ den Richtungswinkel der Tangente der Curve $y = \psi(x)$ im Punkte (x, y) bezeichnet, so ist

$$\omega y\, ds = \omega y \frac{dx}{\cos\tau} = \omega y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

die Grösse desjenigen Streifens auf der Rotationsfläche, welcher über dx liegt.

Mithin hat man für den zu complanirenden Theil der Rotationsfläche den Ausdruck:

$$(2) \qquad f = \int_{s_0}^{s} \omega y\, ds = \int_{x_0}^{x} \omega y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Hierbei kann ω sowohl als eine Constante, als auch als eine Function von x gedacht sein.

Im ersten Falle wird f ausser von den Bogen zweier Parallelkreise von zwei Meridianen begrenzt, welche den Längenunterschied ω haben; im zweiten Falle ist die Begrenzung von beliebiger Gestalt.

Setzt man ω als constant voraus, so ist demnach erstens

$$(3) \qquad f = \omega \cdot \int_{s_0}^{s} y\, ds$$

und zweitens — nach § 19 —

$$(4) \qquad \int_{s_0}^{s} y\, ds = y_1 \cdot (s - s_0),$$

wo y_1 einen bestimmten Werth unter allen denjenigen Werthen bedeutet, welche y in dem Integrationsintervall (s_0, s) annimmt.

Wegen gewisser mechanischer Eigenschaften nennt man das y_1 der Gleichung (4) die **Schwerpunktsordinate** des gleichmässig belasteten Curvenbogens

$$s - s_0 = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Durch die Substitution geht (3) über in:

(5) $$f = \omega y_1 \cdot (s - s_0).$$

Wir resumiren:

Lehrsatz II.

Begrenzt man auf einer Fläche, welche durch die Rotation der ebenen Curve $y = \psi(x)$ um die x-Axe erzeugt wird, einen Theil f und bezeichnet durch ω die Längendifferenz der Endpunkte des durch f hindurchgehenden Parallelkreises, so ist:

(2) $$f = \int_{x_0}^{x} \omega y \, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_{s_0}^{s} \omega y \, ds,$$

mag ω constant oder zugleich mit x variabel sein.

Hat ω einen von x unabhängigen Werth, liegt also f zwischen zwei Parallelkreisen und zwei Meridianen, so ist f gleich dem Felde eines Rechtecks, dessen eine Seite gleich der Länge $(s - s_0)$ des begrenzenden Meridianbogens und dessen andere Seite gleich dem Wege ωy_1 des Schwerpunktes des gleichmässig belasteten Meridianbogens ist.

Beispiel.

Die Oberfläche desjenigen Rotationsellipsoids, welches durch die Drehung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

um die x-Axe entsteht, findet man am bequemsten aus (2), wenn dort $\omega = 2\pi$, $x_0 = -a$, $x = +a$ macht.

Wir wollen zunächst die Grösse derjenigen Zone ermitteln, welche zwischen dem Äquator und einem Parallelkreise liegt, dessen Abscisse $= x$ ist. Man hat für dieselbe

$$f = 2\pi \cdot \int_0^x y\,dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\pi \cdot \int_0^x dx \sqrt{y^2 + \left(y\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

oder, weil

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2, \quad y\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}x$$

ist:

$$f = 2\pi \cdot \int_0^x dx \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2}$$

$$= 2\pi b \cdot \int_0^x dx \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4}x^2}.$$

Setzt man

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}x = \sin\varphi, \quad dx = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\cos\varphi\, d\varphi,$$

so kommt:

$$f = \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \int_0^\varphi \cos\varphi^2 d\varphi = \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \int_0^\varphi (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi,$$

d. i.:

$$f = \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]$$

$$= \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \left[\arcsin\frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} + \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \cdot \sqrt{1 - x^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^4}}\right].$$

Im Falle, dass $a = b$, dass die Ellipse also ein Kreis ist, hat unsere Entwickelung keine Bedeutung, weil dann der letzte Ausdruck für f wegen des Nenners $\sqrt{a^2 - b^2} = 0$ sinnlos wird; anstatt seiner tritt dann ein:

$$f = 2\pi b \cdot \int_0^x dx = 2\pi b \cdot x,$$

was bereits aus den Elementen der Stereometrie bekannt ist.

Ausserdem ergiebt der obige Ausdruck den Werth von f nur dann in reeller Form, wenn $a > b$, d. h. wenn die grosse Axe der Ellipse Rotationsaxe ist.

Setzt man aber $b > a$ voraus, so ist:

$$\sqrt{a^2 - b^2} = i \cdot \sqrt{b^2 - a^2},$$

$$\arcsin \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}$$

$$= \arcsin \frac{ix\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2} = i \cdot l\left(\frac{x\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2} + \sqrt{1 + x^2 \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^4}}\right),\text{[1]}$$

mithin in reeller Form:

$$f = \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \left\{ l\left(\frac{x\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2} + \sqrt{1 + x^2 \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^4}}\right) + \frac{x\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2} \cdot \sqrt{1 + x^2 \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^4}} \right\}.$$

---

[1]) Denn aus der identischen Gleichung

$$e^{-i \arcsin z} = \sqrt{1 - z^2} - iz$$

folgt, wenn man $z = iu$ einsetzt:

$$e^{-i \arcsin iu} = \sqrt{1 + u^2} + u;$$

$$\arcsin iu = -\frac{l(u + \sqrt{1 + u^2})}{i} = i\, l(u + \sqrt{1 + u^2}).$$

Mithin ergiebt sich für die ganze Oberfläche f des länglichen Rotationsellipsoids — welches durch die Rotation der Ellipse um die grössere Axe entsteht — wenn man die „numerische Excentricität“

$$\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\varepsilon,\quad (a>b)$$

einführt:

$$f=2\pi ab\cdot\left[\frac{\arc\sin\varepsilon}{\varepsilon}+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right]$$

$$=2\pi b\cdot\left[a\cdot\frac{\arc\sin\varepsilon}{\varepsilon}+b\right].$$

Für die ganze Oberfläche f des „abgeplatteten Rotationsellipsoids“ — welches durch die Rotation der Ellipse um die kleinere Axe entsteht — ergiebt sich, wenn man die „numerische“ Excentricität

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\varepsilon,\quad (a<b)$$

einführt:

$$f=2\pi\cdot\left[a^2.\,l\sqrt[2\varepsilon]{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}+b^2\right].$$

Das oben complanirte Rotationsellipsoid entsteht aus dem „dreiaxigen Ellipsoid“

$$\varphi(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

wenn man $c=b$ macht.

Da

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{2z}{c^2}$$

ist, so folgt aus (1):

$$f=\iint dx\,dy\cdot\frac{c^2}{z}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}},$$

wo die Integration über die ganze Schnittfläche der xy-Ebene mit dem Ellipsoid zu erstrecken ist, falls f den Theil der Oberfläche des Ellipsoids bedeutet, welcher auf einer Seite jener Coordinatenebene liegt.

Die Projection F von f in der xy-Ebene wird begrenzt von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die mit der y-Axe parallelen Streifen von F — in denen x constant ist — gehen daher

$$\text{von } y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ bis } y = +b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

so dass der Ausdruck

$$f = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{c^2 dy}{z} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

evaluirt werden muss.

Denselben kann man, weil das z in ihm nur positive Werthe hat, welche — wegen der Form der Gleichung des Ellipsoides — nur von der **absoluten** Grösse der Coordinaten x und y abhängen, auch so schreiben:

$$f = 4 \cdot \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{c^2 dy}{z} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Dies giebt, wenn man noch für z aus der Gleichung des Ellipsoids substituirt:

$$f = 4\int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \sqrt{\frac{1 - \frac{a^2-c^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2-c^2}{b^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Setzt man

$$\frac{x}{a} = \sin\varphi, \quad \frac{y}{b} = \cos\varphi \sin\psi,$$

so geht dieser Ausdruck über in:

$$f = 4ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \sqrt{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} \sin\varphi^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^2} \cos\varphi^2 \sin\psi^2}.$$

Für $b = c$ liegt ein Rotationsellipsoid vor, und die Integration geht leicht von Statten, weil das mit $\sin\psi$ behaftete Glied des Radicanden verschwindet. Sind aber b und c verschieden, so gelingt die Entwickelung in Elementarfunctionen nur vermittelst unendlicher Reihen. — Wir wollen uns hier nicht mit ihr befassen.

§ 140.

Cubatur der Körper.

Lehrsatz I.

Errichtet man über einem Theil F der xy-Ebene eine grade Cylinderfläche bis zur Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$, so ist das Volumen des hierdurch begrenzten Körpers

(1) $$v = \int z \, dF = \iint z \, dx \, dy,$$

die Integration über das ganze Areal von F ausgedehnt.

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellt auf der Stelle aus der Erwägung, dass $\Sigma z \cdot \Delta F$ die Summe der Volumina von graden Cylindern bedeutet, deren untere Grundflächen ΔF zusammen die Fläche F vollständig bedecken, während die oberen Grundflächen wenigstens je eine Ecke in der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ haben. Je kleiner man die Dimensionen der einzelnen ΔF macht, desto inniger schmiegt sich die aus den oberen Grundflächen gebildete Treppe an die Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ an, und das Volumen zwischen beiden nähert sich dem Grenzwerthe Null, weil die krumme Fläche die Grenzgestalt der gebrochenen ist.

Lehrsatz II.

Rotirt eine ebene Curve $y = \psi(x)$ um die x-Axe, so ist

$$(2) \qquad v = \frac{1}{2} \cdot \int_{x_0}^{x} \omega y^2 dx$$

das Volumen desjenigen Körpers, welcher zwischen x_0 und x von den einzelnen Ordinaten y durchschnitten wird; ω bedeutet den Centriwinkel des Kreissectors, welchen y beschreibt.

Ist ω **constant**, liegt also der Körper zwischen zwei Meridianebenen, deren Längendifferenz $= \omega$ ist (und zwischen den Ebenen zweier Parallelkreise), so hat man daher

$$(3) \qquad v = \frac{1}{2} \omega \cdot \int_{x_0}^{x} y^2 dx = (\omega y_1) F,$$

wobei F die Schnittfläche des Körpers mit der Meridianebene und (ωy_1) den Weg ihres Schwerpunktes bedeutet.

Die Gleichung (2) nämlich baut den Körper auf aus cylindrischen Stufen, deren Grundflächen die Kreisausschnitte $\frac{1}{2} \omega y^2$, und deren Höhen die unendlich kleinen dx sind.

Der zweite Ausdruck von v in (3) ergiebt sich daraus, dass

$$F = \int_{x_0}^{x} y \, dx$$

die Grösse des rotirenden Flächenstücks (d. i. des Meridianschnitts des Rotationskörpers) darstellt, und dass

$$y_1 = \frac{\int_{x_0}^{x} \frac{1}{2} y^2 dx}{\int_{x_0}^{x} y \, dx} = \frac{\int_{0}^{F} \frac{y}{2} dF}{F}$$

die Ordinate[1]) des „Schwerpunktes der Fläche F“ ist. Dieser Schwerpunkt beschreibt' bei der Rotation offenbar einen Kreisbogen von der Länge (ωy_1).

Beispiele.

I. Das Volumen des dreiaxigen Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

wird durch die drei Coordinatenebenen in 8 gleiche Theile zerschnitten, weil das Ellipsoid symmetrisch gegen diese Ebenen liegt. Das Volumen desjenigen Octanten, in welchem die drei Coordinaten positiv sind, lässt sich nach (2) so darstellen:

$$v = \iint z\,dx\,dy,$$

wobei die Integration nach x und y über denjenigen Quadranten der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erstreckt werden muss, in welchem x und y positiv sind.

Zerschneiden wir den letzteren in Streifen, welche der x-Axe parallel sind und die Breite dx haben, so ist in jedem von ihnen x constant und y variirt vom Werthe 0 bis zum Werthe $b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, während z den mit y variirenden Werth

$$z = c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

[1]) Die Abscisse des Schwerpunktes von F wird durch den Ausdruck

$$x_1 = \frac{\int_0^F x\,dF}{F} = \frac{\int_{x_0}^{x} x\,y\,dx}{\int_{x_0}^{x} y\,dx}$$

bestimmt.

hat. Mithin ist das Volumen der einzelnen mit der xz-Ebene parallelen Schichten des Octanten

$$= d\,x \cdot \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} d\,y \cdot c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot$$

Bei der Summation aller dieser Schichten variirt x hinterher von $x = 0$ bis $x = a$. Daher erhält man bei dieser Anordnung der Summation für den Octanten des Ellipsoids:

$$v = c \cdot \int_0^a d\,x \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} d\,y \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

als den präcisen Ausdruck für die vorzunehmenden Operationen.

Setzt man

$$y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sin\varphi, \quad d\,y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \cos\varphi\, d\,\varphi$$

ein, so folgt:

$$v = b\,c \cdot \int_0^a d\,x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi^2\, d\,\varphi,$$

oder weil

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi^2\, d\,\varphi = \frac{\pi}{4}$$

ist:

$$v = \frac{\pi}{4}\, b\,c \cdot \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) d\,x = \frac{1}{6}\, \pi\, a\, b\, c.$$

Für das Volumen des ganzen dreiaxigen Ellipsoids ergiebt sich daher:

$$V = 8\,v = \frac{4}{3}\, \pi\, a\, b\, c.$$

II. Das Rotationscycloid,

welches durch die Rotation der Cycloide

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi)$$

um ihre Basis entsteht, hat zwischen dem Pole $\varphi = 0$ und der Ebene des zum Wälzungswinkel φ gehörenden Parallelkreises nach (2) das Volumen

$$v = \pi \cdot \int_0^x y^2 \, dx = \pi r^3 \cdot \int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^3 \, d\varphi$$

$$= 8\pi r^3 \cdot \int_0^\varphi \sin\frac{\varphi}{2}^{6} \, d\varphi$$

$$= \pi r^3 \cdot \left\{ \frac{5}{2}\varphi - \left[5 + \frac{10}{3}\sin\frac{\varphi}{2}^{2} + \frac{8}{3}\sin\frac{\varphi}{2}^{4}\right] \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \right\}$$

$$= \pi r^3 \cdot \left\{ \frac{5}{2}\varphi - \frac{1}{6}\sin\varphi\,[23 - 9\cos\varphi + \cos 2\varphi] \right\}.$$

Das ganze Rotationscycloid von Pol zu Pol besitzt daher das Volumen

$$V = 5\pi^2 r^3.$$

Ist der Winkel ω bei den verschiedenen Werthen von x (oder φ) verschieden, so bleibt in der Formel (2) das ω unter dem Integralzeichen; und es geht für ein zwischen den Parallelkreisen α und φ liegendes Volumen des Cycloids der allgemeine Ausdruck

$$v = 4r^3 \cdot \int_\alpha^\varphi \omega \sin\frac{\varphi}{2}^{6} \, d\varphi$$

hervor.

Verlangen wir demnach z. B., dass der herauszuschneidende Keil auf dem ihm zukommenden Theil der Rotationsoberfläche gleich lange Bögen b der Parallelkreise trage, so ist

$$\omega = \frac{b}{y} = \frac{b}{2r\sin\frac{\varphi}{2}^{2}}$$

zu setzen. Dann wird

$$v = 2\,r^2 b \cdot \int_\alpha^\varphi \sin\frac{\varphi}{2}^4 d\varphi$$

$$= \frac{1}{8}\,r^2 b \cdot \left[6\,(\varphi - \alpha) - 8\,(\sin\varphi - \sin\alpha) + (\sin 2\,\varphi - \sin 2\,\alpha)\right].$$

Das ist für $\alpha = \pi$, $\varphi = \pi + \mu$ im besondern:

$$v = \frac{1}{8}\,r^2 b \cdot [6\,\mu + 8 \sin\mu + \sin 2\,\mu].$$

§ 141.

Krümmung der Flächen.

Vergegenwärtigt man sich irgend eine von Ebene und Kugel verschiedene Fläche, z. B. eine Cylinder- oder Kegelfläche oder gar eine nach Art eines Sattels gekrümmte Fläche, so giebt die blosse Anschauung Anlass zu dem Urtheil,

dass die einzelnen Flächen nach verschiedenen Richtungen hin generell verschiedene Grade der Krümmung besitzen.

Man wird es daher von vorne herein von der Hand weisen müssen, die Analogie von Curve und Krümmungskreis in der Weise zu verfolgen, dass eine Kugel aufgesucht werde, welche sich in der unmittelbaren Nachbarschaft eines Punktes einer gegebenen Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ überall enger an diese Fläche anschlösse als eine andere Kugel.

Was für eine einfache Gattung von „Krümmungsflächen“ sich anstatt einer solchen — unmöglichen — Kugel einführen lassen mag, wird man erst nach der Untersuchung der Krümmungen aller derjenigen Schnitte unserer Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ bestimmen können, welche durch den einen Punkt (x, y, z) hindurchgehn.

Zieht man aber durch den Punkt (x, y, z) der vorgelegten Fläche eine beliebige Curve, so liegt deren Krümmungskreis in der Schmiegungsebene derselben und ist identisch mit dem Krümmungskreise ihrer Projection in der Schmiegungsebene.

Mithin genügt es, die Krümmungen der einzelnen Curven zu untersuchen, in welchen die Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ von den verschiedenen Ebenen geschnitten wird, die durch den Punkt (x, y, z) gelegt werden können.

Wir wollen zunächst diejenigen Curven betrachten, in welchen die Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ von den durch eine bestimmte Tangente hindurchgelegten Ebenen geschnitten wird, und hierauf die Tangente um ihren Berührungspunkt drehen, um diejenigen Schnitte mit einander zu vergleichen, welche verschieden gerichtete Tangenten in sich enthalten.

Fasst man eine bestimmte Tangente von $\varphi(x, y, z) = 0$ ins Auge, legt durch dieselbe eine Ebene, bezeichnet die bis zum Berührungspunkt (x, y, z) reichende Schnittcurve durch s, deren Krümmungsradius durch r, die Richtung des letzteren vom Berührungspunkte aus durch (α, β, γ) und sieht s als unabhängige Variable an, so hat man nach § 136, (9) die Relation:

$$\frac{\cos\alpha}{x''} = \frac{\cos\beta}{y''} = \frac{\cos\gamma}{z''} = r.$$

In dem Normalschnitt der Fläche, welche durch dieselbe Tangente gelegt ist, sei ϱ der Krümmungsradius und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ dessen Richtung. Der Richtungswinkel von r und ϱ gegen einander heisse θ. Dann ist nach § 138:

$$(1) \quad \frac{\cos\alpha_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{\cos\beta_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{\cos\gamma_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}},$$

und nach einem bekannten Satze:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

Substituirt man in der letzten Formel aus den beiden vorhergehenden, so kommt:

$$\cos\theta = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot x'' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot y'' + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot z''}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}\cdot r,$$

$$r = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot x'' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y'' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot z''} \cdot \cos\theta.$$

Der hier mit $\cos\theta$ multiplicirte Bruch ist unabhängig von θ oder — was dasselbe heisst — von der besondern Lage der durch die feste Tangente gelegten Schnittebene; m. a. W.: er ist gleich gross für alle diejenigen Curven auf der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$, welche dieselbe Tangente haben. Denn differentiirt man die Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ zweimal nach s, so folgt:

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot x'' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y'' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot z''$$

$$= - \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot x'^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot y'^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \cdot z'^2 \\ + 2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot x'y' + 2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \cdot y'z' + 2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \cdot z'x' \end{array} \right\};$$

und in dieser Gleichung hängt die rechte Seite nur von den partiellen Derivirten der Function φ und von den Cosinus x', y', z' der Richtungswinkel der Tangente ab.

Mithin bedeutet jener mit $\cos\theta$ multiplicirte Bruch den Krümmungsradius ϱ des Normalschnitts — denn für diesen ist $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$.

Das Resultat dieser Betrachtung lässt sich so aussprechen:

(Meunierscher) **Lehrsatz I.**

Der Krümmungsradius ϱ eines Normalschnitts der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ im Punkte (x, y, z) hat den Werth:

$$(3) \qquad \varrho = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot x'' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y'' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot z''},$$

wenn man unter x'', y'', z'' die zweiten Derivirten von x, y, z nach dem Bogen des Normalschnitts oder auch nach dem

Bogen einer andern so auf der Fläche liegenden Curve versteht, dass diese sich mit dem Normalschnitt im Punkte (x, y, z) berührt. Bedeutet r den Krümmungsradius der zweiten Curve und θ den Neigungswinkel ihrer Schmiegungsebene gegen den normalen Schnitt, so ist unter allen Umständen

$$r = \varrho \cdot \cos\theta. \tag{4}$$

Vorausgesetzt wird hierbei, dass die ersten und auch die zweiten [1]) partiellen Derivirten von $\varphi(x, y, z)$ völlig bestimmte Werthe haben.

Da die Krümmungscentra aller derjenigen Curven auf $\varphi(x, y, z) = 0$, welche einerlei Tangente haben, in der zu dieser Tangente lothrechten Normalebene liegen, so lässt die Gleichung (4) folgende Interpretation zu:

Beschreibt man über dem Krümmungsradius des Normalschnitts als Durchmesser einen Kreis, dessen Ebene auf der Tangente des Normalschnitts lothrecht steht, so ist dieser Kreis der geometrische Ort der Krümmungscentra aller derjenigen Curven auf der Fläche, welche dieselbe Tangente haben. — Ist ϱ bestimmt, so hat die besondere Beschaffenheit der Fläche weiter keinen Einfluss auf den Werth von r.

Setzt man voraus, dass der Berührungspunkt der Fläche $\varphi(x, y, z)$ mit ihrer Tangentialebene zum Nullpunkte des Coordinatensystems, die Tangentialebene selbst aber zur xy-Ebene gemacht sei — und das soll von jetzt ab geschehn — so liegt das Krümmungscentrum des Normalschnitts in der z-Axe.

Dann ist in der Formel (1):

$$\cos\alpha_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\beta_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\gamma_1 = \pm 1,$$

und zwar gilt für $\cos\gamma_1 = \pm 1$ das obere oder das untere Vorzeichen, je nachdem das Krümmungscentrum in der Verlängerung der z-Axe liegt oder umgekehrt. Daraus folgt nach (1) weiter:

[1]) Wegen der Relation (2).

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2};$$

und aus (3):

$$\varrho=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot z''}=\pm\frac{1}{z''}$$

unter derselben Bedingung über die Vorzeichen.

Legen wir also dem ϱ die Bedeutung der z-Coordinate des Krümmungscentrums bei, so geschieht dies dadurch, dass wir

$$(5)\qquad \varrho=\frac{1}{z''},\quad \frac{1}{\varrho}=z''=\frac{d^2z}{ds^2}$$

setzen.

Der Werth von $\frac{d^2z}{ds^2}$ kann sich ändern, wenn die Richtung von ds auf der vorliegenden Fläche sich ändert. Um die fragliche Änderung zu bestimmen, bezeichnen wir durch ω den Richtungswinkel der Projection von ds in der xy-Ebene gegen die Verlängerung der x-Axe. Dann sind

$$\frac{dx}{ds}=\cos\omega,\quad \frac{dy}{ds}=\sin\omega$$

bei der Differentiation von z nach s constante Grössen; und es folgt:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\omega+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\omega,$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=\left[\frac{\partial^2z}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right]\cdot\cos\omega+\left[\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{ds}\right]\cdot\sin\omega$$

$$=\frac{\partial^2z}{dx^2}\cdot\cos\omega^2+2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\cdot\cos\omega\sin\omega+\frac{\partial^2z}{dy^2}\cdot\sin\omega^2.$$

Bezeichnet man daher der Kürze wegen

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = b, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c,$$

so erhält man für die in der Richtung ω vorhandene normale Krümmung den Ausdruck:

$$(7)\qquad \frac{1}{\varrho} = a \cdot \cos\omega^2 + 2\,b \cdot \cos\omega \sin\omega + c \sin\omega^2,$$

in welchem die Grössen a, b, c ihrer Definition (6) gemäss unabhängig von ω sind.

Beachtet man noch, dass das Paraboloid

$$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

denselben Ausdruck für ϱ ergiebt, wie die vorgelegte Fläche — denn es liefert für die zweiten Derivirten von z die in (6) notirten Werthe — und ruft sich die Unabhängigkeit der Krümmung der schrägen Schnitte von der besondern Beschaffenheit der Fläche ins Gedächtniss zurück (Lehrs. I), so erhält man den

Lehrsatz II.

Zu jedem Punkt der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ gehört ein Paraboloid, welches mit ihr in diesem Punkte einen Contact zweiter Ordnung besitzt, d. h.: jede durch den Berührungspunkt gehende Ebene schneidet die Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ und das Paraboloid in Curven von gleicher Krümmung.

Macht man die Tangentialebene zur Ebene der (xy), die Normale zur z-Axe und bezeichnet für den Nullpunkt (Berührungspunkt) die aus $\varphi(x, y, z) = 0$ abzuleitenden Werthe

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 z}{d x^2} = a, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = b, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c,$$

so ist für denjenigen Normalschnitt, welcher den Richtungswinkel ω gegen die x-Axe hat, die Krümmung:

(7) $$\frac{1}{\varrho} = a \cdot \cos\omega^2 + 2b \cdot \cos\omega \sin\omega + c \cdot \sin\omega^2;$$

und die Gleichung des „Krümmungsparaboloids“ ist:

(8) $$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Anmerkung.

Nachdem die Existenz des Krümmungsparaboloids — immer unter der Voraussetzung bestimmter Werthe von a, b, c — mit Hülfe eines Coordinatensystems von besonderer Lage nachgewiesen ist, kann man dessen Gleichung auch für jedes anders gelegene Coordinatensystem ohne Coordinatentransformationen leicht bestimmen.

Da nämlich nach § 133 die Dislocation der Coordinatensysteme Rechnungen verlangt, bei welchem jede primitive Coordinate durch eine lineare Function der secundären Coordinaten ersetzt wird — etwa:

$$x = p + \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 + \gamma \cdot z_1$$

— so bleibt vor und nach der Transformation die Ordnung der Derivirten überall ungeändert, wo die Coordinaten die Differentionsvariabeln sind.

Mithin ist das Krümmungsparaboloid diejenige Fläche, deren Gleichung erfüllt wird, wenn man in ihr die Coordinaten des Berührungspunktes, so wie die ersten und die zweiten Derivirten, mit den analogen Werthen aus der Gleichung der berührten Fläche vertauscht, während die höheren partiellen Derivirten der einen Coordinate nach den andern Coordinaten verschwinden. Denn in dieser Weise entsteht die Gleichung des fraglichen Paraboloids oben bei der dort vorausgesetzten besonderen Lage des Coordinatensystems. Man kann daher die Rechnung in folgender Weise ausführen:

Es sei (x, y, z) der Berührungspunkt, (ξ, η, ζ) ein zweiter Punkt der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ oder $z = \psi(x, y)$.

Dann ist nach Taylor:

$$\zeta - z = (\xi - x) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + (\eta - y) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[(\xi - x)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\cdot(\xi - x)(\eta - y)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (\eta - y)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]$$

$$+ R,$$

wo der Rest R gleichzeitig mit den höheren Derivirten von z verschwindet.

Mithin lautet die Gleichung des Krümmungsparaboloids:

$$\zeta - z = (\xi - x)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + (\eta - y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$+ \frac{1}{2}(\xi - x)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (\xi - x)(\eta - y)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(\eta - y)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

welche Lage das Coordinatensystem und die auf dasselbe bezogene Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ gegen einander auch haben mögen.

§ 142.

Veränderung der Krümmung bei der Drehung des Normalschnitts.

Wir machen wieder die Tangentialebene der Fläche zur (xy)-Ebene und die Normale zur z-Axe und untersuchen die Veränderung, welche die Krümmung des Normalschnitts, nämlich

$$(1) \qquad k = \frac{1}{\varrho} = a \cos\omega^2 + 2b\cos\omega\sin\omega + c\sin\omega^2$$

erleidet, wenn der Richtungswinkel ω des Normalschnitts von 0 bis π wächst.

Da k hierbei sich nicht unstetig ändert und schliesslich seinen ursprünglichen Werth wieder annimmt, so müssen in diesem Intervall Maxima und Minima von k vorhanden sein, falls k nicht constant ist. Diese finden sich, wo

$$\frac{dk}{d\omega} = -(a-c)\sin 2\omega + 2b\cos 2\omega = 0$$

und

$$\frac{d^2k}{d\omega^2} = -2(a-c)\cos 2\omega - 4b\sin 2\omega \lessgtr 0$$

ist.

Nun giebt es aber, falls nicht gleichzeitig $(a-c)=0$ und $b=0$ ist, in dem Intervall $(0, \pi)$ stets zwei um $\frac{\pi}{2}$ von einander verschiedene Werthe von ω, für welche $\frac{dk}{d\omega}=0$ ist, nämlich die beiden Werthe, für welche

$$\operatorname{tng} 2\omega = \frac{2b}{a-c}, \quad \text{d. i.} \quad \cot 2\omega = \frac{a-c}{2b},$$

hervorgeht. Dieselben ergeben für die zweite Derivirte den Ausdruck

$$\frac{d^2k}{d\omega^2} = -\frac{2(a-c)}{\cos 2\omega} = -\frac{4b}{\sin 2\omega},$$

welcher sein Vorzeichen ändert, wenn ω um $\frac{\pi}{2}$ wächst.

Daher giebt es, falls nicht gleichzeitig $(a-c)=0$ und $b=0$ ist, durch jeden Punkt der vorgelegten Fläche zwei rechtwinklig gegen einander geneigte Normalschnitte von maximaler und von minimaler Krümmung, aber nicht mehr.

Diese beiden Normalschnitte nennt man die Hauptkrümmungsschnitte der Fläche im Punkt (x, y, z), deren Krümmungsradien die Hauptkrümmungsradien, u. s. w.

Durch die Substitution in (1) findet man für die beiden Hauptkrümmungsradien die Formel:

(2) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}.$$

Bezeichnet man dieselben durch ϱ_1 und ϱ_2, so ist u. a. offenbar:

(3) $$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = a + c, \quad \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} = ac - b^2.$$

Was schliesslich den bisher ausgeschlossenen Fall angeht, so erhellt aus der Formel (1) ohne weiteres:

Ist gleichzeitig $(a-c)=0$ und $b=0$, so haben alle Normalschnitte die gleiche Krümmung $\frac{1}{\varrho}=a$; — sie sind sämmtlich Hauptkrümmungsschnitte der Fläche in dem fraglichen Punkt.

Einen solchen Punkt nennt man einen **Nabelpunkt** der Fläche.

Verändert man jetzt das Coordinatensystem unter Beibehaltung der z-Axe in der Weise, dass die x-Axe und die y-Axe in die beiden Hauptkrümmungsschnitte der Fläche fallen, so zeigt die Gleichung

$$\operatorname{tng} 2\omega = \frac{2b}{a-c},$$

durch welche oben die Hauptschnitte bestimmt wurden, dass nach dieser Coordinatentransformation ein neues $b=0$ auftreten muss, weil durch dieselbe $\operatorname{tng} 2\omega = 0$ gemacht wird.

Die Gleichung für den Krümmungsradius ϱ nimmt daher die Gestalt an:

$$\frac{1}{\varrho} = a \cdot \cos\omega^2 + c \cdot \sin\omega^2.$$

Für $\omega=0$ und $\omega=\frac{\pi}{2}$ erhält man hieraus die beiden Hauptkrümmungen

$$\frac{1}{\varrho_1}=a, \quad \frac{1}{\varrho_2}=c.$$

Das heisst:

Macht man die beiden Graden, in denen die Tangentialebene von den Hauptkrümmungsschnitten getroffen wird, zu Axen der x und der y, so spricht die Gleichung

$$(4) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\omega^2}{\varrho_1} + \frac{\sin\omega^2}{\varrho_2}$$

die Beziehung aus, welche zwischen den Hauptkrümmungsradien ϱ_1, ϱ_2 und dem Krümmungsradius jedes andern Normalschnitts besteht. — Die Gleichung des Krümmungsparaboloids nimmt die Gestalt an:

(5) $$2z = \frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2}.$$

Setxt man in (4) $(-\omega)$ für ω, so ändert sich die rechte Seite nicht. Dies kann man so aussprechen:

Haben zwei Normalschnitte eine gleiche Neigung gegen einen Hauptkrümmungsschnitt, so besitzen sie eine gleiche Krümmung.

Substituirt man $\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)$ für ω, so erhält man aus (4) für die Krümmung des neuen Schnitts:

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{\sin\omega^2}{\varrho_1} + \frac{\cos\omega^2}{\varrho_2}.$$

Dies giebt in Verbindung mit (4):

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}.$$

Also:

Die Summe der Krümmungen je zweier auf einander senkrechten Normalschnitte durch denselben Punkt der Fläche ist constant.

Wir haben bereits oben gesehn, dass die Krümmung der Fläche vollständig charakterisirt wird durch die Krümmung des Paraboloids

(6) $$2z = \frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2}.$$

Denken wir uns durch denjenigen Punkt der z-Axe — d. i. durch denjenigen Punkt der Normale — dessen z-Coordinate $= z$ ist, eine Ebene parallel zur Tangentialebene — der (xy)-Ebene — gelegt, so ist demnach

(7) $$1 = \frac{x^2}{2z\varrho_1} + \frac{y^2}{2z\varrho_2}$$

die Gleichung der Projection des Schnitts dieser Ebene mit dem Krümmungsparaboloid auf der Tangentialebene.

Man nennt diese Projection die **Indicatrix** des Berührungspunktes.

Damit die Indicatrix Realität habe, muss z so gewählt sein, dass mindestens das eine von den Producten $2z\varrho_1$, $2z\varrho_2$ einen positiven Werth besitzt, weil die Gleichung (6) sonst keine reellen Werthe für x und y ergiebt, d. h. m. a. W.: die parallel zur Tangentialebene angebrachte Ebene muss durch einen solchen Punkt der Normale hindurchgehn, nach welchem hin mindestens ein Krümmungsradius vom Berührungspunkte aus gerichtet ist.

Haben ϱ_1 und ϱ_2 gleiche Vorzeichen, so ist dies nur bei einem Vorzeichen von z möglich: — die Fläche liegt auf einer einzigen Seite ihrer Tangentialebene, und die Indicatrix ist eine Ellipse mit den Halbaxen $\sqrt{2z\varrho_1}$ und $\sqrt{2z\varrho_2}$.

Haben ϱ_1 und ϱ_2 ungleiche Vorzeichen, so darf z sowohl positiv als auch negativ genommen werden: — die Indicatrices für beide Seiten der Tangentialebene sind (bei gleichen Abständen der Schnitte) conjugirte Hyperbeln mit identischen Asymptoten; denn wenn die eine Gleichung die Gestalt

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

erhält, so erhält die andere Gleichung die Gestalt

$$1 = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Bei gleichen Vorzeichen von ϱ_1 und ϱ_2 ist die Fläche buckelförmig, bei ungleichen Vorzeichen sattelförmig.

Bei gleichen Vorzeichen von ϱ_1 und ϱ_2 schrumpft die Indicatrix durch die Verminderung von z in einen Punkt zusammen, bei ungleichen Vorzeichen deformirt sie sich in die beiden Graden

$$y = \pm x \sqrt{-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}},$$

nämlich in die gemeinsamen Asymptoten aller Indicatrices aus den entfernteren Schnitten.

Setzt man in der Gleichung (7) der Indicatrix

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega,$$

bezeichnet also durch r denjenigen Halbmesser der Indicatrix, welcher in derselben Normalebene liegt, wie der Schnitt mit der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$, so ergiebt sich aus (7):

$$\frac{2z}{r^2} = \frac{\cos\omega^2}{\varrho_1} + \frac{\sin\omega^2}{\varrho_2}.$$

Durch die Vergleichung mit (4) folgt hieraus:

$$(8) \qquad \varrho = \frac{r^2}{2z}.$$

Daher sind die Krümmungsradien der verschiedenen Normalschnitte, welche durch denselben Punkt der Fläche gehn, den Quadraten der zugehörigen Halbmesser der Indicatrix proportional.

Diesem Umstande verdankt die Indicatrix ihren Namen.

Wir beziehen — wie es zuletzt bereits geschehen ist — auch ferner die Gleichung der Fläche auf eine bestimmte Tangentialebene als Ebene der (x y) und sehen deren Schnittlinien mit den beiden Hauptnormalschnitten als die Axen der x und der y an.

Dann lautet die Gleichung einer zweiten Tangentialebene, deren laufende Coordinaten durch ξ, η, ζ bezeichnet werden:

$$(\xi - x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

oder, wenn man die Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ in der Gestalt $\psi(x, y) - z = 0$ dargestellt denkt:

$$F(x, y, z) = (\xi - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial z}{\partial y} - (\zeta - z) = 0.$$

Verschiebt man den Berührungspunkt (x, y, z) auf der Fläche um die Strecke d s, so erhält man eine zweite Tangentialebene, und deren Gleichung stellt sich in der Form $F(x + dx, y + dy, z + dz) = 0$ dar. Die Schnittlinie der beiden Tangentialebenen genügt

beiden Gleichungen, mithin auch der Differenz derselben, dividirt durch ds. Lässt man hinterher ds sich der Null nähern, so erhält man demnach die Grenzlage der Schnittlinie beider Tangentialebenen für unendlich genäherte Berührungspunkte aus den beiden Gleichungen:

$$F(x,y,z) = (\xi - x)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + (\eta - y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - (\zeta - z) = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{dF(x,y,z)}{ds} = (\xi - x)\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dy}{ds}\right)\\ + (\eta - y)\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{ds}\right)\\ - \frac{dx}{ds}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{dy}{ds}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{dz}{ds} = 0.\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen vereinfachen sich ausserordentlich, wenn der Punkt (x, y, z) in den Coordinatenanfang verlegt wird. Denn dann wird:

$$x = y = z = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a = \frac{1}{\varrho_1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = b = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c = \frac{1}{\varrho_2};$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\omega, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\omega, \quad \frac{dz}{ds} = 0;$$

und die beiden Gleichungen gehen über in:

$$\zeta = 0, \quad \frac{\xi\cos\omega}{\varrho_1} + \frac{\eta\sin\omega}{\varrho_2} = 0.$$

Unter den letzteren zeigt die zweite denjenigen Durchmesser der Indicatrix an, welcher dem Durchmesser vom Richtungswinkel ω conjugirt ist.[1]) Es ergiebt sich also:

---

[1]) Ist nämlich ω der Richtungswinkel eines Durchmessers der Ellipse oder Hyperbel

Construirt man in einer Tangentialebene der Fläche die Indicatrix für den Berührungspunkt und lässt über einem Durchmesser derselben den Berührungspunkt einer zweiten Tangentialebene an den der ersteren herantreten, so nähert sich der Schnitt beider Tangentialebenen dem conjugirten Durchmesser der Indicatrix als Grenzlage.

$$\frac{x^2}{2z\varrho_1} + \frac{y^2}{2z\varrho_2} = 1,$$

so versteht man unter dem conjugirten Durchmesser denjenigen, welcher der Tangente durch den einen Endpunkt des ersteren parallel liegt. Der Richtungswinkel des conjugirten Durchmessers heisse ω'.

Dann folgt:

$$\operatorname{tng}\omega' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\varrho_2 x}{\varrho_1 y} = -\frac{\varrho_2 \cos\omega}{\varrho_1 \sin\omega} = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\cdot\cot\omega;$$

und hieraus ergiebt sich als Gleichung des conjugirten Durchmessers:

$$\eta = \xi\cdot\operatorname{tng}\omega' = -\xi\cdot\frac{\varrho_2\cos\omega}{\varrho_1\sin\omega},$$

$$\frac{\xi\cdot\cos\omega}{\varrho_1} + \frac{\eta\cdot\sin\omega}{\varrho_2} = 0.$$

Da $\cos\omega$ und $\sin\omega$ gleichzeitig ihre Vorzeichen ändern, wenn man ω um π vergrössert, d. h. wenn man die Tangente durch den zweiten Endpunkt des primitiven Durchmessers der Construction des conjugirten Durchmessers zu Grunde legt, so bleibt nach der obigen Formel für $\operatorname{tng}\omega'$ die Lage des conjugirten Durchmessers ungeändert; denn es erweisen sich die beiden fraglichen Tangenten als parallel.

Mithin gehört zu jedem Durchmesser nur ein conjugirter.

Ersetzt man ferner ω durch ω', so erhält man aus der Gleichung für $\operatorname{tng}\omega'$ zur Bestimmung des Richtungswinkels ω'' des conjugirten Durchmessers:

$$\operatorname{tng}\omega'' = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\cdot\cot\omega' = +\operatorname{tng}\omega, \quad \omega'' = \omega.$$

Mithin ist jeder Durchmesser der conjugirte Durchmesser seines conjugirten Durchmessers.

Sind r und r' die conjugirten Halbmesser, so folgt aus der Gleichung des Kegelschnitts

$$\frac{x^2}{2z\varrho_1} + \frac{y^2}{2z\varrho_2} = 1$$

Je zwei conjugirte Durchmesser der Indicatrix nennt man conjugirte Tangenten der Fläche, die durch sie hindurchgelegten Normalschnitte conjugirte Normalschnitte.

Die Krümmungsradien in zwei conjugirten Normalschnitten der vorgelegten Fläche mögen ϱ und ϱ' heissen, die zwei entsprechenden Halbmesser der Indicatrix r und r'. Dann ist nach (8):

$$\varrho = \frac{r^2}{2z}, \quad \varrho' = \frac{r'^2}{2z}.$$

Hieraus folgt, weil nach einem — unten bewiesenen — Satze über die Kegelschnitte

$$r^2 + r'^2 = 2z(\varrho_1 + \varrho_2)$$

ist:

$$\varrho + \varrho' = \varrho_1 + \varrho_2.$$

---

durch die Substitution der Werthe $x = r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$, dass

$$r^2 = \frac{2z\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1 \sin \omega^2 + \varrho_2 \cos \omega^2}$$

und analog

$$r'^2 = \frac{2z\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1 \sin \omega'^2 + \varrho_2 \cos \omega'^2}$$

ist.

Addirt man die Ausdrücke für r^2 und r'^2 zu einander unter Rücksicht auf die oben abgeleitete Gleichung

$$\operatorname{tng} \omega' = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \cot \omega$$

zu einander, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$r^2 + r'^2 = 2z(\varrho_1 + \varrho_2).$$

Mithin ist die Summe der Quadrate der conjugirten Halbmesser einer Ellipse oder Hyperbel constant, nämlich gleich der Summe der Nenner in der Mittelpunktsgleichung

$$\frac{x^2}{2z\varrho_1} + \frac{y^2}{2z\varrho_2} = 1$$

des fraglichen Kegelschnitts.

